Studium Talent 2018, lista 5

Zamieszczony pomiędzy Listą 4 a Listą 5 plik *Wykresy-sin-cos.pdf* zawiera wykresy funkcji $y = \sin\alpha$ oraz $y = \cos\alpha$. Porównując oba wykresy zauważyć można, że dla wszystkich kątów α zachodzą następujące równości:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Zad. 1. Korzystając z powyższych tożsamości, z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ oraz z podanej na wykładzie równości $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, wyprowadź tożsamości:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Podaj wzór na $\sin(\alpha - \beta)$.

Zad. 2. Wyprowadź wzór na cosinus sumy kątów, korzystając z powyższych tożsamości i kontynuując rachunek:

$$\cos(\alpha+\beta) = \sin(90^\circ + \alpha + \beta) = \sin((90^\circ + \alpha) + \beta) = ...$$

Podaj wzór na $\cos(\alpha - \beta)$.

Zad. 3. Korzystając z narysowanego na wykładzie „koła trygonometrycznego" oraz wartości funkcji trygonometrycznych kątów 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów:

$$120^\circ, \quad 135^\circ, \quad 150^\circ, \quad 180^\circ, \quad 210^\circ, \quad 225^\circ, \quad 270^\circ, \quad 330^\circ, \quad -30^\circ, \quad -45^\circ, \quad -60^\circ, \quad -90^\circ.$$

Zad. 4. Pamietając, że jeśli $z = x + iy$, przy czym $x^2 + y^2 > 0$, to moduł liczby z jest równy $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a argument α to taki kąt, dla którego $\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, oblicz moduły i argumenty główne podanych liczb zespolonych:

$$7, \quad -5, \quad i, \quad -3i, \quad 1+i, \quad 1-i, \quad -1+i, \quad -1-i, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad \sqrt{3} - i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zad. 5. Korzystając z (obliczonej w poprzednim zadaniu) postaci trygonometrycznej liczby $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ oblicz z^{12} oraz z^{1200}.

Zad. 6. Korzystając ze wzoru de Moivre'a, wykonaj potęgowania:
a) $(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{44}$, b) $(\cos 15^\circ - i\sin 15^\circ)^{18}$, c)* $(\sin 15^\circ - i\cos 15^\circ)^{18}$.
Uwaga: Jaki jest argument liczby w przykładzie b)? To NIE jest 15°.
Na pierwszy rzut oka wydaje się, że liczba w przykładzie c) jest dana w postaci trygonometrycznej. To nieprawda! Trzeba ją dopiero przedstawić w postaci trygonometrycznej.

Zad. 7. Korzystając ze wzoru $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ i ze wzoru de Moivre'a, wyraź $\cos(4\alpha)$ i $\sin(4\alpha)$ za pomocą $\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$.

Zad. 8. Oblicz i narysuj na płaszczyźnie zespolonej wszystkie pierwiastki (a jest ich tyle, ile wynosi stopień pierwiastka):
a) $\sqrt[4]{8i}$, b) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$, c) $\sqrt[6]{-27}$.

Zad. 9. Każde z poniższych równań ma tyle pierwiastków, ile wynosi jego stopień. Oblicz te wszystkie pierwiastki i zaznacz je na płaszczyźnie zespolonej:
a) $z^3 = i$, b) $z^4 = (1+i)^4$, c) $z^6 = (1+2i)^{12}$.

Uwaga: równanie $(z-1)^4 = 0$ też ma 4 pierwiastki, gdy liczymy je z ich krotnościami, tutaj liczba 1 jest pierwiastkiem czterokrotnym, podobnie jak równanie $(x+2)(x-1)^2 = 0$ ma 3 pierwiastki: pojedynczy -2 oraz podwójny 1.