Studium Talent 2018, Lista 8

Zad. 1. Dany jest odcinek długości $a > 0$. Skonstruuj odcinki długości: $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[8]{a}$, $\sqrt[16]{a}$.

Zad. 2. Dany jest fragment pewnego ciągu. Podaj wzór, jakim można opisać wyrazy tego ciągu, np. dla ciagu $(1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, ...)$ takim wzorem może być $a_n = 2n - 1$, $n = 1, 2, 3, 4, ...$

a) $(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, ...)$, b) $(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ ...)$ c) $(1,\ 4,\ 27,\ 256, ...)$

Zad. 3. Zbadaj monotoniczność (dla $n \geqslant n_0$) ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = n^2 - n$, b) $b_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$, c) $c_n = n^{100} - n^{50} + 1$, d) $d_n = \sqrt[n]{2^n + 1}$.

Zad. 4. Badając ilorazy $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ wykaż, że ciąg $f_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ jest malejący.
Wskazówka: Naśladuj przeprowadzony na wykładzie dowód dla ciagu $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; skorzystaj z nierówności Bernoulliego.

Zad. 5. Zbadaj ograniczoność (z dołu, z góry) ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \sqrt[n]{5}$, b) $\dfrac{n}{n^2 + 1}$, c) $c_n = (-2)^n$, d) $d_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

Zad. 6*. Czy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$ jest ograniczony z góry? Innymi słowy: czy wraz ze wzrostem n suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$ rośnie do nieskończoności czy też nie? Odpowiedź na to pytanie znana była w Europie już w XIV wieku.

Zad. 7. Korzystając z arytmetyki ciągów, oblicz granice ciągów o wyrazie ogólnym:

a) $\dfrac{n^2 - 3n^3}{n^3 + 1}$, b) $\dfrac{(n+1)\sqrt[3]{8n^3 + 1}}{n\sqrt{n^2 + 1}}$, c) $\left(\dfrac{2^n - 1}{3^n + 1}\right)^5$, d) $\dfrac{\sqrt{4^n + 1}}{\sqrt[3]{8^n + 1}}$.

Zad. 8. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, oblicz:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$, b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{n^3 + n^2 + 1}$, c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor \sqrt{2}\, n \rfloor}{n}$, d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$.

Zad. 9. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, wykaż, że:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

oraz (co jest duuużo trudniejsze)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{4^n+2}} + \frac{2^2}{\sqrt{4^n+2^2}} + \frac{2^3}{\sqrt{4^n+2^3}} + ... + \frac{2^n}{\sqrt{4^n+2^n}} \right) = 2.$$

Zad. 10. Dla każdego ciągu a_n dążącego do nieskończoności, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$. Wykorzystując ten fakt, oblicz granice podanych ciagów:

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n+2}\right)^{3n}$, b) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$, c) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}}$, d) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right)^n$.

Zad. 11. Dla $n \geqslant 6$ niech K_n oznacza długość najkrótszej, a D_n długość najdłuższej przekątnej n-kąta foremnego o boku długości 1. Oblicz granice $\lim_{n\to\infty} K_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} D_n$.
Wsk. Jaki jest promień okręgu, w który można wpisać n-kąt foremny o boku 1?