Lista przykładowych zadań na pierwsze kolokwium z AM2

1. Korzystając z kryterim porównawczego lub ilorazowego, zbadaj zbieżność całki niewłaściwej:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}, \qquad \int_5^\infty \frac{4+\cos x}{x^2-\sin x}\,dx.$$

Wskazówka: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} < \infty \iff a > 1.$

2. Korzystając z odpowiedniego kryterium, zbadaj zbieżność podanego szeregu liczbowego:

przykłady od 2.2 do 3.3 z listy zadań, Wskazówka: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a} < \infty \iff a > 1.$

3. Znajdź szereg Maclaurina podanej funkcji i określ jego przedział zbieżności (łącznie z badaniem zbieżności na końcach wyznaczonego przedziału)

$$\frac{x^2}{1-x^2}, \qquad x^3 e^{-x^2}, \qquad \sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

4. Korzystając z rozwinięcia Maclaurina, oblicz $f^{(35)}(0)$, gdy $f(x) = x^3 \cos x$.

Wskazówki do zadań 3 i 4:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^\infty t^n, \quad |t|<1, \qquad e^t = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}, \quad t \in (-\infty, \ \infty),$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad t \in (-\infty, \ \infty), \qquad \cos t = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in (-\infty, \ \infty).$$

5. Oblicz sumę szeregu liczbowego $\sum_{n=0}^\infty \frac{3n+1}{5^n}$.

****
PONIŻSZE ZADANIA BĘDĄ DOPIERO OMAWIANE NA ĆWICZENIACH
****

6. Napisz równanie tej płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y) = (3x-2y+5)^2$, która jest równoległa do płaszczyzny $Ax + By + Cz = D$ (tu będą konkretne liczby $A,\ B,\ C,\ D$).

7. Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = y - \frac{x^2}{y} + x$ w punkcie $(x_0, y_0) = (2,2)$ w kierunku wektora $\vec{v} = (-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5})$.

8. Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = xy + \ln x + y^2$ i sprawdź, czy to maksima, czy minima.