Analiza Matematyczna I

Lista 7

Zad. 1. Posługując się rachunkiem całkowym wykazać, że

- a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2;$
- b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{4n++5k}=\frac{38}{3}.$

Zad. 2. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na przedziale $[-a,a]$, $a>0$. Dowieść, że

- a) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, gdy f jest funkcją nieparzystą;
- b) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy f jest funkcją parzystą.

Skorzystać z tych faktów przy obliczaniu całek

- a) $\int\limits_{-1}^{1}\ln\left(\frac{4}{2+x^5}-1\right)\,\mathrm{d}x;$
- b) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin|x|e^{\cos x}\,\mathrm{d}x.$

Zad. 3. Obliczyć wartość średnią funkcji f na podanym przedziale. W jakim punkcie przedziału jest ona osiągana ?

- a) $f(x)=\ln x$, $[1,e]$;
- b) $g(x)=\operatorname{tg} x$, $[0,\frac{\pi}{4}]$.

Zad. 4. Załóżmy, że funkcja f jest wypukła i ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$. Dowieść, że wartość średnia $f(\xi)$ tej funkcji spełnia następujacą podwójną nierówność

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le f(\xi)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Jak wygląda analogiczna nierówność dla funkcji wklęsłej?

Zad. 5. Wyznaczyć funkcję górnej granicy całkowania

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

dla funkcji f i punktu c, jeśli

- a) $f(x) = 1$ dla $x \le 0$ i $f(x) = 1 + x$ dla $x > 0$, $c = -1$;
- b) $f(x) = |x - 1|$, dla $c = 0$ i dla $c = 1$.

Zad. 6. Niech f będzie funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ jest parzysta, gdy f jest nieparzysta oraz nieparzysta, gdy f jest parzysta.

Zad. 7. Znaleźć ekstrema lokalne i przedzia1y monotoniczności funkcji

- a) $f(x) = \int_0^x \sin^{19} t\,\mathrm{d}t$, $-2\pi \le x \le 2\pi$;
- b) $f(x) = \int_{-1}^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$.

Zad. 8. Obliczyć pole płaskiego obszaru normalnego ograniczonego podanymi krzywymi

- a) $y = x^n$, $x = y^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$;
- b) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$;
- c) $x = 1 - y^2$, $x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

Zad. 9. Obliczyć długość łuku krzywej γ, jeśli

- a) $\gamma : y = \ln(1 - x^2)$, $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$;
- b) $\gamma(t) = ((t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t)$, $0 \le t \le \pi$;
- c) $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $0 \le t \le 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$;
- d) $\gamma(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$, $0 \le t \le 1$.

Zad. 10. Niech ρ i ϕ będę współrzednymi biegunowymi na płaszczyźnie i niech krzywa płaska γ zadana będzie we współrzędnych biegunowych warunkiem $\rho = f(\phi)$, $\alpha \le \phi \le \beta$, gdzie f jest funkcją mającą ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha, \beta]$. Pokazać, że długość łuku krzywej γ jest dana wzorem

$$L(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(t) + (f'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Zastosować otrzymany wzór do obliczenia długości krzywych zadanych warunkami

- a) $\gamma_1 : \rho = a(1 - \cos\phi)$, $a > 0$;
- b) $\gamma_2 : \rho = a\phi$, $2n\pi \leq \phi \leq 2(n+1)\pi$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 11. Obliczyć objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót podanej krzywej wokół osi OX

- a) $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}$, $0 \leq x \leq \pi$;
- b) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Zad. 12. Obliczyć pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej przez obrót podanej krzywej wokół osi OX

- a) $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
- b) $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$ pomiędzy punktami przecięcia z osiami współrzędnych.