

Studium Talent 2018, Lista 3

Zad. 1. Wykaż, że dla wszystkich ściśle dodatnich a_1, a_2, a_3, a_4 zachodzą nierówności:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2},$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4},$$

$$\sqrt{a_1 a_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}.$$

Zad. 2. Wykaż za pomocą indukcji, że dla wszystkich liczb naturalnych postaci 2^n i wszystkich ściśle dodatnich $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2^n}$ zachodzi nierówność:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n}}{2^n} \geq \sqrt[2^n]{a_1 a_2 \dots a_{2^n}}.$$

Zad. 3. Samochód przejechał trasę z miejscowości A do B ze średnią prędkością 60 km/h oraz z B do A ze średnią prędkością 40 km/h. Oblicz średnią prędkość tego samochodu na trasie $A \rightarrow B \rightarrow A$.

Uwaga: odpowiedzią NIE jest średnia arytmetyczna, tzn. liczba $\frac{60+40}{2} = 50$. Aby zrozumieć bez obliczeń, że średnia arytmetyczna to ZŁA odpowiedź, wystarczy wstawić prędkość z B do A równą ZERO (samochód nie wrócił do A!). Skoro nie wrócił, to średnia prędkość z A do B do A jest równa zero. Średnia arytmetyczna daje zaś $(60 + 0)/2 = 30$. Absurd.

Zad. 4. Rozwiąż zadanie 3 w przypadku ogólnym tzn. gdy średnia z A do B wyniosła v_1 km/h, a z B do A v_2 km/h.

Zad. 5. Na osi Ox płaszczyzny Oxy mamy dwa odcinki: jeden ma długość a , natomiast drugi b . Dla ustalenia uwagi powiedzmy, że mamy odcinki $[0, a]$ oraz $[a, a + b]$. Ze środka odcinka $[0, a + b]$ zataczamy półokrąg (leżący powyżej osi Ox) o promieniu $\frac{a+b}{2}$, po czym rysujemy linię równoległą do osi Oy , przechodzącą przez punkt $(0, a)$. Oblicz długość odcinka tej linii, leżącego pomiędzy Ox a półokręgiem.

Uwaga: Do rozwiązania potrzebne jest TYLKO twierdzenie Pitagorasa i umiejętność rozwiązania łatwego układu dwóch równań.

Zad. 6*. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = 2$.

Zad. 7*. Przeprowadź obliczenia (analogiczne do tych z wykładu) wykazujące, że pierwiastkiem równania $x^3 + px + q = 0$ jest liczba

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Zad. 8. Oblicz:

a) $(2 + i)(3 - 2i)$, b) $(5 + 2i)(5 - 2i)$, c) $(3 + 2i)^2 - (3 - 2i)^2$, d) $(1 - i\sqrt{2})^3$.