Matematyka w XIX wieku

Wrocław, 5 maja 2010

Strona Uniwersytetu St. Andrews (Szkocja)

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/

jest dobrym źródłem wiadomości historycznych, biografii, itp.

Z czym matematyka weszła w XIX wiek?

Wspaniały rozwój Analizy Matematycznej (w tym równania różniczkowe) — np. badanie stabilności systemu słonecznego.

Czym w owym czasie jest Algebra?

- To peryferie matematyki:

Z czym matematyka weszła w XIX wiek?

Wspaniały rozwój Analizy Matematycznej (w tym równania różniczkowe) — np. badanie stabilności systemu słonecznego.

Czym w owym czasie jest Algebra?

- To peryferie matematyki:
- Znano różne operacje na liczbach (w tym zespolonych) i na symbolach abstrakcyjnych.

Z czym matematyka weszła w XIX wiek?

Wspaniały rozwój Analizy Matematycznej (w tym równania różniczkowe) — np. badanie stabilności systemu słonecznego.

Czym w owym czasie jest Algebra?

- To peryferie matematyki:
- Znano różne operacje na liczbach (w tym zespolonych) i na symbolach abstrakcyjnych.
- Umiano rozwiązywać równania wielomianowe jednej zmiennej i wiadomo było (ok. roku 1800), że od stopnia 5 wzwyż wzory ogólne nie istnieją.

Z czym matematyka weszła w XIX wiek?

Wspaniały rozwój Analizy Matematycznej (w tym równania różniczkowe) — np. badanie stabilności systemu słonecznego.

Czym w owym czasie jest Algebra?

- To peryferie matematyki:
- Znano różne operacje na liczbach (w tym zespolonych) i na symbolach abstrakcyjnych.
- Umiano rozwiązywać równania wielomianowe jednej zmiennej i wiadomo było (ok. roku 1800), że od stopnia 5 wzwyż wzory ogólne nie istnieją.
- Potrafiono rozwiązywać układy równań liniowych.

Z czym matematyka weszła w XIX wiek?

Wspaniały rozwój Analizy Matematycznej (w tym równania różniczkowe) — np. badanie stabilności systemu słonecznego.

Czym w owym czasie jest Algebra?

- To peryferie matematyki:
- Znano różne operacje na liczbach (w tym zespolonych) i na symbolach abstrakcyjnych.
- Umiano rozwiązywać równania wielomianowe jednej zmiennej i wiadomo było (ok. roku 1800), że od stopnia 5 wzwyż wzory ogólne nie istnieją.
- Potrafiono rozwiązywać układy równań liniowych.
- I właściwie niewiele więcej.

Carl Friedrich Gauss

Urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunszwiku.

- Żartobliwie mówił, że wcześniej umiał liczyć niż mówić.

Carl Friedrich Gauss

Urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunszwiku.

- Żartobliwie mówił, że wcześniej umiał liczyć niż mówić.
- W szkole był równie dobry w językach jak i w matematyce.

Carl Friedrich Gauss

Urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunszwiku.

- Żartobliwie mówił, że wcześniej umiał liczyć niż mówić.
- W szkole był równie dobry w językach jak i w matematyce.
- Od 1795 „studiował w Getyndze" – matematyki nauczał tam Kaestner („najlepszy poeta ...").

Carl Friedrich Gauss

Urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunszwiku.

- Żartobliwie mówił, że wcześniej umiał liczyć niż mówić.
- W szkole był równie dobry w językach jak i w matematyce.
- Od 1795 „studiował w Getyndze" – matematyki nauczał tam Kaestner („najlepszy poeta ...").
- Od 30 marca 1796 notował po łacinie swoje rezulatاty (146 wpisów, pierwszy o konstrukcji 17-kąta).

Carl Friedrich Gauss

Urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunszwiku.

- Żartobliwie mówił, że wcześniej umiał liczyć niż mówić.
- W szkole był równie dobry w językach jak i w matematyce.
- Od 1795 „studiował w Getyndze" – matematyki nauczał tam Kaestner („najlepszy poeta ...").
- Od 30 marca 1796 notował po łacinie swoje rezulatаty (146 wpisów, pierwszy o konstrukcji 17-kąta).
- W czasie studiów w Getyndze dokonał wielu odkryć, lubił zwłaszcza teorię liczb (Matematyka jest królową nauka, a ...)

Carl Friedrich Gauss

Urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunszwiku.

- Żartobliwie mówił, że wcześniej umiał liczyć niż mówić.
- W szkole był równie dobry w językach jak i w matematyce.
- Od 1795 „studiował w Getyndze” – matematyki nauczał tam Kaestner („najlepszy poeta ...”).
- Od 30 marca 1796 notował po łacinie swoje rezulataty (146 wpisów, pierwszy o konstrukcji 17-kąta).
- W czasie studiów w Getyndze dokonał wielu odkryć, lubił zwłaszcza teorię liczb (Matematyka jest królową nauka, a ...)
- Dokończył studia w Helmsted, tam poznał Pfaffa.

Carl Friedrich Gauss

Urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunszwiku.

- Żartobliwie mówił, że wcześniej umiał liczyć niż mówić.
- W szkole był równie dobry w językach jak i w matematyce.
- Od 1795 „studiował w Getyndze" – matematyki nauczał tam Kaestner („najlepszy poeta ...").
- Od 30 marca 1796 notował po łacinie swoje rezulatаty (146 wpisów, pierwszy o konstrukcji 17-kąta).
- W czasie studiów w Getyndze dokonał wielu odkryć, lubił zwłaszcza teorię liczb (Matematyka jest królową nauka, a ...)
- Dokończył studia w Helmsted, tam poznał Pfaffa.
- W 1807 zaproponowano mu posadę w Akademii Nauk w St. Petersburgu, za namową Olbersa odmówił.

Carl Friedrich Gauss

Urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunszwiku.

- Żartobliwie mówił, że wcześniej umiał liczyć niż mówić.
- W szkole był równie dobry w językach jak i w matematyce.
- Od 1795 „studiował w Getyndze" – matematyki nauczał tam Kaestner („najlepszy poeta ...").
- Od 30 marca 1796 notował po łacinie swoje rezulataty (146 wpisów, pierwszy o konstrukcji 17-kąta).
- W czasie studiów w Getyndze dokonał wielu odkryć, lubił zwłaszcza teorię liczb (Matematyka jest królową nauka, a ...)
- Dokończył studia w Helmsted, tam poznał Pfaffa.
- W 1807 zaproponowano mu posadę w Akademii Nauk w St. Petersburgu, za namową Olbersa odmówił.
- Przyjął stanowisko dyrektora obserwatorium astronomicznego w Getyndze, bo to nie odrywało go od pracy.

Carl Friedrich Gauss

Urodził się 30 kwietnia 1777 roku w Brunszwiku.

- Żartobliwie mówił, że wcześniej umiał liczyć niż mówić.
- W szkole był równie dobry w językach jak i w matematyce.
- Od 1795 „studiował w Getyndze" – matematyki nauczał tam Kaestner („najlepszy poeta ...").
- Od 30 marca 1796 notował po łacinie swoje rezulatаty (146 wpisów, pierwszy o konstrukcji 17-kąta).
- W czasie studiów w Getyndze dokonał wielu odkryć, lubił zwłaszcza teorię liczb (Matematyka jest królową nauka, a ...)
- Dokończył studia w Helmsted, tam poznał Pfaffa.
- W 1807 zaproponowano mu posadę w Akademii Nauk w St. Petersburgu, za namową Olbersa odmówił.
- Przyjął stanowisko dyrektora obserwatorium astronomicznego w Getyndze, bo to nie odrywało go od pracy.
- Całe życie przebywał w Getyndze, w 1828 pojechał do Berlina na spotkanie naukowe, a w 1854 pojechał koleją (po otwarciu linii Getynga–Hanower).

Pierwsze wyniki:

- 1796: Dowód konstuowalności cyrklem i linijką siedemnastokąta foremnego (największe osiągnięcie geometrii od czasu Euklidesa)

Gauss

Pierwsze wyniki:

- 1796: Dowód konstuowalności cyrklem i linijką siedemnastokąta foremnego (największe osiągnięcie geometrii od czasu Euklidesa)
- 1799: Pierwszy pełny dowód Zasadniczego Twierdzenia Algebry

Gauss

Pierwsze wyniki:

- 1796: Dowód konstuowalności cyrklem i linijką siedemnastokąta foremnego (największe osiągnięcie geometrii od czasu Euklidesa)
- 1799: Pierwszy pełny dowód Zasadniczego Twierdzenia Algebry
- 1801: *Disquisitiones Arithmeticae* (Badania arytmetyczne)

Gauss

Pierwsze wyniki:

- 1796: Dowód konstuowalności cyrklem i linijką siedemnastokąta foremnego (największe osiągnięcie geometrii od czasu Euklidesa)
- 1799: Pierwszy pełny dowód Zasadniczego Twierdzenia Algebry
- 1801: *Disquisitiones Arithmeticae* (Badania arytmetyczne)
- *Theorema Aureum* = prawo wzajemności reszt kwadratowych

Pierwsze wyniki:

- 1796: Dowód konstuowalności cyrklem i linijką siedemnastokąta foremnego (największe osiągnięcie geometrii od czasu Euklidesa)
- 1799: Pierwszy pełny dowód Zasadniczego Twierdzenia Algebry
- 1801: *Disquisitiones Arithmeticae* (Badania arytmetyczne)
- *Theorema Aureum* = prawo wzajemności reszt kwadratowych
- planetoida Ceres: odkrył ją 1 stycznia 1801 roku G. Piazzi; po obserwacji 9 stopni jej orbity planetoida schowała się za Słońce. Opublikowano kilka wyników obliczeń, kiedy i gdzie na niebie powinna się znów pojawić, w tym rezulatat Gaussa, znacznie różniący się od pozostałych. 7 grudnia 1801 zobaczono Ceres znowu i to dokładnie w miejscu wskazanym przez Gaussa. Gauss użył w tych rachunkach metody najmniejszych kwadratów.

Arytmetyka reszt modulo n

W *Disquisitiones* Gauss wprowadził bardzo użyteczny i sugestywny symbol **kongruencji** czyli **przystawania według modułu** n:

$$a \equiv b \bmod (n) \qquad \iff \qquad n|(a-b).$$

Co czytamy: a przystaje do b modulo n, gdy n dzieli różnicę $a-b$.

http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?IDDOC=232699
(po niemiecku, można znaleźć też po łacinie)

Arytmetyka reszt modulo n

Zbadawszy własności arytmetyki mod (n) Gauss zauważył, że $\mathbb{Z}_n$ (czyli $\mathbb{Z}$ modulo n) jest ciałem liczbowym wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

$\mathbb{Z}_n$ jest zawsze pierścieniem liczbowym, aby taki pierścień był ciałem, nie może zawierać dzielników zera, np. w $\mathbb{Z}_6$ mamy $3 \cdot 2 = 0\,(n)$.

Było to pierwsze ciało liczbowe wprowadzone nie dla celów praktycznych (w przeciwieństwie do $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$).

Problem istnienia rozwiązania kongruencji $x^2 \equiv a\,(p)$ dla danej liczby pierwszej p jest stosunkowo łatwy do rozwiązania.

Równanie takie ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy (zakładamy tu, że a nie przystaje do 0 mod (p) oraz $p > 2$)

$$a^{(p-1)/2} \equiv 1\,(p)$$

Kongruencje kwadratowe

Zamieńmy rolami a oraz p: ustalamy liczbę całkowitą a.

Dla których liczb pierwszych p kongruencja

$$x^2 \equiv a \ (p)$$

ma rozwiązania?

Prawo wzajemności reszt kwadratowych

Euler i Legendre sformułowali *Prawo wzajemności reszt kwadratowych*, ale nie potrafili go udowodnić. Zrobił to dopiero w *Disquisitiones Aritmeticae* Gauss i nazwał *Złotym Twierdzeniem* (Theorema Aureum).

W *Disquisitiones* podał dwa różne dowody, a potem jeszcze 6 innych. Do tej pory podano sto kilkadziesiąt dowodów (często bardzo podobnych).

Symbol Legendre'a

Dla liczb całkowitych $a, \ p$ oznaczmy

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } a \text{ jest resztą kwadratową mod } p, \\ -1, & \text{gdy } a \text{ nie jest resztą kwadratową mod } p. \end{cases}$$

Na przykład 2 jest resztą kwadratową mod 7, a 3 nie jest.

Rzeczywiście: $1^2, \ 2^2, \ 3^2, \ 4^2, 5^2$ i 6^2 dają reszty mod (7) równe odpowiednio 1, 4, 2, 2, 4, 1. Zatem 1, 2 i 4 są resztami kwadratowymi mod (7), a liczby 3, 5 i 6 nie są.

Prawo wzajemności reszt kwadratowych

Theorem

Niech p i q będą nieparzystymi liczbami pierwszymi. Wówczas

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{((p-1)/2)((q-1)/2)}.$$

Prawo wzajemności reszt kwadratowych

W zależności od przystawania p i q

kongruencja $x^2 \equiv p \pmod{q}$ ma rowiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $y^2 \equiv q \pmod{p}$ ma rozwiązanie

albo

kongruencja $x^2 \equiv p \pmod{q}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy kongruencja $y^2 \equiv q \pmod{p}$ nie ma rozwiązania.

Gauss i astronomia

W roku 1809 ukazuje się dwutomowe dzieło *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, w którym między innymi podany jest sposób obliczania torów ciał niebieskich.

Problem trzech ciał: Lagrange – medal Akademii Paryskiej za szczególne rozwiązanie. Ogólny przypadek do dziś otwarty.

Odkryty 23 września 1846, Neptun jest jedyną planetą odnalezioną na drodze przewidywań matematycznych, w miejsce obserwacji nieba. Niespodziewane zmiany w orbicie Urana doprowadziły astronomów do wniosku, że podlega ona perturbacjom nieznanej planety. Obliczenia przeprowadzili niezależnie Adams i Le Verierre.

Skąd hel wziął swą nazwę?

Pomiary kątów trójkąta — próba stwierdzenia czy otaczający nas świat jest euklidesowy, czy hiperboliczny.

Funkcja hipergeometryczna

W roku 1812 w pracy *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* wprowadza ściśle pojęcie zbieżności szeregów i definiuje funkcję hipergeometyczną ${}_2F_1$:

$$ {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, $$

gdzie $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)...(a+n-1)$ jest symbolem Pochhammera.

Funkcja ta spełnia tak zwane równanie hipergeometryczne

$$ x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x)]y'(x) - ab\, y(x) = 0. $$

Za pomocą funkcji hipergometrycznej można np. podać wzory na pierwiastki dowolnego wielomianu stopnia 5 (F. Klein 1877).

Wprowadza pojecie krzywizny (zwanej teraz krzywizną Gaussa) i dowodzi twierdzenia, które nazywa *Theorema egregium* (Twierdzenie wyborne)

Jeśli jakąkolwiek powierzchnię w $\mathbb{R}^3$ *izometrycznie odwzorujemy na inną, to krzywizna zostanie zachowana.*

Dlatego np. połówki piłki nie da się rozpłaszczyć (bo kula ma niezerową krzywiznę, a płaszczyzna zerową).

Rozmieszczenie Liczb Pierwszych

Niech $\pi(x)$ oznacza ilość liczb pierwszych, które nie przekraczają x.

Badając tablice (ułożone samodzielnie) Gauss zauważył, że

$$\pi(x) \;\sim\; \frac{x}{\ln x}.$$

Gauss wprowadził funkcję $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt$ i uważał, że daje ona lepsze przybliżenie $\pi(x)$ niż $x/\ln x$.

W istocie $\pi(x) = Li(x) + O(xe^{-a\sqrt{\ln x}})$.

Rozwija teorię potencjału (matematyczną), a potem stosuje ją w fizyce.

W latach 1832-1841 współpracuje z fizykiem Weberem, budują magnetometr i badają pole magnetyczne Ziemi. Dziś jednostka pola magnetycznego to gauss. Gauss i Weber mają wspólny pomnik w Getyndze.

Budują razem telegraf magnetyczny (raczej jako ciekawostkę), przesyłają wiadomości na odległość 5000 stóp.


ARL FRIEDRICH GAUSS
UND
WILHELM WEBER

Za życia Riemanna ukazały się **cztery** jego prace, a jednak wstrząsnął on matematyką.

Bernhard Riemann (1826-1866)

Studia w Getyndze 1846-47, potem w Berlinie u Steina, Dirichleta, Jacobiego i Eisensteina. Tam Riemann rozwinął swoją teorię funkcji zespolonych. Przypomnijmy tw. Riemanna o odwzorowaniu: *każdy jednospójny obszar na płaszczyźnie zespolonej jest konforemnie równoważny kołu jednostkowemu*.

Bernhard Riemann (1826-1866)

Studia w Getyndze 1846-47, potem w Berlinie u Steina, Dirichleta, Jacobiego i Eisensteina. Tam Riemann rozwinął swoją teorię funkcji zespolonych. Przypomnijmy tw. Riemanna o odwzorowaniu: *każdy jednospójny obszar na płaszczyźnie zespolonej jest konforemnie równoważny kołu jednostkowemu*.

W roku 1849 powraca do Getyngi i pisze u Gaussa doktorat (w 1851).

Bernhard Riemann (1826-1866)

Studia w Getyndze 1846-47, potem w Berlinie u Steina, Dirichleta, Jacobiego i Eisensteina. Tam Riemann rozwinął swoją teorię funkcji zespolonych. Przypomnijmy tw. Riemanna o odwzorowaniu: *każdy jednospójny obszar na płaszczyźnie zespolonej jest konforemnie równoważny kołu jednostkowemu*.

W roku 1849 powraca do Getyngi i pisze u Gaussa doktorat (w 1851).

Szybko? Gdy w szkole średniej mógł pożyczać książki od dyrektora, przeczytał (i zrozumiał) w 6 dni 900 stron książki Legendre'a o teorii liczb.

http://www.emis.de/classics/Riemann/

Bernhard Riemann (1826-1866)

W roku 1854 Riemann habilituje się, przygotowuje 3 wykłady: dwa z elektryczności, jeden z geometrii. Gauss wybiera (wbrew oczekiwaniom Riemanna) ten trzeci.

10 czerwca 1854 Riemann wygłasza wykład *O hipotezach leżących u podstaw geometrii* (Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen).

W roku 1854 Riemann habilituje się, przygotowuje 3 wykłady: dwa z elektryczności, jeden z geometrii. Gauss wybiera (wbrew oczekiwaniom Riemanna) ten trzeci.

10 czerwca 1854 Riemann wygłasza wykład *O hipotezach leżących u podstaw geometrii* (Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen).

Spośród obecnych na sali jedynie Gauss był w stanie ocenić wykład. Był zdumiony, wykład przeszedł jego najśmielsze oczekiwania, potem z wyjątkowym entuzjazmem opowiadał Weberowi o głębi pomysłów Riemanna.

Wykład zmienił sposób patrzenia na geometrię i zapoczątkował geometrię różniczkową, rozmaitości riemannowskie, itd. Otworzył też drogę teorii względności i kosmologii.

Funkcja ζ Riemanna

Funkcja zeta (dzeta) Riemanna: dla $Re\, s > 1$ połóżmy

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ponieważ, jak wykazał Euler,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}},$$

więc funkcja $\zeta(s)$ ma wielkie znaczenie w teorii liczb.

Przez przedłużenie analityczne Riemann rozszerzył funkcję ζ na wszystkie liczby zespolone różne od 1 (to przedłużenie nie jest już zadane szeregiem!). Łatwo znaleźć niektóre zera tej rozszerzonej funkcji: $s = -2, -4, -6, \ldots$. Te zera zwane są *zerami trywialnymi*.

Przez przedłużenie analityczne Riemann rozszerzył funkcję ζ na wszystkie liczby zespolone różne od 1 (to przedłużenie nie jest już zadane szeregiem!). Łatwo znaleźć niektóre zera tej rozszerzonej funkcji: $s = -2,\ -4,\ -6, \ldots$. Te zera zwane są *zerami trywialnymi*.

Riemann w pracy *O liczbie liczb pierwszych mniejszych od zadanej wielkości* zauważył, że ζ ma nieskoczenie wiele nietrywialnych zer i wszystkie one mają cześci rzeczywiste zawarte w przedziale $[0,\ 1]$.

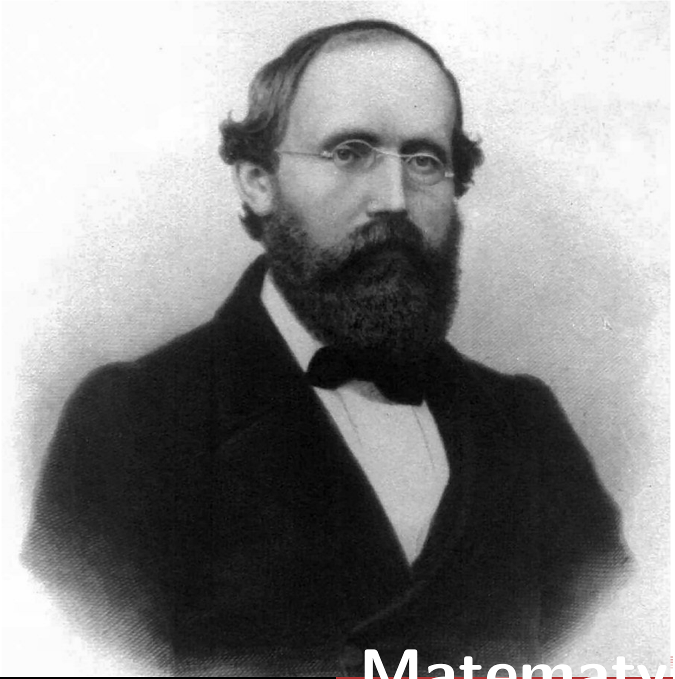
Wszystkie nietrywialne zera funkcji ζ leżą na prostej $Re\, s = \frac{1}{2}$.

W roku 1896 J. Hadamard i de la Valle Poussin wykazali (niezależnie), że na prostej $Re\, s = 1$ funkcja ζ nie ma zer, a stąd wynika już wspomniana hipoteza Gaussa:

$$\pi(x) \ \sim \ \frac{x}{\ln x}.$$

Wiele twierdzeń z teorii liczb zaczyna się od słów: *jeśli Wielka Hipoteza Riemanna jest prawdą, to ...*

Jeden z siedmiu *Problemów Milenijnych* to właśnie Wielka Hipoteza Riemanna.



Matematyka w

Dnia 1 marca 1847 G. Lamé wygłosił w Paryskiej Akademii Nauk wykład, w którym ogłosił, że udowodnił WTF:

Dla $n > 2$ równanie

$$x^n + y^n = z^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Znano już dowody dla małych wykładników n, dowody dla $n = 3, 4, 5, 7$ opierały się na rozkładach, np.

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Lamé szukał takiej liczby zespolonej r, która spełnia równanie $r^n = 1$ i daje dla nieparzystych n rozkład

$$x^n + y^n = (x + y)(x + ry)(x + r^2 y) \dots (x + r^{n-1} y).$$

Na przykład dla $r = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = e^{2\pi i/n}$ mamy

$$X^n - 1 = (X - 1)(X - r)(X - r^2) \dots (X - r^{n-1}).$$

Podstawiamy $X = -x/y$ i mnożymy powyższą nierówność przez $-y^n$, dostając pierwszą.

Błąd Lamégo

Lamé myślał, że jeśli

- czynniki są względnie pierwsze oraz

Błąd Lamégo

Lamé myślał, że jeśli

- czynniki są względnie pierwsze oraz
- ich iloczyn jest stopnia n, to *z jednoznaczności rozkładu* wynika, że

Błąd Lamégo

Lamé myślał, że jeśli

- czynniki są względnie pierwsze oraz
- ich iloczyn jest stopnia n, to *z jednoznaczności rozkładu* wynika, że
- każdy z nich jest stopnia n.

Błąd Lamégo

Lamé myślał, że jeśli

- czynniki są względnie pierwsze oraz
- ich iloczyn jest stopnia n, to *z jednoznaczności rozkładu* wynika, że
- każdy z nich jest stopnia n.
- Zadanie zostaje sprowadzone do badania łatwych czynników!

Błąd Lamégo

Lamé myślał, że jeśli

- czynniki są względnie pierwsze oraz
- ich iloczyn jest stopnia n, to *z jednoznaczności rozkładu* wynika, że
- każdy z nich jest stopnia n.
- Zadanie zostaje sprowadzone do badania łatwych czynników!
- Liouville uważał, że to nie jest jasne.

Błąd Lamégo

Lamé myślał, że jeśli

- czynniki są względnie pierwsze oraz
- ich iloczyn jest stopnia n, to *z jednoznaczności rozkładu* wynika, że
- każdy z nich jest stopnia n.
- Zadanie zostaje sprowadzone do badania łatwych czynników!
- Liouville uważał, że to nie jest jasne.
- I wtedy dostał list z Wrocławia, od Ernesta Eduarda Kummera.

Błąd Lamégo

Lamé myślał, że jeśli

- czynniki są względnie pierwsze oraz
- ich iloczyn jest stopnia n, to *z jednoznaczności rozkładu* wynika, że
- każdy z nich jest stopnia n.
- Zadanie zostaje sprowadzone do badania łatwych czynników!
- Liouville uważał, że to nie jest jasne.
- I wtedy dostał list z Wrocławia, od Ernesta Eduarda Kummera.
- W liście Kummer napisał, że w pracy sprzed 3 lat wykazał niejednoznaczość rozkładu w pewnych pierścieniach i wprowadził klasę „liczb idealnych" oraz pierścienie z jednoznacznością rozkładu.

Pierścień Dedekinda

Już w szkole bada się liczby $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$.

Można rozważać też liczby postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c należą do pewnego pierścienia liczbowego, na przykład do $\mathbb{Z}$.

Dedekind zauważył, że w pierścieniu $\{n + m\sqrt{-5},\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ nie ma jednoznaczności rozkładu:

$$2 \cdot 3 = 6, \qquad (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6.$$

Ernst Eduard Kummer

Fakt, że jednoznaczność rozkładu liczb całkowitych na czynniki w pierścieniu $\mathbb{Z}$ nie rozszerza się na inne pierścienie liczbowe doprowadził Kummera do wprowadzenia „dzielników idealnych”. Miało to fundamentalne znaczenie nie tylko dla prób dowodu WTF, ale stało się podstawą rozwoju algebry abstrakcyjnej.

Ernst Eduard Kummer

Fakt, że jednoznacznośc rozkładu liczb całkowitych na czynniki w pierścieniu $\mathbb{Z}$ nie rozszerza się na inne pierścienie liczbowe doprowadził Kummera do wprowadzenia „dzielników idealnych". Miało to fundamentalne znaczenie nie tylko dla prób dowodu WTF, ale stało się podstawą rozwoju algebry abstrakcyjnej.

I pomyśleć, że przez 10 lat był Kummer skromnym nauczycielem gimnazjum w Legnicy ...

David Hilbert 1864 – 1943

David Hilbert:

- Urodził się, uczęszczał do gimnazjum i studiował w Królewcu.

David Hilbert:

- Urodził się, uczęszczał do gimnazjum i studiował w Królewcu.
- W roku 1885 obronił doktorat *Uber invariante Eigenschaften specieller binaren Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*. Promotorem był Lindemann (ten od przestępności liczby π).

David Hilbert:

- Urodził się, uczęszczał do gimnazjum i studiował w Królewcu.
- W roku 1885 obronił doktorat *Uber invariante Eigenschaften specieller binaren Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*. Promotorem był Lindemann (ten od przestępności liczby π).
- W latach 1886-1893 pracował w Królewcu (Privatdozent do 1892, profesor nadzwyczajny w 1893 i od 1893 profesor).

David Hilbert 1864 – 1943

David Hilbert:

- Urodził się, uczęszczał do gimnazjum i studiował w Królewcu.
- W roku 1885 obronił doktorat *Uber invariante Eigenschaften specieller binaren Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*. Promotorem był Lindemann (ten od przestępności liczby π).
- W latach 1886-1893 pracował w Królewcu (Privatdozent do 1892, profesor nadzwyczajny w 1893 i od 1893 profesor).
- W Królewcu poznał Hermana Minkowskiego i Adolfa Hurwitza.

David Hilbert 1864 – 1943

David Hilbert:

- Urodził się, uczęszczał do gimnazjum i studiował w Królewcu.
- W roku 1885 obronił doktorat *Uber invariante Eigenschaften specieller binaren Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*. Promotorem był Lindemann (ten od przestępności liczby π).
- W latach 1886-1893 pracował w Królewcu (Privatdozent do 1892, profesor nadzwyczajny w 1893 i od 1893 profesor).
- W Królewcu poznał Hermana Minkowskiego i Adolfa Hurwitza.
- w 1895 przenosi się do Getyngi, gdzie pracuje do końca życia.

David Hilbert:

- Urodził się, uczęszczał do gimnazjum i studiował w Królewcu.
- W roku 1885 obronił doktorat *Uber invariante Eigenschaften specieller binaren Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*. Promotorem był Lindemann (ten od przestępności liczby π).
- W latach 1886-1893 pracował w Królewcu (Privatdozent do 1892, profesor nadzwyczajny w 1893 i od 1893 profesor).
- W Królewcu poznał Hermana Minkowskiego i Adolfa Hurwitza.
- w 1895 przenosi się do Getyngi, gdzie pracuje do końca życia.
- W 1902 dostaje propozycje przejścia do Berlina, wykorzystuje to do ustanowienia przez Uniwersytet nowego stanowiska profesora matematyki (dla Minkowskiego).

Niezmienniki

Dane są dwa wielomiany tego samego stopnia (wielu zmiennych).

Kiedy jeden z nich może być przekształcony w drugi przez pewną zamianę zmiennych?

Dla klasy wielomianów równoważnych znaleźć ten, którego postać jest najprostsza.

Jakie wielkości związane z wielomianem pozostają niezmienne przy zamianie zmiennych?

Formy kwadratowe dwóch zmiennych $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ i grupa przekształceń

$$\tilde{x} = \alpha x + \beta y, \qquad \tilde{y} = \gamma x + \delta y.$$

Wtedy

$$\tilde{Q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{Q}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = Q(x, y),$$

gdzie

$$\tilde{Q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{a}\tilde{x}^2 + 2\tilde{b}\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{c}\tilde{y}^2.$$

Jak łatwo obliczyć,

$$\Delta = ac - b^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2\tilde{\Delta},$$

więc Δ jest niezmiennikiem.

Jeśli $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, to $\Delta = \tilde{\Delta}$.

Niezmienniki

Teorię zapoczatkowali Cayley i Sylvester (dla różnych grup przekształceń zmiennych).

Potem do głosu doszli Gordan i Clebsch – „królowie niezmienników".

Wykazali miedzy innymi, w jaki sposób dla dwóch zmiennych konstruować niezmienniki z pewnych najprostszych wyrażeń (czyli z bazy w zbiorze niezmienników). Dowód polegał na bardzo zawiłych rachunkach.

Lindemann postawił przed Hilbertem problem niezmienników dla większej liczby zmiennych.

Hilbert zdał sobie sprawę, że dla wiekszej liczby zmiennych rachunki będą nie do wykonania i zmienił podejście, dowodząc **Twiedzenia o bazie**, które brzmi tak:

Dla każdej liczby zmiennych n, w zbiorze niezmienników istnieje skończony zbiór generatorów, za pomocą którego można wypisać wszystkie niezmienniki.

I wysłał artykuł do *Mathematische Annalen*, do Felixa Kleina w Getyndze.

Hilbert nie obliczył w sposób jawny żadnego niezmiennika, ale korzystając z *prawa wyłączonego środka* wykazał, że taki skończony zbiór generatorów musi istnieć.

Reakcja specjalistów

Gordan podobno wykrzyknął:

Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie!

I zasugerował odrzucenie pracy z *Mathematische Annalen*. Ale Hilbert dowiedział się o tym od Hurwitza i napisał do Kleina list:

... I am not prepared to alter or delete anything, and regarding this paper, I say with all modesty, that this is my last word so long as no definite and irrefutable objection against my reasoning is raised.

Klein odpowiedział Hilbertowi: „I do not doubt that this is the most important work on general algebra that the Annalen has ever published."

Zahlbericht

Zahl = liczba, bericht = raport, sprawozdanie

Jeszcze w Królewcu Hilbert zaczął pracować nad Zahlbericht, dotyczącym algebraicznej teorii liczb. Ukończył pracę w 1897 roku, podsumowując wyniki Kummera, Kroneckera i Dedekinda (włączając mnóstwo własnych). W ten sposób ukierunkował rozwój tej teorii na kilkadziesiąt lat.

Potem zajął się geometrią. Zaczął systematyczne badania aksjomatyki geometrii euklidesowej i podał zbiór 21 aksjomatów. Zanalizował ich znaczenie, niezależność, zupełność, itd.

Była to najważniejsza praca w geometrii po Euklidesie i bardzo ważny krok na drodze do aksjomatyzacji całej matematyki.

Kongres w Paryżu w 1900 roku

Od 1896 roku co 4 lata odbywają siłę Międzynarodowe Kongresy Matematyków (International Congress of Mathematicians = ICM). Pierwszy był w Zurichu, w 1983(!) w Warszawie odbył się ICM 82, a ICM 2010 odbędzie się w Hyderabadzie.

W roku 1900 (ostatnim w XIX wieku) ICM odbył się w Paryżu.

Hilbert wygłosił tam mały (nieplenarny) wykład, w którym przedstawił listę 23 problemów. Według niego to najważniejsze zagadnienia matematyczne, nad którymi należy pracować w XX wieku.

Problemy Hilberta

http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_problems

Przestrzeń Hilberta

Zimą 1900-1901 roku na seminarium w Getyndze E. Holmgren opowiadał o wynikach Erika Fredholma dotyczących równań całkowych typu $x(s) - \int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt = f(s),\ 0 \leqslant s \leqslant 1.$ W języku analizy funkcjonalnej $x - Kx = f$.

Alternatywa Fredholma (już w języku przestrzeni Hilberta):

Jeśli operator liniowy ciągły $K : H \to H$ jest zwarty, to
albo
równanie niejednorodne $u - Ku = f$ ma dla każdego $f \in H$
dokładnie jedno rozwiązanie $u \in H$
albo
równanie jednorodne $u - Ku = 0$ ma niezerowe rozwiązanie $u \in H$.

Ta tematyka doprowadziła do badań operatorów (zwartych), określonych na przestrzeni Hilberta.

Atmosfera w Getyndze

Nad wejściem do czytelni umieszczony był napis: *Extra Göttingen non est vita*.

Gdy Poincare miał przyjechać do Getyngi i zapowiedział wykład o równaniach całkowych, pewien matematyk zapytał: „On chce **nam** opowiadać o równaniach całkowych?"

Dlaczego przyjęto E. Landaua na stanowisko profesora w Getyndze?

Pocztówki z matematykami.


Hilbert.

Intuicjonizm, aksjomatyzacja matematyki, zupełność itd.

Hilbert uważał, że przy dobrze dobranych aksjomatach można o każdym zdaniu w danej teorii (np. w geometrii, teorii liczb, itd) powiedzieć, czy jest twierdzeniem, czy też nie.

Twierdzeniem nazywamy zdanie, które za pomoca reguł logiki można skończonym ciągiem wnioskowań wyprowadzić z aksjomatów.

Intuicjoniści (pod wodzą L. E. J. Brouwera) sprzeciwiali się metodom niekonstruktywnym, w szczególności użyciu pewnika wyboru.

A Emil du Bois Reymond (zoolog, brat matematyka) powiedział

Ignoramus at ignorabimus,

sugerując ograniczone zdolności poznawcze człowieka.

Wykład w Królewcu

23 stycznia 1930 roku Hilbert ukończył 68 lat i formalnie przeszedł na emeryturę.

W dniu 8 września 1930 wygłosił na Uniwersytecie w Królewcu słynną mowę.

HilbertRadio.pdf

Zdjęcia z Getyngi.

Ignorabimus?

17 listopada 1930 roku w *Monatshefte für Mathematik und Physik* ukazała sie praca Kurta Gödla.