Studium Talent 2018, Lista 2

Zad. 1. Za pomocą indukcji matematycznej udowodnij następujące nierówności:
a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < 2^n$
b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant 4) \implies (2^n < n!)$

Zad. 2. Za pomocą indukcji matematycznej udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Zad. 3. Metodą indukcji matematycznej udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Zad. 4. Metodą indukcji matematycznej udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n oraz $q \neq 1$ prawdziwy jest wzór

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

A jaka jest suma po lewej stronie wzoru, gdy $q = 1$? Zauważmy, że wówczas prawa strona wzoru nie ma sensu.

Zad. 5. Wykaż indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór

$$1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Zad. 6. Wykaż, że ciąg określony rekurencyjnie: $a_0 = 1, \;\; a_{n+1} = 3a_n - 1$ wyraża sie wzorem ogólnym $a_n = \frac{3^n+1}{2}$.

Zad. 7. Uzasadnij (stosując indukcję), że każdą całkowitą kwotę pieniędzy począwszy od 4 złotych można odliczyć za pomocą dwuzłotówek i pięciozłotówek.

Zad. 8*. Twierdzenie. *Rysując na płaszczyźnie n prostych podzielimy płaszczyznę na nie więcej niż 2^n części.* Udowodnij to twierdzenie, stosując indukcję.

Zad. 9*. Obliczając sumę kątów w n-kącie wypukłym dla $n = 3, 4, 5, 6$, odgadnij wzór na sumę kątów w takim wielokącie, a następnie udowodnij prawdziwość tego wzoru za pomocą indukcji matematycznej.
Wskazówka: Każdy wielokąt wypukły mozna podzielić na trójkąty (rysując wszystkie przekątne, wychodzące z ustalonego wierzchołka). Figura jest **wypukła** jeśeli każde dwa punkty tej figury można połączyć odcinkiem, całkowicie zawartym w tej figurze.
Fakt. Każdy trójkąt jest wypukły. (Jak to udowodnić?)
Podaj przykład takiego wielokąta na płaszczyźnie, który nie jest wypukły.

Zad. 10. „Wszystkie dziewczęta mają ten sam kolor oczu” twierdzi Placek. Oto jego „dowód”: Dla $n = 1$ teza (ten sam kolor oczu) jest oczywista. Załóżmy więc, że teza zachodzi dla pewnego **ustalonego** n. Wykażemy, że jest ona prawdziwa także dla $n+1$. W tym celu rozważmy dowolny zbiór składający się z $(n+1)$ dziewcząt. Dla ustalenia uwagi nazwijmy dwie dziewczynki z tego zbioru Asią i Kasią. Rozważmy teraz zbiór tych dziewcząt z wyłączeniem Asi. Ponieważ składa się on z n dziewcząt, więc na mocy założenia wszystkie one mają ten sam kolor oczu. A teraz popatrzmy na zbiór n dziewcząt — z Asią włącznie, ale bez Kasi. Ponieważ wszystkie n dziewcząt ma, na mocy założenia, taki sam kolor oczu, więc Asia ma taki kolor oczu, jak pozostałe $(n-1)$ dziewcząt. Ale one miały taki kolor oczu, jak Ksia, zatem wszystkie $(n+1)$ dziewcząt ma ten sam kolor oczu!

A jednak wiemy, że to nieprawda. Znajdź błąd w rozumowaniu Placka.