Egzamin dla Studium Talent, 6 lutego 2018

Imię i nazwisko, numer PESEL $\longrightarrow$

Zad.1. a) Uprość wyrażenie $\dfrac{(1+i)^{12}}{(\sqrt{3}+i)^3}$ i przedstaw je w postaci $a+bi$, $a,b,\in\mathbb{R}$. b) Korzystając z wyniku punktu a), oblicz wszystkie 3 pierwiastki równania $z^3=\dfrac{(1+i)^{12}}{(\sqrt{3}+i)^3}$.

Zad.2. Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich $a,\ b,\ c,\ d$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}.$$

Zad.3. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej zbiór tych z, które spełniają nierówność $|\overline{z}+2-i|\leqslant 2$.

Zad.4. Wykorzystując indukcję matematyczną udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór

$$1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Zad.5. Oblicz granice ciągów: a) $a_n=\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$, b) $b_n=\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}}+...+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$.

Zad.6. Zbadaj zbieżność szeregów: a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+100}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

Zad.7*. Wykaż, że prawdziwa jest poniższa równość:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+...+\frac{1}{200}.$$