Studium Talent 2018, Lista 7

Zad. 1*. Jak sprawiedliwie podzielić tort pomiędzy 3 osoby? A pomiędzy $n \geqslant 3$ osób? „Sprawiedliwie” tzn. tak, aby nikt spośród obdzielonych nie mógł mieć pretensji, że dostał zbyt mało.

Zad. 2*. Szachownicę 8x8 można łatwo pokryć za pomocą 32 kostek domina, każda kostka w rozmiarze 2 sąsiednich pól szachownicy. Wytnijmy z tej szachownicy 2 narożne pola, leżące na jednej z przekątnych. Wykaż, że takiej szachodnicy o 62 polach NIE MOŻNA pokryć za pomocą 31 kostek domina.

Zad. 3*. (ciąg Fibonacciego) Niech $f_1 = f_2 = 1$, a dla $n > 1$ zachodzi równość $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Dostajemy kolejno liczby: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
Zakładając, że liczby spełniające powyższe warunki są postaci λ^n, znajdź analityczny wzór opisujący liczbę f_n.

Zad. 4*. Wykaż, że f_n, n-ty wyraz ciągu Fibonacciego jest związany ze współczynnikami dwumianowymi wzorem

$$f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + ...,$$

gdzie przyjmujemy $\binom{n}{k} = 0$, gdy $n < k$.

Wskazówka: może zadziała indukcja matematyczna?

Zad. 5***. Problem Collatza z roku 1937, do dziś nierozwiązany. Może kiedyś ktoś z Państwa go rozwiąże ...

Weźmy dowolną liczbę naturalną n. Jeśli jest parzysta, to dzielimy ją przez 2. Jeśli nieparzysta, to tworzymy liczbę $3n + 1$. Potem powtarzamy te czynności z kolejno otrzymanymi liczbami do momentu, w którym uzyskamy liczbę 1. Jeśli nigdy nie otrzymamy 1, to proces będzie trwał w nieskończoność. Collatz wysnuł przypuszczenie, że proces zawsze się skończy, tzn. zawsze w końcu dojdziemy do liczby 1.

Oto kilka przykładów zastosowania powyższego przepisu:
$2 \longrightarrow 1$ stop
$3 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 16 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$ stop
$7 \longrightarrow 22 \longrightarrow 11 \longrightarrow 34 \longrightarrow 17 \longrightarrow 48 \longrightarrow 24 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3$, a dla 3 już wiemy (rachunek powyżej)

Gdy zaczniemy od liczby 27, to potrzeba aż 111 kroków do osiągnięcia liczby 1.

Od 2010 roku wiadomo, że jest tak, jak przypuszczał Collatz dla $n < 20 \times 2^{58} \approx 5.764 \times 10^{18}$.