

Studium Talent 2018, Lista 4

Zad. 0. (tzw. „paradoks urodzinowy”)

W sali zebrało się losowo wybranych 30 osób. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia *wśród tych 30 osób są co najmniej dwie, obchodzące urodziny w tym samym dniu.*

Dla uproszczenia zakładamy, że nie ma lat przestępnych, czyli każdy rok ma 365 dni.

Podaj wzór ogólny, tzn. gdy w sali jest n osób.

Wsk. 1. Łatwiej obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: *każda z tych 30 osób obchodzi urodziny w innym dniu roku.*

Wsk. 2. Jeśli dla $n = 30$ rachunki wydają Ci się zbyt skomplikowane, spróbuj najpierw obliczyć to dla 2 lub 3 osób, a potem uogólnij swoje rozumowanie.

Zad. 1. Oblicz:

a) $(2 + i)(3 - 2i)$, b) $(5 + 2i)(5 - 2i)$, c) $(3 + 2i)^2 - (3 - 2i)^2$, d) $(1 - i\sqrt{2})^3$.

Zad. 2. Wykonaj dzielenia:

a) $\frac{1 + i}{1 - i}$, b) $\frac{11 + 3i}{2 + i}$, c) $\frac{-11 + 7i}{2 + 6i}$, d) $\frac{3 + 2i}{-1 + 3i}$.

Zad. 3. Wiedząc, że $a, b \in \mathbb{R}$, oblicz część rzeczywistą i część urojoną liczby:

a) $i(a + bi)$, b) $(a + bi)^2$, c) $(a + bi)(ai + b)$, d) $(a + bi)^3$.

Zad. 4. Oblicz: a) $\sqrt{8 + 6i}$, b) $\sqrt{5 - 12i}$, c) \sqrt{i} .

Zad. 5. W liczbach zespolonych rozwiąż równania:

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$, b) $2z^2 + 2z + 1 = 0$, c) $z^2 - 8iz = 25$, d) $z + \frac{1}{z} = 1$.

Zad. 6. Wiedząc, że $i^2 = -1$, oblicz i^n dla $n = 3, 4, 5, 6, 7$ i 8 . Co zauważasz? Jakie wartości może przyjąć suma

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 4, \dots?$$

Zad. 7. Wykonaj działanie $(1 + i)^4$. Wykorzystując ten wynik, podaj trzy pozostałe pierwiastki czwartego stopnia z liczby -4 .

Zad. 8. (Cardano, *Ars Magna*, 1545)

Podziel liczbę 10 na dwie tak, aby ich iloczyn był równy 40.

Zad. 9. Rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych równanie $z^2 + (1 + 3i)z - 2 + 2i = 0$.

Zad. 10. Pamiętając, że gdy $z = x + iy$, to $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych równania:

a) $|z| + z = 3 + 4i$, b) $4z^2 + 8|z|^2 = 8$.