Błądzenie losowe i cztery najważniejsze twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa

Tomasz Żak

26 IV 2012

Elementarne zadanie z ciekawymi wnioskami

Często już na początku nauki „Rachunku” rozważa się następujące zadanie:

Pijany osobnik stoi o krok od przepaści, przy czym jego kolejne kroki są niezależne i zwrócone w kierunku przepaści z prawdopodobieństwem p lub w kierunku przeciwnym z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Oblicz prawdopodobieństwo przeżycia tego biedaka.

Elementarne zadanie z ciekawymi wnioskami

Mniej(?) makabryczne zastosowania: gramy z przeciwnikiem dysponującym nieograniczonym kapitałem (kasyno, bank, świat), przy czym po każdej naszej operacji wygrywamy pewną stawkę z prawdopodobieństwem p lub przegrywamy ją z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Interesujące pytania:

- Jakie jest prawdopodobieństwo naszej ruiny?

Elementarne zadanie z ciekawymi wnioskami

Mniej(?) makabryczne zastosowania: gramy z przeciwnikiem dysponującym nieograniczonym kapitałem (kasyno, bank, świat), przy czym po każdej naszej operacji wygrywamy pewną stawkę z prawdopodobieństwem p lub przegrywamy ją z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Interesujące pytania:

- Jakie jest prawdopodobieństwo naszej ruiny?
- Jeśli jeden, to jak długo potrwa ta gra?

Elementarne zadanie z ciekawymi wnioskami

Mniej(?) makabryczne zastosowania: gramy z przeciwnikiem dysponującym nieograniczonym kapitałem (kasyno, bank, świat), przy czym po każdej naszej operacji wygrywamy pewną stawkę z prawdopodobieństwem p lub przegrywamy ją z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Interesujące pytania:

- Jakie jest prawdopodobieństwo naszej ruiny?
- Jeśli jeden, to jak długo potrwa ta gra?
- Jakie może być maksimum naszej wygranej (podać jego rozkład).

Elementarne zadanie z ciekawymi wnioskami

Mniej(?) makabryczne zastosowania: gramy z przeciwnikiem dysponującym nieograniczonym kapitałem (kasyno, bank, świat), przy czym po każdej naszej operacji wygrywamy pewną stawkę z prawdopodobieństwem p lub przegrywamy ją z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Interesujące pytania:

- Jakie jest prawdopodobieństwo naszej ruiny?
- Jeśli jeden, to jak długo potrwa ta gra?
- Jakie może być maksimum naszej wygranej (podać jego rozkład).
- Kiedy takie maksimum może być osiągnięte czyli: kiedy przestać grać?

Elementarne zadanie z ciekawymi wnioskami

Mniej(?) makabryczne zastosowania: gramy z przeciwnikiem dysponującym nieograniczonym kapitałem (kasyno, bank, świat), przy czym po każdej naszej operacji wygrywamy pewną stawkę z prawdopodobieństwem p lub przegrywamy ją z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Interesujące pytania:

- Jakie jest prawdopodobieństwo naszej ruiny?
- Jeśli jeden, to jak długo potrwa ta gra?
- Jakie może być maksimum naszej wygranej (podać jego rozkład).
- Kiedy takie maksimum może być osiągnięte czyli: kiedy przestać grać?
- L.Dubins, L.Savage: *How to gamble if you must*, McGraw-Hill, 1965

Elementarne zadanie z ciekawymi wnioskami

Mniej(?) makabryczne zastosowania: gramy z przeciwnikiem dysponującym nieograniczonym kapitałem (kasyno, bank, świat), przy czym po każdej naszej operacji wygrywamy pewną stawkę z prawdopodobieństwem p lub przegrywamy ją z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Interesujące pytania:

- Jakie jest prawdopodobieństwo naszej ruiny?
- Jeśli jeden, to jak długo potrwa ta gra?
- Jakie może być maksimum naszej wygranej (podać jego rozkład).
- Kiedy takie maksimum może być osiągnięte czyli: kiedy przestać grać?
- L.Dubins, L.Savage: *How to gamble if you must*, McGraw-Hill, 1965
- Mamy \$20 i chcemy w kasynie wygrać dalsze \$20. Czy grać na „kolor” raz za \$20, czy po \$1 aż wygramy 20?

Ogólniejsze błądzenie losowe

Przypuśćmy, że kolejne kroki $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w $\mathbb{R}^d$ i rozważmy **spacer losowy**:

$$S_0 = x_0, \;\; S_1 = x_0 + X_1, \; S_2 = x_0 + X_1 + X_2, \; \ldots, \; S_n = x_0 + X_1 + \ldots + X_n.$$

Taki proces nazywa się spacerem losowym lub błądzeniem losowym (random walk, marche aleatoire).
Co potrafimy powiedzieć o własnościach tego procesu losowego (stochastycznego)?
W szczególności chcemy poznać rozkład po n krokach i odpowiedzić na 4 zadane poprzednio pytania.

Zadanie o 20 dolarach

$P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, bo każda gra daje lub zabiera mi jedną złotówkę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Jeśli chcę wygrać w ten sposób 20 dolarów to modelem może być błądzenie $S_n = 20 + X_1 + ... + X_n$, a zadanie sformułowane w tym języku brzmi:

Z jaki prawdopodobieństwem, startując z poziomu 20 dolarów, osiągnę 40 dolarów ZANIM osiągnę 0 (zero), bo w takim przypadku nie będę miał już co postawić (zbankrutuję) i to zakończy grę?

Historia problemu

27 lipca 1905 roku w 72. numerze *Nature* ukazał się następujący list Karla Pearsona:

The problem of the random walk

Can any of your readers refer me to a work wherein I should find a solution of the following problem, or failing the knowledge of any existing solution provide me with an original one? I should be extremely grateful for aid in the matter.

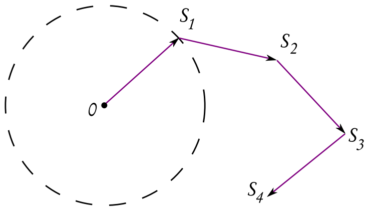
A man starts from a point O and walks l yards in a straight line; he then turns through any angle whatever and walks another l yards in a second straight line. He repeats this process n times. I require the probability that after n of these stretches he is at a distance between r and $r + \delta r$ from his starting point, O.

The problem is one of considerable interest, but I have only succeeded in obtaining an integrated solution for two stretches. I think, however, that a solution ought to be found, if only in the form of a series of powers of r/n, when n is large.

KARL PEARSON.
The Gables, East Ilsley, Berks.

Ogólne matematyczne sformułowanie problemu Pearsona

Niech $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, jednostajnym na sferze o promieniu l w $\mathbb{R}^d$. Znaleźć rozkład sumy $S_n = X_1 + ... + X_n$.



Przypadek dwóch kroków na płaszczyźnie

Uproszczenia: obie zmienne mają rozkład niezmienniczy na obroty, więc ich suma też ma tę własność.

Załóżmy $l = 1$ i obliczmy dystrybuantę rozkładu normy $X_1 + X_2$, gdzie oba wektory są niezależne i maja jednakowy rozkład, jednostajny na okręgu jednostkowym.

Dwa kroki na płaszczyźnie

Korzystamy ze wzoru cosinusów:

$$P(|X_1+X_2|^2 < t^2) = P(|X_1|^2+|X_2|^2+2|X_1||X_2|\cos\angle(X_1,X_2) < t^2) =$$

$$P(2+2\cos\angle(X_1,X_2) < t^2),$$

skąd dla $0 < t < 2$ otrzymujemy

$$P(|S_2| < t) = \frac{1}{\pi}\arccos\left(1-\frac{t^2}{2}\right).$$

Jak wygląda ta dystrybuanta? Gęstość dla $0 < t < 2$ dana jest wzorem $\frac{2}{\pi\sqrt{4-t^2}}$.
Czy tak samo można liczyć dla trzech kroków?

Odpowiedź Rayleigha

W następnym (!) zeszycie tego samego numeru *Nature* (z dnia 3 sierpnia 1905) ukazała się odpowiedź:

The problem of the random walk

This problem, proposed by Prof. Karl Pearson in the current number of NATURE, is the same as that of the composition of n iso-periodic vibrations of unit amplitude and of phases distributed at random, considered in *Phil. Mag.*, x., p. 73, 1880; xlvii., p. 246, 1899; ('Scientific Papers', i., p. 491, iv., p. 370).

If n be very great, the probability sought is

$$\frac{2}{n} e^{-r^2/n} r\,dr.$$

Probably methods similar to those employed in the papers referred to would avail for the development of an approximate expression applicable when n is only moderately great.

RAYLEIGH.
Terling Place, July 29.

W **następnym tygodniu** w kolejnym zeszycie *Nature* (z dnia 10 sierpnia 1905) ukazał się kolejny list Pearsona:

The problem of the random walk

I have to thank several correspondents for assistance in this matter. Mr G.J. Bennett finds that my case $n = 3$ can really be solved by elliptic integrals, and, of course, Lord Rayleigh's solution for n very large is most valuable, and may very probably suffice for the purposes I have immediately in view. I ought to have known it, but my reading of late years has drifted into other channels, and one does not expect to find the first stage in a biometric problem provided in a memoir on sound. From the purely mathematical standpoint, it would still be very interesting to have a solution for n comparatively small. The sections through the axis of Lord Rayleigh's frequency surface for large n are simply the 'cocked hat' or normal curve of errors type; for $n = 2$ or 3 they do not resemble this form at all. For $n = 2$, for example, the sections are of the form of a double U, thus UU, the whole being symmetrical about the centre vertical corresponding to $r = 0$, but each U itself being asymmetrical. The system has three vertical asymptotes. It would be interesting to see how the multiplicity of types for small n passes over into the normal curve of errors type when n is made large.

The lesson of Lord Rayleigh's solution is that in open country the most probable place of finding a drunken man who is at all capable of keeping on his feet is somewhere near his starting point.

KARL PEARSON.

Skąd takie pytanie?

Brytyjski lekarz sir Ronald Ross (1857-1932) zajmował się malarią. Wykazał, że malarię roznoszą komary, miedzy innymi za to w roku 1902 otrzymał Nagrodę Nobla z medycyny.

Szczególnie malaria zaczęła się rozprzestrzeniać na Półwyspie Malajskim (wówczas brytyjskim) po wycieciu dużych połaci tamtejszej dżungli. Notabene dżunglę wycięto, by sadzić drzewa kauczukowe, nasiona ktorych wykradziono z Brazylii, co przyczyniło się do upadku części gospodarki brazylijskiej (np. miasta Manaus).

Skąd takie pytanie?

W liście do Pearsona z dnia 24 lipca 1905 roku Ross pytał:

„if mosquitoes could wander in all directions, what would be the mathematical function of the numbers who died at a distance from the point”?

Stąd list Pearsona opublikowany w *Nature*, który to list **ukazał się drukiem** 27 lipca 1905.

Tempo druku w początku XX wieku

Kolejne listy datowane są następująco:

- Ross do Pearsona 24 lipca 1905

Tempo druku w początku XX wieku

Kolejne listy datowane są następująco:

- Ross do Pearsona 24 lipca 1905
- Pierwszy list Pearsona ukazał się w *Nature* 27 lipca 1905

Tempo druku w początku XX wieku

Kolejne listy datowane są następująco:

- Ross do Pearsona 24 lipca 1905
- Pierwszy list Pearsona ukazał się w *Nature* 27 lipca 1905
- Odpowiedź Rayleigha w *Nature* 3 sierpnia 1905

Tempo druku w początku XX wieku

Kolejne listy datowane są następująco:

- Ross do Pearsona 24 lipca 1905
- Pierwszy list Pearsona ukazał się w *Nature* 27 lipca 1905
- Odpowiedź Rayleigha w *Nature* 3 sierpnia 1905
- Drugi list Pearsona w *Nature* 10 sierpnia 1905

Błądzenie po $\mathbb{Z}$ na prostej

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przyjmującymi tylko dwie wartości: $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Suma

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

ma „przesunięty rozkład Bernoulliego”, tzn.

$$P(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ n.$$

Badanie subtelnych własności takich rozkładów doprowadziło do odkrycia Prawa Wielkich Liczb, Centralnego Twierdzenia Granicznego, Prawa Iterowanego Logarytmu oraz Prawa Arcusa Sinusa — czterech najważniejszych twierdzeń klasycznego rachunku prawdopodobieństwa.

Ogromne uproszczenie: $\mathbb{R}$ i kroki tylko ± 1

Rozważmy symetryczne błądzenie losowe na prostej z niezależnymi krokami o długości ± 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Naturalne pytania:

- Czy powrócimy kiedykolwiek do punktu wyjścia?

Ogromne uproszczenie: $\mathbb{R}$ i kroki tylko ± 1

Rozważmy symetryczne błądzenie losowe na prostej z niezależnymi krokami o długości ± 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Naturalne pytania:

- Czy powrócimy kiedykolwiek do punktu wyjścia?
- Jeśli TAK, to jak długo to potrwa?

Ogromne uproszczenie: $\mathbb{R}$ i kroki tylko ± 1

Rozważmy symetryczne błądzenie losowe na prostej z niezależnymi krokami o długości ± 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Naturalne pytania:

- Czy powrócimy kiedykolwiek do punktu wyjścia?
- Jeśli TAK, to jak długo to potrwa?
- Jak daleko mamy realne szanse dojść w n krokach? Oczywiście nie do n. A czy do $n/2$?

Ogromne uproszczenie: $\mathbb{R}$ i kroki tylko ± 1

Rozważmy symetryczne błądzenie losowe na prostej z niezależnymi krokami o długości ± 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Naturalne pytania:

- Czy powrócimy kiedykolwiek do punktu wyjścia?
- Jeśli TAK, to jak długo to potrwa?
- Jak daleko mamy realne szanse dojść w n krokach? Oczywiście nie do n. A czy do $n/2$?
- Jeśli umówię się na 1000 partii „orła i reszki”, to ile czasu będę prowadził? Połowę gier czyli 500 rzutów?

Ogromne uproszczenie: $\mathbb{R}$ i kroki tylko ± 1

Rozważmy symetryczne błądzenie losowe na prostej z niezależnymi krokami o długości ± 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Naturalne pytania:

- Czy powrócimy kiedykolwiek do punktu wyjścia?
- Jeśli TAK, to jak długo to potrwa?
- Jak daleko mamy realne szanse dojść w n krokach? Oczywiście nie do n. A czy do $n/2$?
- Jeśli umówię się na 1000 partii „orła i reszki”, to ile czasu będę prowadził? Połowę gier czyli 500 rzutów?
- Jak często prowadzenie będzie się zmieniać?

Twierdzenie o głosowaniu

Przypuśćmy, że na kandydata A oddano p głosów, a na B oddano q głosów, przy czym $p > q$. Wszystkie kartki są w urnie. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia:

podczas liczenia głosów kandydat A będzie cały czas prowadził, tzn. na niego zawsze będzie więcej głosów niż na B?

Twierdzenie o głosowaniu

Podstawowe pytania:

- Na ile sposobów można wyjąć kartki z urny?

Podstawowe pytania:

- Na ile sposobów można wyjąć kartki z urny?
- Ile tych sposobów sprzyja ciągłemu prowadzeniu A?

Twierdzenie o głosowaniu

Podstawowe pytania:

- Na ile sposobów można wyjąć kartki z urny?
- Ile tych sposobów sprzyja ciągłemu prowadzeniu A?
- Może łatwiej liczyć dopełnienie?

- Liczba sposobów wyciągnięcia kartek z urny to liczba dróg z $(0{,}0)$ do $(p+q, p-q)$.

Twierdzenie o głosowaniu

- Liczba sposobów wyciągnięcia kartek z urny to liczba dróg z (0,0) do $(p+q, p-q)$.
- Liczba „złych” dla A głosów $=$ liczba dróg, które ...

Zasada odbicia

Liczba „złych” dla A głosów $=$ liczba tych dróg z (0,0) do $(p+q, p-q)$, które dotykają lub przecinają oś OX.

Jest ich tyle, ile jest wszystkich dróg ...

Twierdzenie o głosowaniu

Odpowiedź:

P(A cały czas będzie prowadził)$= \frac{p-q}{p+q}$

Mówi o tym Prawo Iterowanego Logarytmu:

Z prawdopodobieństwem jeden:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1$$

Co to znaczy?

Umawiamy się na pewną liczbę gier w orła i reszkę, np. 100, 1000 lub, ogólnie, $2n$ (parzystość jest tu wygodna).

Niech $p_{2k,2n}$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że podczas $2n$ gier będę prowadził przez $2k$ gier (nie ma remisów, co widać na wykresie drogi).

Jak układają się liczby $p_{2k,2n}$, k=0,1,2,...,n/2?

Gdzie jest ich maksimum, a gdzie minimum?

Prawo Arcusa Sinusa

Dla ustalonego $2n$ największymi liczbami w ciągu $(p_{2k,2n})$ są liczby SKRAJNE tzn.

$$p_{0,2n} \quad \text{oraz} \quad p_{2n,2n},$$

a najmniejszymi — środkowe.

Na przykład przy $n = 10$ prawdopodobieństwo tego, że mniej szczęśliwy gracz nigdy nie będzie prowadził jest równe 0,3524. Z prawdopodobieństwem 0,5379 łączny zysk mniej szczęśliwego gracza będzie dodatni tylko jeden raz! A rezultat $10 : 10$ ma prawdopodobieństwo 0,0606.

Prawo Arcusa Sinusa

Skąd nazwa prawa?

$$p_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k} \binom{2n-2k}{n-k} 2^{-2(n-k)} =$$

$$\frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}},$$

więc dla dużych n i dla $0 < \alpha < 1$

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \alpha n \rfloor} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \approx \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\pi} \arcsin\sqrt{\alpha}.$$

Staję w kolejce do kasy, jako np. dziesiąty. Gdy w końcu jestem obsługiwany, za mną nie stoi nikt, albo jedna-dwie osoby. Mam pecha?

Co odkrył Sparre-Andersen w latach 50-tych XX wieku?

Kolejki równoległe

Przypuśćmy, że w sklepie są dwie kasy. Zajmuję miejsce w kolejce do jednej z nich, choć mogłem i do tej drugiej. Z ciekawości obserwuję pana, który zajął w drugiej kolejce miejsce, które mogłem zająć ja. Co pewien czas każdy z nas przesuwa się o jedno miejsce.

Czy będę kiedyś prowadził? Czy będę obsłużony przed tym panem?

Prześladowanie przez pech

Badając własności fluktuacji losowych dowiemy się, że:

- Z prawdopodobieństwem 1 kiedyś wyprzedzę tego pana (gdyby kolejka była nieskończona ...)

Prześladowanie przez pech

Badając własności fluktuacji losowych dowiemy się, że:

- Z prawdopodobieństwem 1 kiedyś wyprzedzę tego pana (gdyby kolejka była nieskończona ...)
- Jednak średni czas oczekiwania na to zdarzenie jest nieskończony.

Prześladowanie przez pech

Badając własności fluktuacji losowych dowiemy się, że:

- Z prawdopodobieństwem 1 kiedyś wyprzedzę tego pana (gdyby kolejka była nieskończona ...)
- Jednak średni czas oczekiwania na to zdarzenie jest nieskończony.
- Ale mam pecha!

Prześladowanie przez pech

Badając własności fluktuacji losowych dowiemy się, że:

- Z prawdopodobieństwem 1 kiedyś wyprzedzę tego pana (gdyby kolejka była nieskończona ...)
- Jednak średni czas oczekiwania na to zdarzenie jest nieskończony.
- Ale mam pecha!
- Najbardziej denerwujące jest to, że ten pan argumentuje tak samo jak ja ...

Znaczne uproszczenie: $\mathbb{R}^2$ i kroki tylko równoległe do osi

W roku 1921 G. Polya rozwiązał następujące zadanie:

Na płaszczyźnie startujemy z (0,0) i dajemy kroki jednostkowe, ale tylko równoległe do osi układu. Każdy z czterech możliwych kroków ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{4}$.
Analogiczne zadanie rozważa się w przestrzeni i ogólnie w $\mathbb{R}^d$ (wówczas jest $2d$ możliwych kroków).

Jakie jest prawdopodobieństwo powrotu do punktu wyjścia?

Twierdzenie (G.Polya, 1921)

Na płaszczyźnie z prawdopodobieństwem 1 wrócimy do punktu wyjścia,

w $\mathbb{R}^3$ już tylko z prawdopodobieństwem około 0,35.

A jak jest w wyższych wymiarach?

Czy wszystkie drogi prowadzą do Rzymu?

A czy na płaszczyźnie odwiedzimy każdy punkt, jeśli błądzenie będzie trwało nieskończenie długo? Tzn. czy wszystkie drogi prowadzą do Rzymu?

Jeśli będą dwa niezależne błądzenia, to jakie jest prawdopodobieństwo ich spotkania?

A jak jest w przypadku błądzenia niesymetrycznego?

Nie zmniejszymy ogólności rozważań, gdy założymy, że

- długość kroku $l = 1$,

Znowu kroki w dowolnym kierunku - problem Pearsona

Nie zmniejszymy ogólności rozważań, gdy założymy, że

- długość kroku $l = 1$,
- startujemy z poczatku układu współrzędnych.

Sploty

Niech $X_1, \ldots$ mają jednakowy rozkład jednostajny na sferze w $\mathbb{R}^d$. Oznaczmy ten rozkład przez σ_d. Jest to miara unormowana, na przykład na okręgu jednostkowym $d\sigma_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}\, d\theta$.

Oczywiście rozkład sumy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ dany jest przez splot tych miar $\sigma_d^{*n} = \sigma_d * \sigma_d * \ldots * \sigma_d$.
Zauważmy, że miara σ_d jest skupiona na sferze, czyli w $\mathbb{R}^d$ jest singularna względem miary Lebesgue'a. A czy sploty są singularne?

Dla wszystkich n jest to miara niezmiennicza na obroty, zatem wygodnie rozważać ją we współrzędnych sferycznych (r, s), gdzie $0 < r < \infty$, a $s \in S_1^{d-1}$.

Transformata Fouriera miary σ_d

Niech $t \in \mathbb{R}^d$. Przechodząc do współrzędnych sferycznych, otrzymujemy

$$\widehat{\sigma_d}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle}\, d\sigma_d(x) = \int_{S_1^{d-1}} e^{i\langle t,s\rangle}\, d\sigma_d(s) =$$

$$\int_{S_1^{d-1}} e^{i|t|\langle \frac{t}{|t|},s\rangle}\, d\sigma_d(s) = \ldots = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{2}{|t|}\right)^{d/2-1} J_{d/2-1}(|t|),$$

gdzie

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{z^2}{4})^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}.$$

jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju.

Absolutna ciągłość splotów

Ponieważ

$$\widehat{\sigma_d}(t) = \Gamma(d/2)\left(\frac{2}{|t|}\right)^{d/2-1} J_{d/2-1}(|t|),$$

a dla $t \to \infty$ znane jest asymptotyczne zachowanie funkcji Bessela:

$$J_\nu(|t|) \ \sim \ \sqrt{\frac{2}{\pi|t|}} \cos\left(|t| - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right),$$

więc dla $n > d+2$ funkcja $(\widehat{\sigma_d}(t))^n$ jest całkowalna. Stąd wynika, że sploty σ_d^{*n} są absolutnie ciągłe.

Niech $f_n(x)$ oznacza gęstość miary σ_d^{*n} względem miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^d$.

Rachunki dokładne

Oczywiście, na mocy odwrotnej transformaty Fouriera, mamy wzór

$$f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,t\rangle} \left(\Gamma(d/2) \left(\frac{2}{|t|} \right)^{d/2-1} J_{d/2-1}(|t|) \right)^n dt.$$

Jeszcze w roku 1905 G.J. Bennett wykazał, że dla $d = 2$ i $n = 3$ to jest pewna funkcja nieelementarna (całka eliptyczna). Prawdopodobnie tak jest dla większości par $d, \; n$.

A ponieważ funkcje Bessela oscylują, więc trudno z tego wzoru otrzymać dokładne oszacowania funkcji f_n.

Nasze zadanie

Na mocy wielowymiarowego CTG mamy zbieżność rozkładów:

$$\mathcal{L}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N(0, K),$$

gdzie K jest macierzą kowariancji rozkładu X_1 (czyli miary σ_d).

Zadanie: Jak gęstości f_n zbiegają do granicznej gęstości gaussowskiej?

Nasze zadanie

Dokładniej:
Niech g będzie funkcją całkowalną względem miary granicznej $N(0,K)$, a Y wektorem losowym o rozkładzie $N(0,K)$.
Czy prawdą jest, że

$$\mathbb{E}g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \mathbb{E}g(Y) \ ?$$

Twierdzenie: (P. Graczyk, J-J. Loeb, TŻ)
Ustalmy d. Istnieje stała C_d zależna tylko od wymiaru przestrzeni, taka, że dla wszystkich $n > d + 2$ i $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi oszacowanie

$$f_n(x) \leqslant C_d \left(\frac{d}{2\pi n}\right)^{d/2} e^{-\frac{d|x|^2}{2n}}.$$

Wtedy zachodzi także

$$\mathbb{E}g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \mathbb{E}g(Y).$$

Tematyka ciągle żywa

Niedawno udowodniono (Pinelis 1994, Bobkov-Goetze-Houdre 2001) istnienie stałej uniwersalnej $C > 0$ takiej, że dla (X_i) niezależnych, $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, o ile tylko $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, to dla każdego $t > 0$

$$P\left(|\sum_{i=1}^n a_i X_i| > t\right) \leqslant CP(|g| > t),$$

gdzie $g \sim N(0,1)$.

Czy analogiczna nierówność jest prawdziwa dla (X_i) o rozkładzie jednostajnym na sferze?
A dla innych rozkładów? Np. jednostajny na kuli?

Wspomniane twierdzenie (G-L-Ż) mówi, że TAK, o ile $a_1 = a_2 = ... = a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Rozważmy symetryczne błądzenie losowe po $\mathbb{Z}$, ale przy warunku $\{S_1 > 0,\ S_2 > 0, \dots,\ S_n > 0\}$ tzn. z prawdopodobieństwami przejścia

$$p_{ij} = P(S_k = i,\ S_{k+1} = j\ | S_1 > 0,\ S_2 > 0, \dots,\ S_n > 0)$$

i niech $n \to \infty$. Jaki proces otrzymamy?

Tematyka ciągle żywa

Inne warunkowania, np. startując z $k_0 > 0$ błądzenie dotrze do poziomu $M > k_0$ wcześniej niż do poziomu 0.

Ruch Browna jako przypadek graniczny błądzenia symetrycznego (zasada niezmienniczości Donskera)