Analiza Matematyczna I

Zadania dodatkowe

Zad. 1. Niech $\lim_{n\to+\infty} x_n = g$ dla pewnego skończonego g. Udowodnić, że także
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} = g.$$

Zad. 2. Czy powyższe zadanie jest prawdziwe dla $g = \pm\infty$?

Zad. 3. Załóżmy, że $\limsup a_n > -\infty$ i $\limsup_{n\to+\infty} b_n > -\infty$. Udowodnić, że
$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Podać przykład ciągów (a_n) i (b_n), dla których zachodzi powyżej ostra nierówność. Sformułować analogiczną własność dla granic dolnych.

Zad. 4. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie okreslona następująco. Jeśli $x \notin \mathbb{Q}$, to $f(x) = 0$. Jeśli $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ i $\frac{p}{q}$ jest nieskracalnym ułamkiem, to $f(x) = \frac{1}{q}$. Wykazać, że f jest funkcją ciągłą w punktach niewymiernych i nieciągłą w punktach wymiernych.

Zad. 5. Załózmy, że f jest funkcją różniczkowaną na przedziale $[a, b]$, tzn. f ma pochodną $f'(x)$ dla każdego $a < x < b$ i pochodne jednostronne $f'_+(a)$, $f'_-(b)$. Wykazać, że pochodna f' ma własność Darboux, tzn. przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy $f'_+(a)$ i $f'_-(b)$. Wskazówka: najpierw rozważyć funkcję h różniczkowalną na $[a, b]$, dla której $h'_+(x) < 0 < h'_-(b)$ i wykazać, że istnieje $c \in (a, b)$, dla kórego $h(c) = 0$.

Zad. 6. Załóżmy, że funkcja f ma pochodną f''' w pewnym otoczeniu punktu x_0, pochodna ta jest ciągła w punkcie x_0 i $f'''(x_0) \neq 0$. Udowodnić, ze współczynik θ we wzorze Taylora $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0 + \theta h)$ zmierza do $\frac{1}{3}$ jak $h \to 0$.

Zad. 7. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, +\infty)$ oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że $|f'(x)| \leq C$ dla każdego $x \in [a, +\infty)$. Dowieść, że jeśli całka $\int_a^\infty f(x)\, dx$ jest zbieżna bezwględnie, to $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Zad. 8. Załóżmy, że funkcja f jest monotoniczna na przedziale $[a, +\infty)$ i całka $\int_a^\infty f(x)\, dx$ jest zbieżna. Dowieść, że $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Pokazać na przykładzie, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Zad. 9. Niech $I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, ze $I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ dla $n \geq 2$, gdzie $n!!$ jest iloczynem kolejnych liczb naturalnych z krokiem 2 do n, tzn. np. $8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$.

Zad. 10. Skorzystać z kryterium porównawczego i sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych

- a) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$;
- b) $\int\limits_1^\infty \sqrt{x} \sin^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$;
- c) $\int\limits_1^\infty \sqrt{x} \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$;
- d) $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

Zad. 11. Skorzystać z kryterium ilorazowego i sprawdzić zbieżność następujących całek niewłaściwych:

- a) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;
- b) $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;
- c) $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.