Studium Talent 2018, Lista 9

Zad. 1. Wzorując się na przykładzie ciągu $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, omówionym dokładnie na wykładzie, sprawdź, że ciąg określony rekurencyjnie wzorem $b_1 = \sqrt{6}$, $b_{n+1} = \sqrt{6 + b_n}$ jest rosnący i ograniczony z góry. Oblicz jego granicę.

Zad. 2. Stosując rozumowania, pokazane na wykładzie, oblicz sumy częściowe podanych szeregów nieskończonych i znajdź granice obliczonych sum:

a) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

b) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + ... + \frac{1}{n(n+3)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$,

c) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

d) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + ... + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$, e) $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + ... + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Zad. 3. Zbadaj czy podany szereg jest zbieżny:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

W niektórych podpunktach poniższych zadań warto korzystać z twierdzenia: *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$.*

Zad. 4. Korzystając z kryterium porównawczego, zbadaj czy podany szereg jest zbieżny:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n^2-1}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^n+4^n}$,

e) $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(n+1)!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$, f) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Zad. 5. Korzystając z kryterium ilorazowego, zbadaj czy podany szereg jest zbieżny:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5n-2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)^3}{(n^2+n)^5}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

Zad. 6. Korzystając z kryterium d'Alemberta, zbadaj czy podany szereg jest zbieżny:

a) d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Zad. 7. Korzystając z kryterium Leibniza, sprawdź, że podany szereg jest zbieżny:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+10}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n^2-1)}{n^3+1}$.

Zad.8. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ jest zbieżny?

Zad.9. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^4}}{n^2}$ jest zbieżny?