Studium Talent 2018, Lista 6

Zad. 1. Niech z, z_1, z_2 będą liczbami zespolonymi. Uzasadnij równości:
a) $\text{Re}\,(z_1+z_2) = \text{Re}\,z_1 + \text{Re}\,z_2$, b) $\text{Im}\,(z_1+z_2) = \text{Im}\,z_1 + \text{Im}\,z_2$,
c) $\text{Re}\,(iz) = -\,\text{Im}\,(z)$, d) $\text{Im}\,(iz) = \text{Re}\,(z)$.

Zad. 2. Opisz algebraicznie lub wskaż na rysunku zbiór tych $z \in \mathbb{C}$, które spełniają warunek:
a) $\text{Re}\,(z)$ - $3\,\text{Im}\,(z) = 2$, b) $\text{Re}\,(iz) \geqslant 1$, c) $\text{Im}\,(z^2) = (2-i)z$.

Zad. 3. Wykaż, że:
a) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, c) $z + \overline{z} = 2\,\text{Re}\,(z)$, d) $z - \overline{z} = 2\,i\,\text{Im}\,(z)$.

Zad. 4. Udowodnij, że
a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, b)* $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Zad. 5. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:
a) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+3-4i| = 5\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |iz+2| < 3\}$,
c) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |\overline{z}+2-i| \leqslant |z|\}$,
d) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 3|z-1| \leqslant |z^2-1| \leqslant 6|z+1|\}$.

Zad. 6. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:
a) $\arg(-z) = 2\pi/3$, b) $\arg(\overline{z}) = 3\pi/4$, c) $\arg(-\overline{z}) \geqslant \pi/2$.

Oto przykładowe rozwiązanie zad.1 a). Podobnie można rozwiązać zadania 2, 3 oraz 4.
Mamy wykazać, że dla wszystkich z_1, z_2 zachodzi równość $\text{Re}\,(z_1+z_2) = \text{Re}\,z_1 + \text{Re}\,z_2$. Pamiętamy, że gdy $z = a+bi$, to $\text{Re}\,(z) = a$, natomiast $\text{Im}\,(z) = b$.
Oznaczmy $z_1 = a_1 + b_1 i$ oraz $z_2 = a_2 + b_2 i$. Musimy wyrazić $\text{Re}\,(z_1+z_2)$ za pomocą $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

skąd odczytujemy, że $\text{Re}\,(z_1+z_2) = a_1 + a_2$. Oczywiście $\text{Re}\,z_1 = a_1$, a $\text{Re}\,z_2 = a_2$ co kończy dowód a).

Zad. 7. Narysuj okrąg jednostkowy ze środkiem w punkcie (0,0). Niech t będzie długością łuku okręgu, łuku, który zaczyna się w punkcie $(1,0)$ i kończy w punkcie (x,y), leżącym na okręgu. Pamiętaj, że obrót w stronę dodatnią (czyli $t > 0$) oznacza obrót w kierunku przeciwnym do obrotu wskazówek zegara.
Ze wzoru na długość okręgu wnioskujemy, że $t = 2\pi$ odpowiada pełnemu obrotowi w stronę dodatnią.
Oblicz długości t łuków, odpowiadające obrotowi o:
a) $180°$, b) $90°$, c) $30°$, d) $45°$, e) $60°$, f) $120°$, g) $150°$, h) $135°$, i) $-180°$, j) $-90°$, k) $-225°$, l) $540°$.

Obliczone długości łuków to miary tych kątów w radianach.

Zad. 8. Wiedząc, że $0°$ to zero radianów, a $360°$ to 2π radianów i korzystając z proporcji, wyraź w stopniach kątowych następujące kąty, których miary podane w radianach są równe:
a) $\frac{\pi}{3}$, b) $\frac{\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{6}$, d) $\frac{2\pi}{3}$, e) $\frac{-\pi}{4}$, f) $\frac{7\pi}{6}$, g) -9π.

Zad. 9. Wiedząc, że taki punkt na okręgu jednostkowym, który jest końcem łuku o początku w (1,0) i końcu w (x,y), ma współrzędne $x = \cos t$, $y = \sin t$, podaj, które z funkcji $\sin t$, $\cos t$ $\text{tg}\,t$ oraz $\text{ctg}\,t$ są dodatnie w zależności od tego, w której ćwiartce układu leży koniec łuku o długości t. Innymi słowy, dokończ „wierszyk trygonometryczny”:

W pierwszej ćwiartce wszystkie (funkcje trygonometryczne) są dodatnie
W drugiej...
W trzeciej...
A w czwartej ...