Dyskretna transformata Hilberta

Mateusz Kwaśnicki

Politechnika Wrocławska

mateusz.kwasnicki@pwr.edu.pl

Będlewo, 23 maja 2018

Transformaty Hilberta

Definicja

Ciągła transformata Hilberta to operator

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-z)}{z}\,dz$$

na przestrzeni funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Transformaty Hilberta

Definicja

Ciągła transformata Hilberta to operator

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-z)}{z}\,dz$$

na przestrzeni funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definicja

Dyskretna transformata Hilberta to operator

$$\mathcal{H}a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{a_{n-k}}{k}$$

na przestrzeni podwójnie nieskończonych ciągów $(a_n : n \in \mathbb{Z})$.

Główne twierdzenie

Twierdzenie (R. Bañuelos, MK)

Dla $p \in (1, \infty)$ zachodzi równość

$$\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|H\|_{L^p \to L^p}.$$

Główne twierdzenie

Twierdzenie (R. Bañuelos, MK)

Dla $p \in (1, \infty)$ zachodzi równość

$$\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|H\|_{L^p \to L^p}.$$

- Operator został wprowadzony przez D. Hilberta, zaś problem pochodzi od E.C. Titchmarsha i M. Riesza.

Główne twierdzenie

Twierdzenie (R. Bañuelos, MK)

Dla $p \in (1, \infty)$ zachodzi równość

$$\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|H\|_{L^p \to L^p}.$$

- Operator został wprowadzony przez D. Hilberta, zaś problem pochodzi od E.C. Titchmarsha i M. Riesza.
- $\|H\|_{L^p \to L^p} = \max\{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2p}), \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2p})\}$ (S. Pichorides, 1972).

Główne twierdzenie

Twierdzenie (R. Bañuelos, MK)

Dla $p \in (1, \infty)$ zachodzi równość

$$\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|H\|_{L^p \to L^p}.$$

- Operator został wprowadzony przez D. Hilberta, zaś problem pochodzi od E.C. Titchmarsha i M. Riesza.
- $\|H\|_{L^p \to L^p} = \max\{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2p}), \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2p})\}$ (S. Pichorides, 1972).
- Trudniejsze zadanie: wyznaczenie normy operatora

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{k + 1/2}$$

pozostaje otwartym problemem.

Będlewo

- O problemie dowiedziałem się w czasie konferencji Probability and Analysis w Będlewie (15–19 maja 2017).

Będlewo

- O problemie dowiedziałem się w czasie konferencji Probability and Analysis w Będlewie (15–19 maja 2017).
- Do rozmowy przy ognisku i piwie zaprosili mnie wtedy Rodrigo Bañuelos i Eero Saksman.

Będlewo

- O problemie dowiedziałem się w czasie konferencji Probability and Analysis w Będlewie (15–19 maja 2017).
- Do rozmowy przy ognisku i piwie zaprosili mnie wtedy Rodrigo Bañuelos i Eero Saksman.
- Czasem warto nie wiedzieć, że dany problem jest uznawany za trudny.

Ciągła transformata Hilberta

- Operator

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}\,dy$$

jest mnożnikiem Fourierowskim: $\widehat{Hf} = \hat{H} \cdot \hat{f}$, gdzie

$$\hat{H}(\xi) = -i\,\mathrm{sign}\,\xi.$$

Ciągła transformata Hilberta

- Operator

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}\,dy$$

jest mnożnikiem Fourierowskim: $\widehat{Hf} = \hat{H}\cdot\hat{f}$, gdzie

$$\hat{H}(\xi) = -i\,\mathrm{sign}\,\xi.$$

- $H : L^2 \to L^2$ jest operatorem unitarnym (D. Hilbert, 1905)

Ciągła transformata Hilberta

- Operator

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}\,dy$$

  jest mnożnikiem Fourierowskim: $\widehat{Hf} = \hat{H} \cdot \hat{f}$, gdzie

$$\hat{H}(\xi) = -i\,\mathrm{sign}\,\xi.$$

- $H : L^2 \to L^2$ jest operatorem unitarnym (D. Hilbert, 1905)
- $\|H\|_{L^p \to L^p} < \infty$ dla $p \in (1, \infty)$ (M. Riesz, 1928)

Ciągła transformata Hilberta

- Operator
$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}\,dy$$
jest mnożnikiem Fourierowskim: $\widehat{Hf} = \hat{H} \cdot \hat{f}$, gdzie
$$\hat{H}(\xi) = -i\,\mathrm{sign}\,\xi.$$
- $H : L^2 \to L^2$ jest operatorem unitarnym (D. Hilbert, 1905)
- $\|H\|_{L^p \to L^p} < \infty$ dla $p \in (1, \infty)$ (M. Riesz, 1928)
- $\|H\|_{L^p \to L^p} = \max\{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2p}), \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2p})\}$ (S. Pichorides, 1972)

Dyskretne transformaty Hilberta

- Jest kilka wariantów dyskretnej transformaty Hilberta, każdy z nich jest mnożnikiem Fourierowskim:

operator | symbol $(t \in [-\pi, \pi))$

$$\mathcal{H} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i(1 - |t|/\pi) \operatorname{sign} t;$$

Dyskretne transformaty Hilberta

- Jest kilka wariantów dyskretnej transformaty Hilberta, każdy z nich jest mnożnikiem Fourierowskim:

operator		symbol $(t \in [-\pi, \pi))$
$\mathcal{H} a_n = \dfrac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \dfrac{a_{n-k}}{k}$	$\leftrightsquigarrow$	$-i(1 - \lvert t \rvert / \pi) \operatorname{sign} t;$
$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \dfrac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dfrac{a_{n-k}}{k + 1/2}$	$\leftrightsquigarrow$	$-i e^{it/2} \operatorname{sign} t;$

Dyskretne transformaty Hilberta

- Jest kilka wariantów dyskretnej transformaty Hilberta, każdy z nich jest mnożnikiem Fourierowskim:

operator | symbol $(t \in [-\pi, \pi))$

$$\mathcal{H} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i(1 - |t|/\pi) \operatorname{sign} t;$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{k + 1/2} \quad \leftrightsquigarrow \quad -ie^{it/2} \operatorname{sign} t;$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i \operatorname{sign} t;$$

Dyskretne transformaty Hilberta

- Jest kilka wariantów dyskretnej transformaty Hilberta, każdy z nich jest mnożnikiem Fourierowskim:

operator		symbol ($t \in [-\pi, \pi)$)
$\mathcal{H} a_n = \dfrac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \dfrac{a_{n-k}}{k}$	$\leftrightsquigarrow$	$-i(1 - \lvert t \rvert / \pi) \operatorname{sign} t$;
$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \dfrac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dfrac{a_{n-k}}{k + 1/2}$	$\leftrightsquigarrow$	$-i e^{it/2} \operatorname{sign} t$;
$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = \dfrac{2}{\pi} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \dfrac{a_{n-k}}{k}$	$\leftrightsquigarrow$	$-i \operatorname{sign} t$;
$\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}} a_n = \dfrac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dfrac{k\, a_{n-k}}{k^2 - 1/4}$	$\leftrightsquigarrow$	$-i \cos(t/2) \operatorname{sign} t$.

Historia w skrócie

W dalszej części zawsze $p \in (1, \infty)$.

- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} \geqslant \|H\|_{L^p \to L^p}$ (E.C. Titchmarsh, 1926)

Historia w skrócie

W dalszej części zawsze $p \in (1, \infty)$.

- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} \geqslant \|H\|_{L^p \to L^p}$ (E.C. Titchmarsh, 1926)
- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} < \infty$ (M. Riesz, 1927; E.C. Titchmarsh, 1926)

Historia w skrócie

W dalszej części zawsze $p \in (1, \infty)$.

- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} \geqslant \|H\|_{L^p \to L^p}$ (E.C. Titchmarsh, 1926)
- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} < \infty$ (M. Riesz, 1927; E.C. Titchmarsh, 1926)
- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|H\|_{L^p \to L^p}$ gdy $p = 2^k$ lub $p = \frac{2^k}{2^k - 1}$, gdzie $k = 1, 2, \ldots$ (I.E. Verbitsky; E. Laeng, 2007)

Historia w skrócie

W dalszej części zawsze $p \in (1, \infty)$.

- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} \geqslant \|H\|_{L^p \to L^p}$ (E.C. Titchmarsh, 1926)
- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} < \infty$ (M. Riesz, 1927; E.C. Titchmarsh, 1926)
- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|H\|_{L^p \to L^p}$ gdy $p = 2^k$ lub $p = \frac{2^k}{2^k - 1}$, gdzie $k = 1, 2, \ldots$ (I.E. Verbitsky; E. Laeng, 2007)
- $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|H\|_{L^p \to L^p}$ dla dowolnego p (R. Bañuelos, MK)

Aproksymacja ciągłej transformaty Hilberta

- Ciągłą transformatę H można aproksymować za pomocą transformaty dyskretnej $\mathcal{H}$.

Aproksymacja ciągłej transformaty Hilberta

- Ciągłą transformatę H można aproksymować za pomocą transformaty dyskretnej $\mathcal{H}$.
- Ściślej: jeśli f jest odpowiednio regularna i $\delta \to 0^+$, to

$$\delta^{-1}\mathcal{H}[f(\delta n)] - [Hf(n\delta)] \to 0$$

w odpowiedniej normie.

Aproksymacja ciągłej transformaty Hilberta

- Ciągłą transformatę H można aproksymować za pomocą transformaty dyskretnej $\mathcal{H}$.
- Ściślej: jeśli f jest odpowiednio regularna i $\delta \to 0^+$, to

$$\delta^{-1}\mathcal{H}[f(\delta n)] - [Hf(n\delta)] \to 0$$

  w odpowiedniej normie.
- W szczególności $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} \geqslant \|H\|_{L^p \to L^p}$.

Aproksymacja ciągłej transformaty Hilberta

- Ciągłą transformatę H można aproksymować za pomocą transformaty dyskretnej $\mathcal{H}$.
- Ściślej: jeśli f jest odpowiednio regularna i $\delta \to 0^+$, to
$$\delta^{-1}\mathcal{H}[f(\delta n)] - [Hf(n\delta)] \to 0$$
w odpowiedniej normie.
- W szczególności $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} \geqslant \|H\|_{L^p \to L^p}$.
- To samo można powiedzieć o $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$.

Aproksymacja ciągłej transformaty Hilberta

- Ciągłą transformatę H można aproksymować za pomocą transformaty dyskretnej $\mathcal{H}$.
- Ściślej: jeśli f jest odpowiednio regularna i $\delta \to 0^+$, to

$$\delta^{-1}\mathcal{H}[f(\delta n)] - [Hf(n\delta)] \to 0$$

  w odpowiedniej normie.
- W szczególności $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} \geqslant \|H\|_{L^p \to L^p}$.
- To samo można powiedzieć o $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$.
- Powyższy argument podał E.C. Titchmarsh w 1926, wraz z błędnym dowodem równości norm.

Riesz–Titchmarsh $\leftrightsquigarrow$ Kak–Hilbert

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{k + 1/2} \quad \leftrightsquigarrow \quad -ie^{it/2} \operatorname{sign} t$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i \operatorname{sign} t$$

Riesz–Titchmarsh $\leftrightsquigarrow$ Kak–Hilbert

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{k + 1/2} \quad \leftrightsquigarrow \quad -ie^{it/2} \operatorname{sign} t$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i \operatorname{sign} t$$

- Operatory $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ są równoważne:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = b_n \iff \begin{cases} \mathcal{H}_{\mathrm{RT}}[a_{2n}] = [b_{2n+1}], \\ \mathcal{H}_{\mathrm{RT}}[a_{2n-1}] = [b_{2n}]. \end{cases}$$

Riesz–Titchmarsh $\leftrightsquigarrow$ Kak–Hilbert

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{k + 1/2} \quad \leftrightsquigarrow \quad -ie^{it/2} \operatorname{sign} t$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i \operatorname{sign} t$$

- Operatory $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ są równoważne:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = b_n \iff \begin{cases} \mathcal{H}_{\mathrm{RT}}[a_{2n}] = [b_{2n+1}], \\ \mathcal{H}_{\mathrm{RT}}[a_{2n-1}] = [b_{2n}]. \end{cases}$$

- W szczególności $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|\mathcal{H}_{\mathrm{K}}\|_{\ell^p \to \ell^p}$.

Riesz–Titchmarsh $\rightsquigarrow$ Arcozzi–Domelevo–Petermichl

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{k + 1/2} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad -ie^{it/2} \operatorname{sign} t$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k\, a_{n-k}}{k^2 - 1/4} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad -i \cos(t/2) \operatorname{sign} t$$

Riesz–Titchmarsh $\rightsquigarrow$ Arcozzi–Domelevo–Petermichl

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{k + 1/2} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad -ie^{it/2} \operatorname{sign} t$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k\, a_{n-k}}{k^2 - 1/4} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad -i \cos(t/2) \operatorname{sign} t$$

- Operator $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$ wyraża się przez operator $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}} a_n = \tfrac{1}{2} \bigl(\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n + \mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_{n-1} \bigr).$$

Riesz–Titchmarsh $\rightsquigarrow$ Arcozzi–Domelevo–Petermichl

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{k + 1/2} \quad \leftrightsquigarrow \quad -ie^{it/2} \operatorname{sign} t$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k\, a_{n-k}}{k^2 - 1/4} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i \cos(t/2) \operatorname{sign} t$$

- Operator $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$ wyraża się przez operator $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$:
$$\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}} a_n = \tfrac{1}{2}\big(\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n + \mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_{n-1}\big).$$
- W szczególności $\|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p \to \ell^p} \leqslant \|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p \to \ell^p}$.

Kak–Hilbert $\rightsquigarrow$ Hilbert

$$\mathcal{H} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i(1 - |t|/\pi) \operatorname{sign} t$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i \operatorname{sign} t$$

Kak–Hilbert $\rightsquigarrow$ Hilbert

$$\mathcal{H} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i(1 - |t|/\pi) \operatorname{sign} t$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i \operatorname{sign} t$$

- Operator $\mathcal{H}$ wyraża się przez operator $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$:

$$\mathcal{H} a_n = \frac{1}{2} \mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{1}{k^2} \mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_{n-k}.$$

Kak–Hilbert $\rightsquigarrow$ Hilbert

$$\mathcal{H} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i(1 - |t|/\pi) \operatorname{sign} t$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{a_{n-k}}{k} \quad \leftrightsquigarrow \quad -i \operatorname{sign} t$$

- Operator $\mathcal{H}$ wyraża się przez operator $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$:

$$\mathcal{H} a_n = \frac{1}{2} \mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_n + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{1}{k^2} \mathcal{H}_{\mathrm{K}} a_{n-k}.$$

- W szczególności $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} \leqslant \|\mathcal{H}_{\mathrm{K}}\|_{\ell^p \to \ell^p}$.

Która dyskretyzacja jest właściwa?

$$\|H\|_{L^p\to L^p} \leqslant \left\{ \begin{array}{c} \|\mathcal{H}\|_{\ell^p\to\ell^p} \\ \|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p\to\ell^p} \end{array} \right\} \leqslant \|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p\to\ell^p} = \|\mathcal{H}_{\mathrm{K}}\|_{\ell^p\to\ell^p}.$$

Która dyskretyzacja jest właściwa?

$$\|H\|_{L^p\to L^p} \leqslant \left\{ \begin{matrix} \|\mathcal{H}\|_{\ell^p\to\ell^p} \\ \|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p\to\ell^p} \end{matrix} \right\} \leqslant \|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p\to\ell^p} = \|\mathcal{H}_{\mathrm{K}}\|_{\ell^p\to\ell^p}.$$

- $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$ są kontrakcjami na ℓ^2.

Która dyskretyzacja jest właściwa?

$$\|H\|_{L^p\to L^p} \leqslant \left\{ \begin{matrix} \|\mathcal{H}\|_{\ell^p\to\ell^p} \\ \|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p\to\ell^p} \end{matrix} \right\} \leqslant \|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p\to\ell^p} = \|\mathcal{H}_{\mathrm{K}}\|_{\ell^p\to\ell^p}.$$

- $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$ są kontrakcjami na ℓ^2.
- Tylko $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ są operatorami unitarnymi na ℓ^2.

Która dyskretyzacja jest właściwa?

$$\|H\|_{L^p\to L^p} \leqslant \left\{\begin{matrix} \|\mathcal{H}\|_{\ell^p\to\ell^p} \\ \|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p\to\ell^p} \end{matrix}\right\} \leqslant \|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p\to\ell^p} = \|\mathcal{H}_{\mathrm{K}}\|_{\ell^p\to\ell^p}.$$

- $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$ są kontrakcjami na ℓ^2.
- Tylko $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ są operatorami unitarnymi na ℓ^2.
- Równość $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p\to\ell^p} = \|H\|_{L^p\to L^p}$ jest ogólniejsza i ciekawsza od równości $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p\to\ell^p} = \|H\|_{L^p\to L^p}$.

Która dyskretyzacja jest właściwa?

$$\|H\|_{L^p\to L^p} \leqslant \left\{ \begin{matrix} \|\mathcal{H}\|_{\ell^p\to\ell^p} \\ \|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p\to\ell^p} \end{matrix} \right\} \leqslant \|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p\to\ell^p} = \|\mathcal{H}_{\mathrm{K}}\|_{\ell^p\to\ell^p}.$$

- $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$ są kontrakcjami na ℓ^2.
- Tylko $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ są operatorami unitarnymi na ℓ^2.
- Równość $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p\to\ell^p} = \|H\|_{L^p\to L^p}$ jest ogólniejsza i ciekawsza od równości $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p\to\ell^p} = \|H\|_{L^p\to L^p}$.
- Nasza metoda nie stosuje się do $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$.

Która dyskretyzacja jest właściwa?

$$\|H\|_{L^p \to L^p} \leqslant \left\{ \begin{matrix} \|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} \\ \|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p \to \ell^p} \end{matrix} \right\} \leqslant \|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|\mathcal{H}_{\mathrm{K}}\|_{\ell^p \to \ell^p}.$$

- $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$ są kontrakcjami na ℓ^2.
- Tylko $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ są operatorami unitarnymi na ℓ^2.
- Równość $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|H\|_{L^p \to L^p}$ jest ogólniejsza i ciekawsza od równości $\|\mathcal{H}\|_{\ell^p \to \ell^p} = \|H\|_{L^p \to L^p}$.
- Nasza metoda nie stosuje się do $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$.
- Nasz rezultat jest prawdopodobnie drugim wynikiem orzekającym równość normy na przestrzeni L^p operatora danego całką singularną oraz jego dyskretyzacji na ℓ^p; analogiczny wynik dla operatorów Riesza drugiego rzędu uzyskali K. Domolevo i S. Petermichl (2014).

Transformata Hilberta i funkcje harmoniczne

- Niech $f \in L^p$. Dla $y > 0$ określmy całki Poissona:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - z) \frac{y}{z^2 + y^2} \, dz,$$
$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - z) \frac{z}{z^2 + y^2} \, dz.$$

Transformata Hilberta i funkcje harmoniczne

- Niech $f \in L^p$. Dla $y > 0$ określmy całki Poissona:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z) \, \frac{y}{z^2+y^2} \, dz,$$
$$v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z) \, \frac{z}{z^2+y^2} \, dz.$$

- Wtedy u i v są sprzężonymi funkcjami harmonicznymi:

$$\Delta u = \Delta v = 0, \qquad \nabla v = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \nabla u.$$

Transformata Hilberta i funkcje harmoniczne

- Niech $f \in L^p$. Dla $y > 0$ określmy całki Poissona:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z) \, \frac{y}{z^2+y^2} \, dz,$$

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z) \, \frac{z}{z^2+y^2} \, dz.$$

- Wtedy u i v są sprzężonymi funkcjami harmonicznymi:

$$\Delta u = \Delta v = 0, \qquad \nabla v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u.$$

- Wartości brzegowe u i v to:

$$f(x) = \lim_{y \to 0^+} u(x,y), \qquad Hf(x) = \lim_{y \to 0^+} v(x,y)$$

(granice istnieją w L^p i prawie wszędzie).

Funkcje harmoniczne i martyngały

- Rozważmy standardowy dwuwymiarowy ruch Browna B_t.

Funkcje harmoniczne i martyngały

- Rozważmy standardowy dwuwymiarowy ruch Browna B_t.
- Zakładamy, że $B_0 = (0, y_0)$, gdzie $y_0 \gg 0$.

Funkcje harmoniczne i martyngały

- Rozważmy standardowy dwuwymiarowy ruch Browna B_t.
- Zakładamy, że $B_0 = (0, y_0)$, gdzie $y_0 \gg 0$.
- Niech τ będzie czasem trafienia B_t w $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Funkcje harmoniczne i martyngały

- Rozważmy standardowy dwuwymiarowy ruch Browna B_t.
- Zakładamy, że $B_0 = (0, y_0)$, gdzie $y_0 \gg 0$.
- Niech τ będzie czasem trafienia B_t w $\mathbb{R} \times \{0\}$.
- Skoro u jest funkcją harmoniczną w $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, to

  $$M_t = u(B_{\min\{t,\tau\}})$$

  jest martyngałem. Zakładamy tu, że $u(x, 0) = f(x)$.

Funkcje harmoniczne i martyngały

- Rozważmy standardowy dwuwymiarowy ruch Browna B_t.
- Zakładamy, że $B_0 = (0, y_0)$, gdzie $y_0 \gg 0$.
- Niech τ będzie czasem trafienia B_t w $\mathbb{R} \times \{0\}$.
- Skoro u jest funkcją harmoniczną w $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, to

$$M_t = u(B_{\min\{t,\tau\}})$$

  jest martyngałem. Zakładamy tu, że $u(x, 0) = f(x)$.
- Wynika to ze wzoru Itô: dla $t < \tau$ zachodzi

$$dM_t = \nabla u(B_t) \cdot dB_t,$$
$$d[M]_t = |\nabla u(B_t)|^2 dt.$$

Transformata Hilberta i martyngały

- Skonstruowaliśmy dwie sprzężone funkcje harmoniczne: $u(x, y)$ i $v(x, y)$, o wartościach brzegowych $f(x)$ i $Hf(x)$.

Transformata Hilberta i martyngały

- Skonstruowaliśmy dwie sprzężone funkcje harmoniczne: $u(x, y)$ i $v(x, y)$, o wartościach brzegowych $f(x)$ i $Hf(x)$.
- Określmy dwa martyngały:

$$M_t = u(B_{\min\{t,\tau\}}), \qquad N_t = v(B_{\min\{t,\tau\}}).$$

Transformata Hilberta i martyngały

- Skonstruowaliśmy dwie sprzężone funkcje harmoniczne: $u(x, y)$ i $v(x, y)$, o wartościach brzegowych $f(x)$ i $Hf(x)$.
- Określmy dwa martyngały:

$$M_t = u(B_{\min\{t,\tau\}}), \qquad N_t = v(B_{\min\{t,\tau\}}).$$

- Wahania kwadratowe tych martyngałów spełniają

$$d[M]_t = |\nabla u(B_t)|^2 dt = |\nabla v(B_t)|^2 dt = d[N]_t$$

Transformata Hilberta i martyngały

- Skonstruowaliśmy dwie sprzężone funkcje harmoniczne: $u(x, y)$ i $v(x, y)$, o wartościach brzegowych $f(x)$ i $Hf(x)$.
- Określmy dwa martyngały:

$$M_t = u(B_{\min\{t,\tau\}}), \qquad N_t = v(B_{\min\{t,\tau\}}).$$

- Wahania kwadratowe tych martyngałów spełniają

$$d[M]_t = |\nabla u(B_t)|^2 dt = |\nabla v(B_t)|^2 dt = d[N]_t$$

oraz

$$d[M, N]_t = \nabla u(B_t) \cdot \nabla v(B_t) dt = 0dt$$

dla $t < \tau$.

Nierówność Burkholdera

Twierdzenie (R. Bañuelos, G. Wang, 1995)

Jeśli M_t i N_t są martyngałami oraz

- N_t jest różniczkowo podporządkowany M_t:
$$d[N]_t \leqslant d[M]_t;$$
- M_t oraz N_t są ortogonalne:
$$d[M,N]_t = 0dt,$$

to

$$\mathbb{E}|N_\infty - N_0|^p \leqslant (C_p)^p \, \mathbb{E}|M_\infty - M_0|^p,$$

gdzie $C_p = \max\{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2p}), \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2p})\}$.

Podsumowanie

- Zaczynamy od $f \in L^p$.

Podsumowanie

- Zaczynamy od $f \in L^p$.
- Określamy sprzężone funkcje harmoniczne u i v, o wartościach brzegowych f i $Hf \dots$

Podsumowanie

- Zaczynamy od $f \in L^p$.
- Określamy sprzężone funkcje harmoniczne u i v, o wartościach brzegowych f i Hf...
- ...oraz martyngały $M_t = u(B_{\min\{t,\tau\}})$ i $N_t = v(B_{\min\{t,\tau\}})$.

Podsumowanie

- Zaczynamy od $f \in L^p$.
- Określamy sprzężone funkcje harmoniczne u i v, o wartościach brzegowych f i Hf...
- ...oraz martyngały $M_t = u(B_{\min\{t,\tau\}})$ i $N_t = v(B_{\min\{t,\tau\}})$.
- Skoro $M_\infty = u(B_\tau) = f(B_\tau)$ i $N_\infty = v(B_\tau) = Hf(B_\tau)$, to na mocy nierówności Burkholdera

$$\mathbb{E}|Hf(B_\tau) - v(0, y_0)|^p \leqslant (C_p)^p \, \mathbb{E}|f(B_\tau) - u(0, y_0)|^p.$$

Podsumowanie

- Zaczynamy od $f \in L^p$.
- Określamy sprzężone funkcje harmoniczne u i v, o wartościach brzegowych f i Hf...
- ...oraz martyngały $M_t = u(B_{\min\{t,\tau\}})$ i $N_t = v(B_{\min\{t,\tau\}})$.
- Skoro $M_\infty = u(B_\tau) = f(B_\tau)$ i $N_\infty = v(B_\tau) = Hf(B_\tau)$, to na mocy nierówności Burkholdera

$$\mathbb{E}|Hf(B_\tau) - v(0, y_0)|^p \leqslant (C_p)^p \, \mathbb{E}|f(B_\tau) - u(0, y_0)|^p.$$

- Pozostaje przejść do granicy $y_0 \to \infty$.

Wzór Pichoridesa

- Zmienna B_τ ma rozkład Cauchy'ego na brzegu, a więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Hf(x) - v(0, y_0)|^p \frac{y_0}{x^2 + y_0^2}\, dx \leqslant (C_p)^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - u(0, y_0)|^p \frac{y_0}{x^2 + y_0^2}\, dx.$$

Wzór Pichoridesa

- Zmienna B_τ ma rozkład Cauchy'ego na brzegu, a więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Hf(x) - v(0,y_0)|^p \frac{y_0}{x^2+y_0^2}\,dx \leqslant (C_p)^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - u(0,y_0)|^p \frac{y_0}{x^2+y_0^2}\,dx.$$

- Mnożąc obie strony przez y_0 i rozważając $y_0 \to \infty$, otrzymujemy nierówność Pichoridesa

$$\|Hf\|_{L^p}^p \leqslant (C_p)^p \|f\|_{L^p}^p.$$

Proces warunkowany

- Ruch Browna B_t opuszcza półpłaszczyznę $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, uderzając w cały jej brzeg.

Proces warunkowany

- Ruch Browna B_t opuszcza półpłaszczyznę $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, uderzając w cały jej brzeg.
- Zamiast tego potrzebujemy dyfuzji X_t, która uderza wyłącznie w dyskretny podzbiór brzegu: $\mathbb{Z} \times \{0\}$.

Proces warunkowany

- Ruch Browna B_t opuszcza półpłaszczyznę $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, uderzając w cały jej brzeg.
- Zamiast tego potrzebujemy dyfuzji X_t, która uderza wyłącznie w dyskretny podzbiór brzegu: $\mathbb{Z} \times \{0\}$.
- Proces X_t można określić jako granicę przy $\varepsilon \to 0^+$ ruchu Browna B_t warunkowanego zdarzeniem

$$B_\tau \in \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k - \varepsilon, k + \varepsilon) \right) \times \{0\}.$$

Stochastyczne równanie różniczkowe

- Formalnie: X_t powstaje poprzez warunkowanie w sensie Dooba procesu B_t za pomocą funkcji harmonicznej

$$h(x,y) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{y}{(x-k)^2 + y^2}$$
$$= \frac{\sinh(2\pi y)}{\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x)} .$$

Stochastyczne równanie różniczkowe

- Formalnie: X_t powstaje poprzez warunkowanie w sensie Dooba procesu B_t za pomocą funkcji harmonicznej

$$h(x,y) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{y}{(x-k)^2+y^2} = \frac{\sinh(2\pi y)}{\cosh(2\pi y)-\cos(2\pi x)}\,.$$

- Generatorem jest operator $\frac{1}{2}h^{-1}\Delta(hu) = \frac{1}{2}\Delta u + \dfrac{\nabla h\cdot\nabla u}{h}$.

Stochastyczne równanie różniczkowe

- Formalnie: X_t powstaje poprzez warunkowanie w sensie Dooba procesu B_t za pomocą funkcji harmonicznej
$$h(x,y) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{y}{(x-k)^2 + y^2} = \frac{\sinh(2\pi y)}{\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x)} .$$
- Generatorem jest operator $\frac{1}{2} h^{-1} \Delta(hu) = \frac{1}{2} \Delta u + \dfrac{\nabla h \cdot \nabla u}{h}$.
- Równoważnie: X_t jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego
$$dX_t = dB_t + \frac{\nabla h(X_t)}{h(X_t)}\, dt.$$

Martyngał

- Rozważamy ciąg a_n z ℓ^p.

Martyngał

- Rozważamy ciąg a_n z ℓ^p.
- Rozszerzenie X_t-harmoniczne tego ciągu to

$$u(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{y}{(x-k)^2 + y^2} .$$

Martyngał

- Rozważamy ciąg a_n z ℓ^p.
- Rozszerzenie X_t-harmoniczne tego ciągu to

$$u(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{y}{(x-k)^2 + y^2} .$$

- Funkcja u rozszerzamy do funkcji ciągłej na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, przyjmując $u(n, 0) = a_n$.

Martyngał

- Rozważamy ciąg a_n z ℓ^p.
- Rozszerzenie X_t-harmoniczne tego ciągu to

$$u(x,y) = \frac{1}{h(x,y)} \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{y}{(x-k)^2 + y^2} .$$

- Funkcja u rozszerzamy do funkcji ciągłej na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, przyjmując $u(n, 0) = a_n$.
- Określamy martyngał $M_t = u(X_{\min\{t,\tau\}})$.

Martyngał

- Rozważamy ciąg a_n z ℓ^p.
- Rozszerzenie X_t-harmoniczne tego ciągu to

$$u(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{y}{(x-k)^2 + y^2} .$$

- Funkcja u rozszerzamy do funkcji ciągłej na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, przyjmując $u(n, 0) = a_n$.
- Określamy martyngał $M_t = u(X_{\min\{t,\tau\}})$.
- Nie ma pojęcia sprzężonej funkcji X_t-harmonicznej!

Transformata martyngałowa

- Skoro $M_t = u(X_{\min\{t,\tau\}})$ oraz

$$dX_t = dB_t + \frac{\nabla h(X_t)}{h(X_t)}\, dt,$$
$$d[X]_t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) dt,$$
$$\nabla u \cdot \frac{\nabla h}{h} + \tfrac{1}{2}\Delta u = 0,$$

Transformata martyngałowa

- Skoro $M_t = u(X_{\min\{t,\tau\}})$ oraz

$$dX_t = dB_t + \frac{\nabla h(X_t)}{h(X_t)}\, dt,$$
$$d[X]_t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) dt,$$
$$\nabla u \cdot \frac{\nabla h}{h} + \tfrac{1}{2}\Delta u = 0,$$

to na mocy wzoru Itô dla $t < \tau$ zachodzi

$$\begin{aligned} dM_t &= \nabla u(X_t) \cdot dX_t + \tfrac{1}{2}\Delta u(X_t) dt \\ &= \nabla u(X_t) \cdot dB_t. \end{aligned}$$

Transformata martyngałowa

- Skoro $M_t = u(X_{\min\{t,\tau\}})$ oraz
$$dX_t = dB_t + \frac{\nabla h(X_t)}{h(X_t)}\, dt,$$
$$d[X]_t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) dt,$$
$$\nabla u \cdot \frac{\nabla h}{h} + \tfrac{1}{2}\Delta u = 0,$$
to na mocy wzoru Itô dla $t < \tau$ zachodzi
$$\begin{aligned} dM_t &= \nabla u(X_t) \cdot dX_t + \tfrac{1}{2}\Delta u(X_t) dt \\ &= \nabla u(X_t) \cdot dB_t. \end{aligned}$$
- Dla $t < \tau$ określamy
$$dN_t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \nabla u(X_t) \cdot dB_t.$$

Podsumowanie — zmiany!

- Zaczynamy od $\cancel{f \in L^p.}$ a_n z ℓ^p

Podsumowanie — zmiany!

- Zaczynamy od ~~$f \in L^p$.~~ a_n z ℓ^p
- Określamy ~~sprzężone funkcje harmoniczne u i v, o wartościach brzegowych f i Hf...~~ funkcję X_t-harmoniczną u

Podsumowanie — zmiany!

- Zaczynamy od ~~$f \in L^p$.~~ a_n z ℓ^p
- Określamy ~~sprzężone funkcje harmoniczne u i v, o wartościach brzegowych f i Hf...~~ funkcję X_t-harmoniczną u
- ...oraz martyngały $M_t = u(\cancel{B}^{X}_{\min\{t,\tau\}})$ i ~~$N_t = v(B_{\min\{t,\tau\}})$~~.
  $dN_t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \nabla u(X_t) \cdot dB_t$

Podsumowanie — zmiany!

- Zaczynamy od $\cancel{f \in L^p.}$ a_n z ℓ^p

- Określamy ~~sprzężone funkcje harmoniczne u i v, o wartościach brzegowych f i Hf...~~ funkcję X_t-harmoniczną u

- ...oraz martyngały $M_t = u(\cancel{B}^{X}_{\min\{t,\tau\}})$ i $\cancel{N_t = v(B_{\min\{t,\tau\}})}$.
  $dN_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u(X_t) \cdot dB_t$

- Skoro $M_\infty = u(\overset{X}{\cancel{B}}_\tau) = \overset{a_{X_\tau}}{\cancel{f(B_\tau)}}$ i $\cancel{N_\infty = v(B_\tau)}$, to na mocy nierówności Burkholdera

$$\mathbb{E}|\underset{N_\tau - N_0}{\cancel{Hf(B_\tau) - v(0,y_0)}}|^p \leqslant (C_p)^p\, \mathbb{E}|\underset{a_{X_\tau}}{\cancel{f(B_\tau)}} - u(0,y_0)|^p.$$

Podsumowanie — zmiany!

- Zaczynamy od a_n z ℓ^p.
- Określamy funkcję X_t-harmoniczną u…
- …oraz martyngały $M_t = u(X_{\min\{t,\tau\}})$ i $dN_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u(X_t) \cdot dB_t$.
- Skoro $M_\infty = u(X_\tau) = a_{X_\tau}$, to na mocy nierówności Burkholdera

$$\mathbb{E}|N_\tau - N_0|^p \leqslant (C_p)^p \, \mathbb{E}|a_{X_\tau} - u(0, y_0)|^p.$$

Podsumowanie — zmiany!

- Zaczynamy od a_n z ℓ^p.
- Określamy funkcję X_t-harmoniczną u...
- ...oraz martyngały $M_t = u(X_{\min\{t,\tau\}})$ i $dN_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u(X_t) \cdot dB_t$.
- Skoro $M_\infty = u(X_\tau) = a_{X_\tau}$, to na mocy nierówności Burkholdera

$$\mathbb{E}|N_\tau - N_0|^p \leqslant (C_p)^p \, \mathbb{E}|a_{X_\tau} - u(0, y_0)|^p.$$

- Z nierówności Jensena:

$$\mathbb{E}\Big|\mathbb{E}\big(N_\tau - N_0 \big| X_\tau\big)\Big|^p \leqslant (C_p)^p \, \mathbb{E}|a_{X_\tau} - u(0, y_0)|^p.$$

Oszacowanie normy pewnej transformaty

- Tak jak w przypadku transformaty ciągłej, przejście graniczne $y_0 \to \infty$ prowadzi do nierówności

$$\|b_n\|_{\ell^p}^p \leqslant (C_p)^p \|a_n\|_{\ell^p}^p,$$

gdzie

$$b_n = \lim_{y_0 \to \infty} \mathbb{E}(N_\tau - N_0 | X_\tau = (n, 0)).$$

Oszacowanie normy pewnej transformaty

- Tak jak w przypadku transformaty ciągłej, przejście graniczne $y_0 \to \infty$ prowadzi do nierówności
$$\|b_n\|_{\ell^p}^p \leqslant (C_p)^p \|a_n\|_{\ell^p}^p,$$
gdzie
$$b_n = \lim_{y_0 \to \infty} \mathbb{E}(N_\tau - N_0 | X_\tau = (n, 0)).$$
- Niespodzianka: po żmudnych rachunkach otrzymujemy
$$b_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n-k}}{k} \left(1 + \int_0^\infty \frac{2y^3}{(y^2 + \pi^2 k^2) \sinh^2 y} \, dy \right).$$

Oszacowanie normy pewnej transformaty

- Tak jak w przypadku transformaty ciągłej, przejście graniczne $y_0 \to \infty$ prowadzi do nierówności
$$\|b_n\|_{\ell^p}^p \leqslant (C_p)^p \|a_n\|_{\ell^p}^p,$$
gdzie
$$b_n = \lim_{y_0 \to \infty} \mathbb{E}(N_\tau - N_0 | X_\tau = (n, 0)).$$
- Niespodzianka: po żmudnych rachunkach otrzymujemy
$$b_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n-k}}{k} \left(1 + \int_0^\infty \frac{2y^3}{(y^2 + \pi^2 k^2) \sinh^2 y} \, dy \right).$$
- Jeśli oznaczymy $b_n = \tilde{\mathcal{H}} a_n$, to $\|\tilde{\mathcal{H}}\|_{\ell^p \to \ell^p} \leqslant C_p$.

Splot

- Operator $\tilde{\mathcal{H}}$ jest operatorem splotu z jądrem
$$\tilde{h}_n = \frac{1}{\pi n}\left(1 + \int_0^\infty \frac{2y^3}{(y^2+\pi^2 n^2)\sinh^2 y}\,dy\right)\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(n).$$

Splot

- Operator $\tilde{\mathcal{H}}$ jest operatorem splotu z jądrem
$$\tilde{h}_n = \frac{1}{\pi n}\left(1 + \int_0^\infty \frac{2y^3}{(y^2+\pi^2 n^2)\sinh^2 y}\,dy\right)\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(n).$$
- Do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że istnieje ciąg probabilistyczny ϱ_n taki, że
$$\mathcal{H}a_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varrho_k \tilde{\mathcal{H}} a_{n-k}.$$

Splot

- Operator $\tilde{\mathcal{H}}$ jest operatorem splotu z jądrem

$$\tilde{h}_n = \frac{1}{\pi n}\left(1 + \int_0^\infty \frac{2y^3}{(y^2+\pi^2 n^2)\sinh^2 y}\,dy\right)\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(n).$$

- Do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że istnieje ciąg probabilistyczny ϱ_n taki, że

$$\mathcal{H}a_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varrho_k \tilde{\mathcal{H}} a_{n-k}.$$

- Równoważnie:

$$\frac{1}{\pi n}\,\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varrho_k \tilde{h}_{n-k}.$$

Splot

- Operator $\tilde{\mathcal{H}}$ jest operatorem splotu z jądrem

$$\tilde{h}_n = \frac{1}{\pi n}\left(1 + \int_0^\infty \frac{2y^3}{(y^2 + \pi^2 n^2)\sinh^2 y}\,dy\right)\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(n).$$

- Do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że istnieje ciąg probabilistyczny ϱ_n taki, że

$$\mathcal{H}a_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varrho_k \tilde{\mathcal{H}} a_{n-k}.$$

- Równoważnie:

$$\frac{1}{\pi n}\mathbb{1}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varrho_k \tilde{h}_{n-k}.$$

- Ciąg ϱ_n konstruuje się jawnie; rachunki są żmudne.

O dowodzie

- Dowód polega na reprezentacji $\mathcal{H}$ w postaci złożenia czterech operacji:

O dowodzie

- Dowód polega na reprezentacji $\mathcal{H}$ w postaci złożenia czterech operacji:

  (1) identyfikacja ciągu z martyngałem: $a_n \rightsquigarrow M_t$;

O dowodzie

- Dowód polega na reprezentacji $\mathcal{H}$ w postaci złożenia czterech operacji:

  (1) identyfikacja ciągu z martyngałem: $a_n \rightsquigarrow M_t$;

  (2) transformata martyngałowa: $M_t \rightsquigarrow N_t$;

O dowodzie

- Dowód polega na reprezentacji $\mathcal{H}$ w postaci złożenia czterech operacji:

  (1) identyfikacja ciągu z martyngałem: $a_n \rightsquigarrow M_t$;

  (2) transformata martyngałowa: $M_t \rightsquigarrow N_t$;

  (3) warunkowa wartość oczekiwana: $N_t \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{H}} a_n$;

O dowodzie

- Dowód polega na reprezentacji $\mathcal{H}$ w postaci złożenia czterech operacji:

  (1) identyfikacja ciągu z martyngałem: $a_n \rightsquigarrow M_t$;

  (2) transformata martyngałowa: $M_t \rightsquigarrow N_t$;

  (3) warunkowa wartość oczekiwana: $N_t \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{H}} a_n$;

  (4) splot z ciągiem ϱ_n: $\tilde{\mathcal{H}} a_n \rightsquigarrow \mathcal{H} a_n$.

O dowodzie

- Dowód polega na reprezentacji $\mathcal{H}$ w postaci złożenia czterech operacji:
  (1) identyfikacja ciągu z martyngałem: $a_n \rightsquigarrow M_t$;
  (2) transformata martyngałowa: $M_t \rightsquigarrow N_t$;
  (3) warunkowa wartość oczekiwana: $N_t \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{H}} a_n$;
  (4) splot z ciągiem ϱ_n: $\tilde{\mathcal{H}} a_n \rightsquigarrow \mathcal{H} a_n$.
- Operacje (3) i (4) nie zachowują normy ℓ^2, dlatego podobny argument nie może zadziałać w przypadku operatorów unitarnych $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$.

O dowodzie

- Dowód polega na reprezentacji $\mathcal{H}$ w postaci złożenia czterech operacji:
  (1) identyfikacja ciągu z martyngałem: $a_n \rightsquigarrow M_t$;
  (2) transformata martyngałowa: $M_t \rightsquigarrow N_t$;
  (3) warunkowa wartość oczekiwana: $N_t \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{H}} a_n$;
  (4) splot z ciągiem ϱ_n: $\tilde{\mathcal{H}} a_n \rightsquigarrow \mathcal{H} a_n$.
- Operacje (3) i (4) nie zachowują normy ℓ^2, dlatego podobny argument nie może zadziałać w przypadku operatorów unitarnych $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ i $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$.
- Ciąg $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}} a_n$ można przedstawić jako splot $\tilde{\mathcal{H}} a_n$ z pewnym ciągiem ϱ_n, ale wyrazy ϱ_n nie są nieujemne. Z tego powodu dowód nie prowadzi do właściwego oszacowania normy operatora $\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}$.

Otwarte problemy

Hipoteza 1

Zachodzi $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p \to \ell^p} = C_p$

Otwarte problemy

Hipoteza 1

Zachodzi $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p \to \ell^p} = C_p$ lub chociaż $\|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p \to \ell^p} = C_p$.

Otwarte problemy

Hipoteza 1

Zachodzi $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p \to \ell^p} = C_p$ lub chociaż $\|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p \to \ell^p} = C_p$.

Hipoteza 2

Zachodzi $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^1 \to \ell^{1,w}} = \|H\|_{L^1 \to L^{1,w}}$.

Otwarte problemy

Hipoteza 1

Zachodzi $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^p\to\ell^p} = C_p$ lub chociaż $\|\mathcal{H}_{\mathrm{ADP}}\|_{\ell^p\to\ell^p} = C_p$.

Hipoteza 2

Zachodzi $\|\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\|_{\ell^1\to\ell^{1,w}} = \|H\|_{L^1\to L^{1,w}}$.

Hipoteza 3

Dyskretna transformata Riesza

$$\mathcal{R}_j a_n = c_d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{(0,0,\ldots,0)\}} a_{n-k}\,\frac{k_j}{|k|^{d+1}}$$

spełnia $\|\mathcal{R}_j\|_{\ell^p\to\ell^p} = C_p$.