Mateusz Kwaśnicki
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska

Autoreferat pracy doktorskiej "Teoria potencjału dla ułamkowych potęg operatora Laplace'a"

Promotor: dr hab. Tadeusz Kulczycki

Praca doktorska *Teoria potencjału dla ułamkowych potęg operatora Laplace'a* składa się z czterech artykułów:

[I] K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, *Estimates and structure of α-harmonic functions*. Prob. Theory Rel. Fields 140(3-4) (2008), pp. 345–381.

[II] M. Kwaśnicki, *Spectral gap estimate for stable processes on arbitrary bounded open sets*. Probab. Math. Statist. 28(1) (2008), pp. 163–167.

[III] M. Kwaśnicki, *Eigenvalues of the Cauchy process on an interval have at most double multiplicity*, praca wysłana do redakcji.

[IV] M. Kwaśnicki, *Intrinsic ultracontractivity for stable semigroups on unbounded open sets*, praca wysłana do redakcji.

Spis treści

1 Wprowadzenie

Teoria potencjału jest działem matematyki wywodzącym się z XIX-wiecznych badań nad klasycznymi teoriami pola grawitacyjnego i pola elektrostatycznego. Zakładały one, że siły podstawowych oddziaływań między ciałami fizycznymi mogą zostać opisane za pomocą tzw. *potencjałów*. Termin ten określa funkcje u spełniające równanie Poissona $-\Delta u = \rho$, w którym $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ jest operatorem Laplace'a, a ρ jest gęstością masy lub ładunku elektrycznego, w zależności od rozważanego pola. Natężenie pola, czyli siła wywierana na cząstkę o jednostkowej masie (lub na elementarny ładunek), jest w tej teorii opisana gradientem potencjału $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$. W obszarze pozbawionym masy lub ładunku, potencjał jest *funkcją harmoniczną*, tzn. spełnia równanie Laplace'a $\Delta u = 0$. Badanie potencjałów i funkcji harmonicznych było więc dla XIX-wiecznych naukowców studiowaniem natury sił fizycznych.

Obecnie wiadomo, że wspomniane wyżej klasyczne teorie nie oddają ściśle charakteru oddziaływań. Rozbieżności z obserwacjami są wyraźne przede wszystkim przy zjawiskach zachodzących w bardzo małej lub bardzo dużej skali. W pierwszym przypadku dokładniejsze wyniki daje kwantowa teoria pola. Do zagadnień makroskopowych stosowana powinna być ogólna teoria względności, która stwierdza m.in., że przestrzeń euklidesowa nie jest dokładnym modelem wszechświata[1]. Idee z klasycznej teorii potencjału są jednak wciąż użyteczne, z jednej strony jako dobre przybliżenie przy zagadnieniach dotyczących "przeciętnej" skali, z drugiej zaś jako wzór i inspiracja dla nowszych, bardziej skomplikowanych teorii.

Klasyczna teoria potencjału jest ponadto bardzo atrakcyjna z matematycznego punktu widzenia i być może dlatego stała się ważną dziedziną matematyki teoretycznej. Dodatkowym impulsem do jej rozwoju była obserwacja Shizuo Kakutaniego z 1944 roku [56, 57], w której funkcje harmoniczne powiązane zostały z ruchem Browna. To odkrycie pozwoliło również zastosować niezwykle silne twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa i teorii procesów Markowa.

Równolegle z szybkim rozwojem klasycznej teorii potencjału, tj. dziedziny zajmującej się potencjałami Newtona, funkcjami harmonicznymi i później także ruchem Browna, powstawała abstrakcyjna teoria potencjału. Jej celem jest wyodrębnienie tych wyników, które nie zależą od postaci potencjału Newtona, lecz od jego ogólnych własności. Jednym z najistotniejszych przykładów tej ogólnej teorii są tzw. *potencjały Riesza* lub *α-potencjały*, wprowadzone przez Marcela Riesza w 1938 roku [72]. W trójwymiarowej przestrzeni potencjał Newtona cząstki o jednostkowej masie maleje odwrotnie proporcjonalnie do odległości od cząstki, zaś potencjał Riesza — proporcjonalnie do jej pewnej ułamkowej potęgi. Jest to więc naturalne uogólnienie potencjału Newtona. Ponadto wiąże się ono z symetrycznymi procesami stabilnymi, czyli procesami Markowa uogólniającymi ruch Browna i pod wieloma względami do niego podobnymi. Stanowi to dostateczną motywację, by rozwijać teorię α-potencjału na wzór klasycznej teorii potencjału. Celem opisywanej tu pracy doktorskiej jest przede wszystkim uogólnienie niektórych znanych już wyników teorii α-potencjału na przypadek zbiorów nieograniczonych bądź o nieregularnym brzegu.

Podstawową różnicą między ruchem Browna a pozostałymi symetrycznymi procesami stabilnymi dotyczy ciągłości trajektorii procesów. Ruch Browna, czyli symetryczny pro-

[1] Warto zauważyć, że nie jest znana teoria poprawnie opisująca jednocześnie zaganienia makroskali i mikroskali, a więc łącząca ogólną teorię względności i mechanikę kwantową. Jej poszukiwanie jest jednym z wyzwań współczesnej fizyki.

ces stabilny o indeksie stabilności 2, jest *dyfuzją*, a więc prawie na pewno jego trajektorie są ciągłymi funkcjami czasu. Pozostałe symetryczne procesy stabilne odpowiadają indeksom stabilności α z przedziału $(0, 2)$ i są *procesami skokowymi*, z prawdopodobieństwem jeden zbiór punktów nieciągłości ich trajektorii jest gęsty w $[0, \infty)$. Przekłada się to na brak *lokalności* w teorii α-potencjału. W klasycznym przypadku, aby stwierdzić czy potencjał jest harmoniczny na danym obszarze, wystarczy znać wartości potencjału na tym obszarze. To samo dotyczy problemu wyznaczenia ładunku lub masy odpowiadającej danemu potencjałowi Newtona. Analogiczne stwierdzenia nie są jednak prawdziwe, gdy rozważamy potencjały Riesza inne od potencjału Newtona oraz pojęcie α-harmoniczności. Ta różnica z jednej strony utrudnia uogólnianie twierdzeń o potencjałach, zaś z drugiej umożliwia stosowanie nowych metod, wykorzystujących nielokalność teorii α-potencjału.

W poniższym opracowaniu przedstawione są wyniki w teorii α-potencjału prezentujące oba wspomniane wyżej aspekty nielokalności. Niektóre wyniki są dużo słabsze od klasycznych odpowiedników, dotyczy to m.in. wartości własnych i funkcji własnych półgrup procesu Cauchy'ego na odcinku z pracy [III]. Inne twierdzenia są ogólniejsze niż w klasycznej teorii, np. brzegowa nierówność Harnacka i twierdzenie o reprezentacji Martina z pracy [I] lub oszacowania pierwszej funkcji własnej półgrup stabilnych z pracy [IV] nie wymagają założeń dotyczących regularności brzegu zbioru.

2 Podstawowe pojęcia

Ten rozdział jest krótkim wprowadzeniem do teorii potencjału procesów α-stabilnych. Poniżej zdefiniowane są pojęcia matematyczne, które wykorzystane są w pracy doktorskiej, i przytoczone są ich najważniejsze własności.

Przez C oznaczamy dodatnią stałą zależną od parametrów wypisanych w indeksie dolnym. Dla uproszczenia pomijamy zależność od wymiaru d i parametru α, przyjmując, że każda stała zależy od tych wielkości. Każdy symbol C oznaczać może inną stałą, a więc np. $f_1 \leq Cf_2 \leq Cf_3$ oznacza w istocie, że istnieją dwie stałe c_1 i c_2 takie, że $f_1 \leq c_1 f_2 \leq c_2 f_3$. Porównywalność funkcji oznaczamy symbolem „$\asymp$". Zapis $f \asymp Cg$ oznacza zatem, że $f \leq Cg$ i $g \leq Cf$.

Miarę Lebesgue'a zbioru borelowskiego $E \subset \mathbf{R}^d$ oznaczamy $|E|$. Odległość euklidesową między punktami $x, y \in \mathbf{R}^d$ oznaczamy $|x - y|$. Jeśli B i D są zbiorami otwartymi, to zapis $B \Subset D$ oznacza, że $\overline{B}$ jest zwartym podzbiorem D.

2.1 Potencjały Riesza

Dowody podanych poniżej własności potencjałów Riesza oraz dodatkowe informacje na ten temat można znaleźć w monografii Landkoffa [65]. Niech $d \geq 1$ oznacza wymiar przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^d$. Wprowadźmy następujące stałe:

$$\mathcal{A}_{d,\gamma} = \frac{\Gamma(\frac{d-\gamma}{2})}{2^\gamma \pi^{\frac{d}{2}} |\Gamma(\frac{\gamma}{2})|} \qquad \text{gdy } \gamma \neq d,$$

$$\mathcal{A}_{d,\gamma} = -\frac{1}{\pi} \qquad \text{gdy } \gamma = d,$$

gdzie $|\gamma| \in (0, 2]$. Jeśli $\alpha \in (0, 2]$ oraz $d > \alpha$, określamy *jądro potencjału Riesza* wzorem $U(x) = \mathcal{A}_{d,\alpha} |x|^{\alpha-d}$. *Potencjałem Riesza* nieujemnej miary borelowskiej μ na $\mathbf{R}^d$

nazywamy funkcję:

$$U\mu(x) = \int U(y-x)\mu(dx) = \int \frac{\mathcal{A}_{d,\alpha}\mu(dx)}{|y-x|^{d-\alpha}}$$

(dopuszczamy wartości nieskończone). Operator potencjału Riesza U można również opisać przez transformatę Fouriera, dla miar skończonych μ zachodzi $(U\mu)\hat{}(\xi) = |\xi|^{-\alpha}\hat{\mu}(\xi)$.

Dla $\alpha = 2$ funkcja u jest jądrem potencjału Newtona, a $U\mu$ jest potencjałem Newtona masy, której rozkład opisany jest przez miarę μ[2]. Jeśli μ ma ciągłą funkcję gęstości ρ, to $U\mu$ jest klasy $C^2(\mathbf{R}^d)$ i zachodzi $-\Delta U\mu(x) = \rho(x)$. Ponadto $-\nabla U\mu$ jest wektorem siły działającej na cząstkę o elementarnej masie położoną w punkcie x. Oczywiście te fizyczne interpretacje odpowiadają przypadkowi przestrzeni trójwymiarowej, w której jądro potencjału Newtona ma postać $U(x) = \frac{1}{4\pi}|x|^{-1}$.

Całka potencjału Riesza miary μ względem niej samej nazywana jest *energią Riesza* miary μ:

$$E(\mu) = \int\int U(y-x)\mu(dx)\mu(dy) = \int\int \frac{\mathcal{A}_{d,\alpha}\mu(dx)\mu(dy)}{|y-x|^{d-\alpha}}.$$

W klasycznym przypadku, tj. dla potencjału Newtona, wielkość $-E(\mu)$ odpowiada energii potencjalnej układu masy opisanego miarą μ. Praca potrzebna do przesunięcia mas tak, aby ich rozkład zmienił się z μ na μ', wyraża się wzorem $E(\mu) - E(\mu')$.

Odwrotność infimum energii Riesza miar probabilistycznych skupionych na pewnym ustalonym zbiorze borelowskim E nazywa się *pojemnością Riesza* zbioru E i oznacza $\mathrm{Cap}(E)$. Gdy każda niezerowa miara skupiona na E ma nieskończoną energię Riesza, przyjmujemy $\mathrm{Cap}(E) = 0$, zaś E nazywamy *zbiorem polarnym*. Pojęcie to odgrywa ważną rolę w teorii potencjału.

2.2 Symetryczne procesy stabilne a potencjały Riesza

Pojęciom zdefiniowanym w poprzenim podrozdziale można nadać interpretację probabilistyczną za pomocą symetrycznych procesów stabilnych. Stosujemy standardowe oznaczenia teorii procesów Markowa, a więc zakładamy, że $(X_t : t \geq 0)$ jest rodziną zmiennych losowych na pewnej przestrzeni mierzalnej, na której określona jest rodzina prawdopodobieństw $(\mathbf{P}_x : x \in \mathbf{R}^d)$. Miara $\mathbf{P}_x$ odpowiada procesowi startującemu z punktu x, wartość oczekiwana względem $\mathbf{P}_x$ oznaczana jest przez $\mathbf{E}_x$. Czasem dla wygody piszemy $X(t)$ zamiast X_t.

Monografia Dynkina [46] zawiera wykład ogólnej teorii procesów Markowa. Teoria potencjału w ujęciu probabilistycznym i analitycznym przedstawiona jest w książce Bliedtnera i Hansena [18]. Dobrym źródłem informacji o procesach Lévy'ego jest książka Sato [73]. Więcej o teorii potencjału symetrycznych procesów stabilnych można znaleźć w artykułach Bogdana i Byczkowskiego [24, 26].

Symetryczny proces α-stabilny w $\mathbf{R}^d$ to proces stochastyczny (X_t) o wartościach w $\mathbf{R}^d$ spełniający następujące warunki:

(a) (X_t) jest procesem Lévy'ego, tzn. rozkład procesu (X_t) względem $\mathbf{P}_x$ jest taki sam, jak rozkład $(X_t + x)$ względem $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$, przyrosty (X_t) są jednorodne

[2] Gdy rozważany jest potencjał ładunku elektrycznego, zasadne jest również rozważanie miar znakowanych.

w czasie i niezależne, a prawie na pewno[3] trajektorie X_t są prawostronnie ciągłymi funkcjami t i posiadają lewostronne granice dla każdego $t \geq 0$;

(b) Dla wszystkich $t > 0$ funkcja charakterystyczna X_t względem rozkładu $\mathbf{P}_0$ ma postać $\mathbf{E}_0 \exp(i \langle X_t, \xi \rangle) = \exp(-t|\xi|^\alpha)$.

Parametr α może przyjmować wartości z zakresu $(0, 2]$. Dla $\alpha = 2$ okazuje się, że prawie wszystkie trajektorie (X_t) są ciągłe, a X_t ma symetryczny wielowymiarowy rozkład normalny o średniej 0 i wariancji $2t$. Oznacza to, że $(X_{\frac{t}{2}})$ jest ruchem Browna. Dla wygody proces (X_t), różniący się od $(X_{\frac{t}{2}})$ jedynie skalą czasu, również nazywamy ruchem Browna. Jeśli $\alpha < 2$, dla każdego ustalonego t prawie na pewno trajektorie (X_t) są ciągłe w t, lecz również prawie na pewno zbiór punktów nieciągłości trajektorii (X_t) jest gęsty w $[0, \infty)$.

Z warunku (b) wynika, że zmiene cX_t i $X_{c^\alpha t}$ mają ten sam rozkład względem $\mathbf{P}_0$. Tę własność nazywa się α-stabilnością procesu. Ponadto rozkład $\mathbf{P}_0$ zmiennej X_t jest symetryczny, tzn. jest niezmienniczy na ortogonalne przekształcenia $\mathbf{R}^d$.

Z procesem (X_t) związana jest naturalna prawostronnie ciągła filtracja $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t + \varepsilon\}$. Zbiór jest mierzalny względem σ-ciała $\mathcal{F}_{t_0}$, jeśli da się go opisać za pomocą trajektorii procesu (X_t) do chwili $t_0 + \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Podkreślmy, że jest to σ-ciało istotnie większe od σ-ciała generowanego przez zmienne X_t do chwili t_0.

Zdarzenie $\{\tau_D = 0\}$, gdzie $\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$ jest *czasem pierwszego wyjścia* ze zbioru otwartego D, jest mierzalne względem $\mathcal{F}_0$. Gdy $X_0 \in \partial D$, to aby stwierdzić, czy $\tau_D = 0$, potrzeba pewnej minimalnej informacji o trajektorii (X_t) dla $t > 0$. Oznacza to, że $\{\tau_D = 0\}$ nie jest mierzalny względem $\sigma\{X_0\}$, co potwierdza uwagę z poprzedniego akapitu o ścisłym zawieraniu się σ-ciał w przypadku $t_0 = 0$.

Okazuje się, że wszystkie zdarzenia mierzalne względem $\mathcal{F}_0$ zachodzą z prawdopodobieństwem zero lub jeden — jest to tzw. prawo 0-1 Blumenthala. W szczególności istotne jest dla nas, że $\{\tau_D = 0\}$ ma tę własność.

Rozkład X_t względem $\mathbf{P}_x$ jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a. Funkcja gęstości jest postaci $p_t(y - x)$, gdzie p_t jest funkcją o transformacie Fouriera $\exp(-t|\xi|^\alpha)$. Wiadomo, że p_t jest funkcją analityczną. Gdy $\alpha = 2$, $p_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$, a więc X_t ma wielowymiarowy rozkład normalny. Jawny wzór istnieje jeszcze tylko dla $\alpha = 1$, wówczas $p_t(x) = \Gamma(\frac{d+1}{2})\pi^{-\frac{d+1}{2}} t(t^2 + |x|^2)^{-\frac{d+1}{2}}$ (jest to tzw. wielowymiarowy rozkład Cauchy'ego). W ogólnym przypadku dla $\alpha < 2$ zachodzi $p_t(x) \asymp C \min(t^{-\frac{d}{\alpha}}, t|x|^{-d-\alpha})$dla $x \in \mathbf{R}^d$ i $t > 0$ [47].

Z procesem (X_t) związana jest półgrupa operatorów przejścia $P_t f(x) = \mathbf{E}_x f(X_t) = f * p_t(x)$, działająca na odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej, np. $L^2(\mathbf{R}^d)$ lub $C_0(\mathbf{R}^d)$. Dla $\lambda \geq 0$ i tych funkcji f, dla których poniższa całka istnieje, określa się operator[4]:

$$U_\lambda f(x) = \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x) dt = \int U_\lambda(y - x) f(y) dy\,,$$

gdzie $U_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t(x) dt$. Operatory U_λ możemy rozszerzyć na przestrzeń nieujemnych miar borelowskich wzorem $U_\lambda \mu(x) = \int U_\lambda(y - x) \mu(dy)$.

[3]Mówiąc, że zdarzenie A zachodzi prawie na pewno, mamy na myśli, że $\mathbf{P}_x(A) = 1$ dla *wszystkich* $x \in \mathbf{R}^d$.

[4]Operator U_λ jest nazywany operatorem λ-potencjału dla procesu (X_t). Nie stosujemy tej nazwy, aby uniknąć konfliktu z wprowadzonym pojęciem α-potencjału.

Gdy $\lambda > 0$, funkcja $U_\lambda(x)$ jest skończona dla $x \neq 0$. Jeśli zaś $\lambda = 0$, to $U_0(x) = U(x)$ jest jądrem potencjału Riesza, gdy $\alpha < d$, oraz $U_0(x) = \infty$ w przeciwnym przypadku. Oznacza to, że gdy $\alpha < d$, to U_0, czyli *operator potencjału procesu* (X_t), jest operatorem potencjału Riesza. W szczególności jeśli $\alpha = 2$, $d \geq 3$, to U_0 jest klasycznym operatorem potencjału Newtona.

Funkcja U_0 opisuje przestrzenny rozkład czasu spędzanego średnio przez proces (X_t). Dokładniej, $\int_E U_0(y-x)dy$ jest wartością oczekiwaną względem $\mathbf{P}_x$ ilości czasu (w sensie miary Lebesgue'a) spędzonego przez trajektorie (X_t) w zbiorze E.

Przypomnijmy, że w przypadku $\alpha < d$ zbiór E jest polarny, jeśli $\int U\mu(x)\mu(dx) = \infty$ dla wszystkich niezerowych miar μ niesionych przez E. Okazuje się, że warunek $\int U_\lambda\mu(x)\mu(dx) = \infty$ nie zależy od $\lambda \geq 0$. Pozwala to zdefiniować polarność także gdy $\alpha \geq d$: mówimy, że zbiór E jest polarny, jeśli $\int U_1\mu(x)\mu(dx) = \infty$ dla wszystkich niezerowych miar μ niesionych przez E.

Gdy $\alpha > d$, u_1 jest funkcją ograniczoną, więc każda skończona miara ma skończoną energię. Dlatego żaden niepusty zbiór nie jest polarny. Dla dowolnego α zbiory polarne mają zerową miarę Lebesgue'a. Jest tak dlatego, że miara Lebesgue'a obcięta do zbioru E o skończonej mierze, ma zawsze skończoną energię.

Polarność zbioru można interpretować następująco. Niech tak jak powyżej τ_E będzie *czasem pierwszego wyjścia* z borelowskiego zbioru E, $\tau_E = \inf\{t > 0 : X_t \notin E\}$. Wówczas zbiór E jest polarny, jeśli $\mathbf{P}_x(\tau_{E^c} = \infty) = 1$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}^d$. Innymi słowy polarność E oznacza, że proces (X_t) prawie na pewno omija zbiór E.

W przypadku $\alpha > d$ już pojedyńcze punkty są zbiorami niepolarnymi. Wobec powyższej uwagi oznacza to, że prawie na pewno (X_t) przyjmuje wszystkie możliwe wartości z $\mathbf{R}^d$ nieskończenie wiele razy. Procesy o tej własności nazywane są *punktowo rekurencyjnymi*. Z drugiej strony, gdy $\alpha \leq d$, zbiory jednoelementowe są polarne, a więc (X_t) nie jest punktowo rekurencyjny, czyli prawie na pewno proces (X_t) omija dowolny ustalony punkt.

Gdy $\alpha \geq d$, u_0 jest stale nieskończone, a więc $\int_0^\infty \int_E p_t(y-x)dydt = \infty$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}^d$ i dowolnego zbioru E dodatniej miary Lebesgue'a. Oznacza to, że prawie na pewno zachodzi nieskończenie wiele spośród zdarzeń $A_n = \left\{\exists_{t\in[n,n+1)} X_t \in E\right\}$, a więc proces (X_t) prawie na pewno odwiedza E nieskończenie wiele razy. Tę własność procesu nazywamy *rekurencyjnością*. Jeśli zaś $\alpha < d$, to analogicznie $\int_0^\infty \int_E p_t(y-x)dydt < \infty$, o ile E ma skończoną miarę, a więc prawie na pewno zachodzi skończenie wiele zdarzeń A_n. Oznacza to, że $|X_t| \to \infty$ z prawdopodobieństwem 1, czyli proces (X_t) jest *tranzytywny*.

W szczególności ruch Browna jest punktowo rekurencyjny na prostej ($d = 1$), rekurencyjny, lecz nie punktowo rekurencyjny na płaszczyźnie ($d = 2$) oraz tranzytywny w przestrzeniach co najmniej trójwymiarowych, a więc również w najbardziej interesującym z fizycznego punktu widzenia przypadku $d = 3$.

2.3 Funkcje harmoniczne, zagadnienie Dirichleta i ruch Browna

W tym podrozdziale przedstawiony jest klasyczny związek między funkcjami harmonicznymi i ruchem Browna. Stanowi on motywację pojęcia α-harmoniczności opisanego w następnej części.

Jak już zostało stwierdzone, funkcję f nazywamy harmoniczną w otwartym zbiorze D, jeśli f jest klasy C^2 w D oraz $\Delta f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in D$, gdzie $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ jest operatorem Laplace'a. Warunkiem równoważnym jest ciągłość f w D i następująca własność wartości średniej: dla każdej kuli domkniętej $\overline{B}(x,r) \subseteq D$ wartość $f(x)$ jest równa średniej wartości f na sferze $\partial B(x,r)$. Ponadto wiadomo, że wartość $f(y)$ dla $y \in B(x,r)$ wyraża się przez całkę z wartości f na $\partial B(x,r)$ względem miary, której gęstość względem miary powierzchniowej na sferze $\partial B(x,r)$ jest *jądrem Poissona*:

$$P_{B(x,r)}(y,z) = \frac{1}{r\omega_{d-1}} \frac{r^2 - |y-x|^2}{|z-y|^d} \qquad \text{gdy } y \in B(x,r),\ z \in \partial B(x,r).$$

Przez ω_{d-1} oznaczamy całkowitą miarę powierzchniową $\partial B(0,1)$ w $\mathbf{R}^d$. Wzór ten został odkryty (dla $d=2$ i $d=3$) przez Siméona Poissona na początku XIX wieku.

Rozważmy ruch Browna (X_t) startujący z x i zatrzymany w chwili wyjścia z kuli $B(x,r)$. Z symetrii i ciągłości trajektorii wynika, że rozkład $X(\tau_{B(x,r)})$ względem $\mathbf{P}_x$ jest rozkładem jednostajnym na $\partial B(x,r)$. Zatem f jest harmoniczna w D wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w D i dla każdej kuli $B = B(x,r)$, której domknięcie zawiera się w D (tzn. $B \Subset D$), zachodzi $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_B))$.

Co więcej, dla dowolnego otwartego $B \Subset D$ zachodzi $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_B))$ dla wszystkich $x \in D$. Oczywiście gdy $x \in D$, lecz $x \notin \overline{B}$, to $\tau_B = 0$ prawie na pewno, więc rozważana równość jest nietrywialna tylko dla $x \in \overline{B}$.

Gdy $B = B(x,r)$ jest kulą, powyższa własność oznacza, że gęstość $\mathbf{P}_y$-rozkładu $X(\tau_B)$ względem miary powierzchniowej na ∂B jest dana przez jądro Poissona $P_B(y,z)$. Za pomocą ruchu Browna można zatem rozwiązać zagadnienie Dirichleta w kuli.

Gdy D jest ograniczonym obszarem (tj. spójnym zbiorem otwartym), zaś f_0 funkcją ciągłą na ∂D, to możemy określić:

$$f(x) = \mathbf{E}_x f_0(X(\tau_D)) \qquad \text{dla } x \in \overline{D}. \tag{1}$$

Wówczas f jest ciągła i harmoniczna w D. Dowodzi się, że jeśli dla pewnego punktu $x \in \partial D$ zachodzi $\mathbf{P}_x(\tau_D = 0) = 1$, to $\mathbf{P}_y$-rozkłady $X(\tau_D)$ słabo zbiegają do ε_x gdy $y \in \overline{D}$ zbiega do x. Z tej własności wynika ciągłość f w x i równość $f(x) = f_0(x)$. Jeśli więc $\mathbf{P}_x(\tau_D = 0) = 1$ dla wszystkich $x \in \partial D$, to f jest rozwiązaniem Dirichleta na zbiorze D z warunkiem brzegowym f_0. Ten fakt został po raz pierwszy zaobserwowany przez Kakutaniego [56, 57].

Jeśli $\mathbf{P}_x(\tau_D = 0) = 1$ dla pewnego $x \in D^c$, to x nazywa się *punktem regularnym* dla D^c. Jeśli $x \in \overline{D}^c$, to oczywiście x jest regularny dla D^c. Stwierdzenie, że x jest nieregularny dla D^c oznacza, że $x \in D^c$ i x nie jest regularny dla D^c, a więc punkty z D nie są ani regularne, ani nieregularne dla D^c. Te definicje stosuje się dla dowolnego procesu Markowa, w szczególności zatem dla wszystkich symetrycznych procesów stabilnych, choć oczywiście pojęcie punktu regularnego zależy od samego procesu.

Dowodzi się, że zbiór punktów nieregularnych dla D^c zawsze ma zerową pojemność Newtona (lub pojemność Riesza w przypadku procesu α-stabilnego). Oznacza to, że wzór (1) określa rozwiązanie Dirichleta, które spełnia warunek brzegowy $f(x) = f_0(x)$ oraz warunek ciągłości na brzegu poza być może zbiorem polarnym.

W przypadku kul i zbiorów o odpowiednio regularnym brzegu (np. obszarów z brzegiem $C^{1,1}$, obszarów Lipschitza lub zbiorów κ-grubych, por. rozdział 3.) wszystkie punkty brzegowe są regularne dla D^c. Najprostszym przykładem punktu nieregularnego dla D^c jest 0 w przypadku zbioru $D = B(0,1) \setminus \{0\}$ w przestrzeni co najmniej dwuwymiarowej.

Źródłem związku ruchu Browna z funkcjami harmonicznymi i potencjałami Newtona jest to, że generatorem infinitezymalnym półgrupy przejścia ruchu Browna jest laplasjan. Oznacza to, że jeśli f jest funkcją klasy $C^2(\mathbf{R}^d)$ o ograniczonych drugich pochodnych cząstkowych, to:

$$\frac{P_t f(x) - f(x)}{t} \to \Delta f(x)$$

jednostajnie względem $x \in \mathbf{R}^d$. W następnym podrozdziale opisany jest generator infinitezymalny półgrupy przejścia symetrycznego procesu α-stabilnego, tam można znaleźć również więcej ogólnych informacji o generatorach infinitezymalnych.

2.4 Funkcje α-harmoniczne i ułamkowy laplasjan

Naszym celem jest wprowadzenie pojęcia α-harmoniczności, które tak miałoby się do procesu α-stabilnego ($0 < \alpha < 2$), jak harmoniczność ma się do ruchu Browna. Zgodnie z wynikami Kakutaniego, funkcje α-harmoniczne powinny być swoimi średnimi względem rozkładu $X(\tau_D)$. Zauważmy jednak, że w przypadku procesów skokowych rozkład $X(\tau_D)$ nie musi być skupiony na ∂D; w ogólności można tylko stwierdzić, że nośnik tego rozkładu jest podzbiorem D^c. Dlatego aby stwierdzić, czy funkcja f jest α-harmoniczna w D, musimy znać wartości f na całej przestrzeni $\mathbf{R}^d$.

Dla $\alpha \in (0, 2)$ nieujemną funkcję $f : \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$ nazywamy *α-harmoniczną* w otwartym zbiorze D, jeśli dla wszystkich otwartych $B \Subset D$ zachodzi $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_B))$, $x \in D$. Tę własność nazywamy *własnością wartości średniej względem rozkładu $X(\tau_B)$*, lub krócej *własnością wartości średniej na B*, jeśli nie prowadzi to do niejednoznaczności. Jeśli f jest α-harmoniczna i $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \notin D$, to f nazywamy *singularnie α-harmoniczną*. Jeśli zaś $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_D))$ dla wszystkich $x \in D$, to f nazywamy *regularnie α-harmoniczną*.

Podobnie można zdefiniować harmoniczność funkcji względem tzw. procesów Hunta, czyli lewostronnie quasi-ciągłych procesów mających mocną własność Markowa [18]. Obie te własności opisane są poniżej.

Nieujemną zmienną losową τ o wartościach w $[0, \infty]$ nazywa się *czasem Markowa*, jeśli $\{\tau \le t\}$ jest zdarzeniem mierzalnym względem $\mathcal{F}_t$ dla każdego $t \ge 0$. Dowodzi się, że czas τ_E pierwszego wyjścia z dowolnego zbioru borelowskiego E jest czasem Markowa. Ponadto jeśli τ_1, τ_2 są czasami Markowa, to $\min(\tau_1, \tau_2)$ i $\max(\tau_1, \tau_2)$ są również czasami Markowa. Często wykorzystuje się ten fakt, gdy τ_2 jest nielosowy, tj. $\tau_2 = t$ dla pewnego $t \ge 0$.

Przypomnijmy, że z prawa 0-1 Blumenthala wynika, że zdarzenie $\{\tau_D = 0\}$ zachodzi z prawdopodobieństwem 0 lub 1. Punkt $x \in D^c$ nazywamy *regularnym* dla D^c jeśli $\mathbf{P}_x(\tau_D = 0) = 1$ oraz *nieregularnym* dla D^c, gdy $\mathbf{P}_x(\tau_D = 0) = 0$. Ponadto zbiór punktów nieregularnych dla D^c jest polarny.

Ważną cechą procesu (X_t) jest *mocna własność Markowa*. Oznacza ona, że jeśli τ jest prawie na pewno skończonym czasem Markowa, rozkład warunkowy procesu $(X_{\tau+t})$ pod warunkiem $X_\tau = x$ jest taki sam, jak rozkład (X_t) względem $\mathbf{P}_x$. Bardziej formalnie definiujemy operator przesunięcia θ_τ tak, aby $X_t(\theta_\tau(\omega)) = X_{t+\tau(\omega)}(\omega)$ prawie na pewno. Jeśli teraz Z jest ograniczoną lub nieujemną funkcją mierzalną względem $\mathcal{F}_\infty$, to:

$$\mathbf{E}_x(Z \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}_{X(\tau)} Z \,, \qquad \mathcal{F}_\tau = \sigma\{A \cap \{\tau \le t\} \,:\, t \ge 0 \,,\, A \in \mathcal{F}_t\} \,. \tag{2}$$

Mocna własność Markowa w kontekście teorii potencjału stosowana jest często w następujący sposób. Niech f będzie funkcją spełniającą $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_D))$ dla $x \in D$.

Rozważmy zbiór otwarty $B \subseteq D$ i określmy $\tau = \tau_B$ oraz $Z = f(X(\tau_D))$. Zauważmy, że skoro zbiór punktów nieregularnych dla D^c jest polarny, to z prawdopodobieństwem $\mathbf{P}_x$ jeden $X(\tau_B)$ nie jest punktem nieregularnym dla D^c. Oznacza to, że $\tau_D \circ \theta_{\tau_B} = \tau_D$ prawie na pewno, a więc mocna własność Markowa przybiera postać $\mathbf{E}_x(f(X(\tau_D))|\mathcal{F}_{\tau_B}) = \mathbf{E}_{X(\tau_B)} f(X(\tau_D)) = f(X(\tau_B))$. Biorąc wartość oczekiwaną $\mathbf{E}_x$ obu stron, otrzymujemy $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_B))$ dla wszystkich $x \in D$. Oznacza to, że jeśli f ma własność średniej na D, to ma tę własność również na każdnym podzbiorze otwartym zbioru D. W szczególności wynika stąd, że funkcje regularnie α-harmoniczne w D są α-harmoniczne w D.

Tak jak w przypadku klasycznym, możliwy jest inny, bardziej analityczny opis α-harmoniczności dla $\alpha \in (0,2)$ [18, 46, 65]. Na mocy twierdzenia Hille-Yosidy półgrupa operatorów przejścia (P_t) jest jednoznacznie opisana przez swój generator infinitezymalny, zdefiniowany następująco. Załóżmy, że operatory P_t działają na przestrzeni Banacha X; w dalszej części rozważamy X równe $C_0(\mathbf{R}^d)$, $L^2(\mathbf{R}^d)$ lub $L^1(\mathbf{R}^d)$. Określamy operator nieograniczony L_X wzorami:

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(L_X) &= \left\{ f \in X : \lim_{t \searrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} \text{ istnieje w normie } X \right\}, \\ L_X f(x) &= \lim_{t \searrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} \quad \text{dla } f \in \mathrm{Dom}(L_x) . \end{aligned}$$

Dla $\alpha = 2$ operator $L_{C_0(\mathbf{R}^d)}$ jest klasycznym laplasjanem, zaś $L_{L^2(\mathbf{R}^d)}$ jest rozszerzeniem laplasjanu na $L^2(\mathbf{R}^d)$, zdefiniowanym np. poprzez transformatę Fouriera wzorem $(L_{L^2(\mathbf{R}^d)} f)\hat{}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{f}(\xi)$. Generator symetrycznego procesu stabilnego w przypadku $\alpha < 2$ jest tzw. ułamkowym laplasjanem. Zachodzi bowiem $(L_{L^2(\mathbf{R}^d)} f)\hat{}(\xi) = -|\xi|^\alpha \hat{f}(\xi)$, a więc $(-L_{L^2(\mathbf{R}^d)})$ jest nieujemnie określonym operatorem ograniczonym, który jest ułamkową potęgą (o wykładniku $\frac{\alpha}{2}$) operatora $(-\Delta_{L^2(\mathbf{R}^d)})$. Ponadto podobnie jak w przypadku klasycznym, jeśli tylko $\alpha < d$, to generator $L_{L^2(\mathbf{R}^d)}$ jest operatorem odwrotnym do operatora potencjału U działającego na $L^2(\mathbf{R}^d)$.

Jeśli $\alpha < 2$ i f jest funkcją ciągłą z dziedziny $L_{C_0(\mathbf{R}^d)}$, to zachodzi wzór:

$$L_{C_0(\mathbf{R}^d)} f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{A}_{d,-\alpha} \int_{B(x,\varepsilon)^c} \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|^{d+\alpha}} dy . \tag{3}$$

Niecałkowalna w otoczeniu 0 funkcja $\nu(y - x) = \mathcal{A}_{d,-\alpha} |y - x|^{-d-\alpha}$ jest gęstością miary Lévy'ego, która pojawia się w rozkładzie Lévy'ego-Chinczyna procesu (X_t). Pozostałe składowe rozkładu Lévy'ego-Chinczyna, a więc dryf i część gaussowska, w rozkładzie procesu (X_t) się nie pojawiają.

Wzór (3) pozwala definiować generator $Lf(x)$ w punkcie x także wtedy, gdy f nie należy do dziedziny $L_{C_0(\mathbf{R}^d)}$ (bądź generatora na innej przestrzeni). Okazuje się, że funkcja f jest α-harmoniczna w D wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w D oraz $Lf(x) = 0$ dla wszystkich $x \in D$.

Podstawowa różnica między pojęciem α-harmoniczności w D, gdy $0 < \alpha < 2$, i pojęciem harmoniczności w D polega na tym, że funkcje α-harmoniczne muszą być określone na całej przestrzeni $\mathbf{R}^d$. Wiąże się to z występowaniem skoków w trajektoriach symetrycznego procesu α-stabilnego. Z tego samego powodu zasadne jest rozważanie α-harmoniczności w dowolnym, niekoniecznie spójnym zbiorze otwartym. W rozdziale 3. przedstawiony jest kompletny opis funkcji α-harmonicznych w dowolnym zbiorze otwartym. Pojęcie α-harmoniczności w D zostaje tam rozszerzone tak, aby objąć obiekty będące funkcjami w D i miarami w D^c.

2.5 Miara α-harmoniczna i α-funkcja Greena

Trajektorie symetrycznego procesu α-stabilnego nie są lewostronnie ciągłe, lecz dla ustalonej chwili t prawie na pewno zachodzi $\lim_{s \nearrow t} X_s = X_t$. Co więcej, jeśli τ_n jest niemalejącym ciągiem czasów Markova i $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$, to prawie na pewno $\tau = \infty$ lub $X(\tau_n) \to X(\tau)$. Tę własność nazywa się czasem *lewostronną quasi-ciągłością* procesu (X_t)[5].

Jeśli D_n jest wstępującym ciągiem zbiorów otwartych o sumie D, to oczywiście τ_{D_n} jest niemalejącym ciągiem czasów Markowa. Niech $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_{D_n}$. Oczywiście $\tau_{D_n} \le \tau_D$, więc $\tau \le \tau_D$. Z drugiej strony wobec lewostronnej quasi-ciągłości, prawie na pewno $\tau = \infty$ lub $X(\tau) = \lim_{n\to\infty} X(\tau_{D_n})$. Ponieważ $X(\tau_{D_n}) \notin D_k$ jeśli $n \ge k$, więc w drugim przypadku otrzymujemy $X(\tau) \notin D_k$ dla wszystkich k, a więc $X(\tau) \notin D$. Zatem w obu przypadkach albo $\tau_D \le \tau$, albo $\tau = 0$ i $\tau_D > 0$. Ta druga możliwość zachodzi z dodatnim prawdopodobieństwem $\mathbf{P}_x$ tylko wtedy, gdy x jest nieregularny dla D^c i jest regularny dla wszystkich D_n, w szczególności więc $x \notin D$. Ostatecznie otrzymaliśmy zbieżność prawie na pewno τ_{D_n} do τ_D oraz $X(\tau_{D_n})$ do $X(\tau_D)$ (wtedy, gdy τ_D jest skończony) względem każdego $\mathbf{P}_x$ dla $x \in D$.

Gdy τ_D jest skończony prawie na pewno, rozkład zmiennej $X(\tau_D)$ nazywany jest *miarą α-harmoniczną* zbioru D (dla $\alpha = 2$ mówi się, że ω_D^x jest po prostu *miarą harmoniczną* zbioru D). Rozkład względem $\mathbf{P}_x$ oznacza się ω_D^x. W przypadku gdy $\tau_D = \infty$ z dodatnim prawdopodobieństwem, przyjmuje się, że $\omega_D^x(E) = \mathbf{P}_x(\tau_D < \infty, X(\tau_D) \in E)$. Funkcja f jest zatem α-harmoniczna w D wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = \int f(y) \omega_B^x(dy)$ dla $B \Subset D$ oraz $x \in D$.

Jeśli D_n jest wstępującym ciągiem zbiorów otwartych o sumie D, to ze zbieżności $X(\tau_{D_n})$ do $X(\tau_D)$ wynika słaba zbieżność miar α-harmonicznych $\omega_{D_n}^x$ do ω_D^x dla $x \in D$.

Z mocnej własności Markowa wynika, że jeśli $B \subseteq D$ i $E \subseteq D^c$, to dla wszystkich $x \in \mathbf{R}^d$ zachodzi $\omega_D^x(E) = \int \omega_D^y(E) \omega_B^x(dy)$. W szczególności zatem $\omega_B^x(E) \le \omega_D^x(E)$ oraz $\omega_D^x(E)$ jest regularnie α-harmoniczną funkcją $x \in D$.

Niech D będzie zbiorem otwartym, zaś E zbiorem borelowskim. Wówczas zachodzi:

$$\mathbf{P}_x(X_t \in E) = \mathbf{P}_x(t < \tau_D; X_t \in E) + \mathbf{E}_x(t \ge \tau_D; \mathbf{P}_{X(\tau_D)}(X(t - \tau_D) \in E)),$$

gdzie wartość oczekiwana po prawej stronie rozumiana jest jako $\mathbf{E}_x f(\tau_D, X(\tau_D))$, gdzie $f(s, y) = \mathbf{P}_y(X(t - s) \in E)$ gdy $t > s$ oraz $f(s, y) = 0$ w przeciwnym przypadku. Powyższy wzór jest konsekwencją mocnej własności Markowa procesu $(s+t, X_t)$[6], wynika z niego, że $\mathbf{P}_x(t < \tau_D; X_t \in E) = \int_E p_t^D(x, y) dy$, gdzie:

$$p_t^D(x, y) = p_t(y - x) - \mathbf{E}_x(t \ge \tau_D; p_{t-\tau_D}(y - X(\tau_D))).$$

Jądro $p_t^D(x, y)$ wyznacza półgrupę operatorów $P_t^D f(x) = \int p_t^D(x, y) f(y) dy$. Zachodzi $P_t^D f(x) = \mathbf{E}_x(t < \tau_D; f(X_t))$. Jest to tzw. *półgrupa procesu zabitego przy wyjściu z D*. Dowodzi się, że $p_t^D(x, y) = p_t^D(y, x)$, a więc P_t^D są samosprzężone. Jeśli D jest ograniczony, to P_t^D są operatorami Hilberta-Schmidta na $L^2(D)$. W rozdziale 4. opisane są pewne wyniki dotyczące wartości własnych i funkcji własnych tych operatorów. Wzorując się na

[5] W angielskim tłumaczeniu książki Dynkina stosowany jest termin *quasi-continuity from the left*, Bliedtner i Hansen wolą określenie *quasi-left continuous*. Autorowi bardziej uzasadnione wydaje się stosowanie przedrostka *quasi* do słowa *ciągłość*.

[6] Należy obrać $\tau = \min(\tau_D, t)$ oraz $Z = \mathbf{1}_E(X_{t-s})$ gdy $t - s \ge 0$, $Z = 0$ w przeciwnym przypadku. Wówczas $Z \circ \theta_\tau = Z \mathbf{1}_{t \ge \tau_D}$. Stąd i z mocnej własności Markowa wynika, że $\mathbf{E}_{s,x}(Z \mathbf{1}_{t \ge \tau_D}) = \mathbf{E}_{s,x}(\mathbf{E}_{s+\tau, X_\tau} Z)$, skąd, przyjąwszy $s = 0$, otrzymujemy $\mathbf{P}_x(t \ge \tau_D; X_t \in E) = \mathbf{E}_x(\mathbf{P}_{X(\tau)}(X_{t-\tau} \in E))$.

związku jądra $p_t(y-x)$ z potencjałem Riesza, można zdefiniować *funkcję Greena* zbioru D za pomocą jądra $p_t^D(x,y)$:

$$G_D(x,y) = \int_0^\infty p_t^D(x,y)dt\,.$$

Oczywiście $G_D(x,y) = G_D(y,x)$ oraz $G_{\mathbf{R}^d}(x,y) = U_0(y-x)$. Jeśli D_n jest wstępującym ciągiem zbiorów otwartych sumujących się do D, to $G_{D_n}(x,y) \nearrow G_D(x,y)$ dla $x,y \in D$. Ponadto jeśli $B \subseteq D$, to z mocnej własności Markowa wynika, że:

$$\begin{aligned} p_t^D(x,y) &= p_t^B(x,y) + \mathbf{E}_x(t \geq \tau_B; p_t^D(X(\tau_B),y))\,, \\ G_D(x,y) &= G_B(x,y) + \mathbf{E}_x G_D(X(\tau_B),y)\,. \end{aligned}$$

W szczególności $G_D(x,y)$ jest funkcją singularnie α-harmoniczną zmiennej $x \in D \setminus \{y\}$. Gdy $\alpha \geq D$ i D^c jest zbiorem polarnym, to $G_D(x,y)$ jest stale nieskończone. W przeciwnym przypadku D nazywamy zbiorem Greena; wówczas $G_D(x,y)$ może być nieskończone tylko dla $x = y$. Jądro $G_D(x,y)$ wyznacza *operator Greena*, oznaczany również symbolem G_D. Zachodzi $G_D f(x) = \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_D} f(X_t)dt$. Ponadto, zgodnie z oczekiwaniami, G_D jest operatorem odwrotnym do generatora półgrupy (P_t^D). Związek między generatorami infinitezymalnymi półgrup (P_t^D) i (P_t) jest bliżej opisany w rozdziale 4.

Określenie "funkcja Greena" wprowadzone zostało przez George'a Greena w pierwszej połowie XIX wieku w związku z rozważaniami dotyczącymi laplasjanu w obszarach ograniczonych, a więc przypadku klasycznego $\alpha = 2$. Operator potencjału Newtona pozwala znajdować funkcje f o zadanym laplasjanie, zaś miara harmoniczna (jądro Poissona) pozwala rozwiązywać zagadnienie Dirichleta. Stosując funkcję Greena i miarę harmoniczną, można rozwiązać ogólniejsze zagadnienia, łączące wspomniane dwa: $\Delta f(x) = \rho(x)$ dla $x \in D$ oraz $f(x) = f_0(x)$ dla $x \in \partial D$ (poza zbiorem polarnym). Rozwiązanie jest dane wzorem $f(x) = \int f_0(y)\omega_D^x(dy) - \int G_D(x,y)\rho(y)dy$.

Klasyczne pojęcie funkcji Greena zostało rozszerzone i obecnie w teorii równań różniczkowych oznacza jądra operatorów całkowych rozwiązujących niejednorodne eliptyczne równania różniczkowe (lub pseudoróżniczkowe) z warunkami brzegowymi. W języku terii potencjału procesów Markowa odpowiada to dokładnie funkcji Greena zdefiniowanej powyżej.

Gdy $\alpha = 2$ i gdy dziedzina D jest dostatecznie regularna, istnieją silne związki między funkcją Greena i miarą harmoniczną. Jeśli D ma brzeg klasy C^2, miara harmoniczna jest absolutnie ciągła względem miary powierzchniowej na ∂D z gęstością $P_D(x,y)$ nazywaną *jądrem Poissona* zbioru D i równą wewnętrznej pochodnej normalnej funkcji Greena na brzegu. Gdy brzeg D jest nieco mniej regularny (np. gdy D jest tzw. obszarem z brzegiem dostępnym niestycznie), granica $G_D(x_1,z)/G_D(x_2,z)$, gdy z dąży do $y \in \partial D$ (tzw. *jądro Martina* zbioru D), jest gęstością miary $\omega_D^{x_1}(dy)$ względem $\omega_D^{x_2}(dy)$ (por. rozdział 3.).

W przypadku procesów skokowych ($\alpha < 2$), związki między miarą α-harmoniczną i funkcją Greena są innego typu. Zachodzi bowiem wzór Ikedy-Watanabe [53]:

$$\omega_D^x(E) = \int_E \int_D G_D(x,z)\nu(y-z)dzdy\,, \qquad E \subseteq \overline{D}^c, x \in D\,. \tag{4}$$

Tutaj $\nu(y-z) = \mathcal{A}_{d,-\alpha}|y-z|^{-d-\alpha}$ jest gęstością miary Lévy'ego procesu (X_t). Funkcję $P_D(x,y) = \int_D G_D(x,z)\nu(y-z)dz$ nazywa się często również *jądrem Poissona*. Należy jednak pamiętać, że jest to gęstość ω_D^x względem miary Lebesgue'a na $\overline{D}^c$ (a nie miary powierzchniowej na ∂D), oraz $P_D(x,y)$ niesie pełną informację o ω_D^x tylko przy założeniu pewnej regularności ∂D, bowiem miara α-harmoniczna ∂D w ogólności może być dodatnia. Taka sytuacja ma miejsce np. dla $D = (-1,0) \cup (0,1) \subseteq \mathbf{R}$ w przypadku $\alpha > 1$ — wówczas $\omega_D^x(\{0\}) > 0$. W rozdziale 3. wzór (4) zostanie rozszerzony na nieco szerszą klasę zbiorów E, zostanie też podany pełniejszy opis miar α-harmonicznych ω_D^x. Podkreślmy, że $P_D(x,y)$ nie jest funkcją α-harmoniczną zmiennej $x \in D$, ale już dla dowolnej funkcji f_0 o nośniku w D^c, funkcja $f_0(x) + \int P_D(x,y) f_0(y) dy$ jest α-harmoniczna w D.

Dla kuli znany jest jawny wzór wyrażający jądro Poissona kuli dla procesu skokowego ($\alpha < 2$):

$$P_{B(x,r)}(y,z) = c_{d,\alpha} \left(\frac{r^2 - |y-x|^2}{|z-x|^2 - r^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{|y-z|^d}, \qquad y \in B(x,r)\,,\ z \notin B(x,r)\,,$$

gdzie $c_{d,\alpha} = \pi^{-1-\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})$. Jak już zostało stwierdzone, w tym przypadku miara α-harmoniczna brzegu jest równa zero.

Pewnym uogólnieniem wzoru (4) jest tzw. wzór Dynkina [46, 20]:

$$f(x) = \int f(y) \omega_D^x(dy) - \int G_D(x,y) L f(y) dy\,. \tag{5}$$

O funkcji f należy założyć, że jest w dziedzinie tzw. słabego generatora półgrupy (P_t). Będziemy używać tego wzoru w przypadku, gdy f jest funkcją klasy C^2 (a więc należy nawet do $\mathrm{Dom}(L_{C_0(\mathbf{R}^d)})$) lub gdy $f \in \mathrm{Dom}(L_{L^1(\mathbf{R}^d)})$.

3 Brzegowa nierówność Harnacka i reprezentacja Martina funkcji α-harmonicznych

W tym rozdziale przedstawione są wyniki dotyczące brzegowej teorii potencjału skokowych symetrycznych procesów stabilnych uzyskane we współpracy z Krzysztofem Bogdanem i Tadeuszem Kulczyckim i opisane w pracy [I]. Wpierw krótko przypomniane są wyniki dotyczące ruchu Browna, później zamieszczony jest opis pracy [I], na końcu nasze rezultaty porównane są z wcześniejszymi wynikami w tej dziedzinie.

3.1 Laplasjan i ruch Browna — przypadek klasyczny

W tym podrozdziale zakładamy, że $d \geq 2$. Jednym z najbardziej podstawowych wyników w klasycznej teorii potencjału jest *nierówność Harnacka*, udowodniona w przypadku dwuwymiarowym przez Carla Gustava Axela Harnacka w pracy z 1887 roku. Mówi ona, że jeśli funkcja f jest harmoniczna w kuli $B(x,r)$, to dla $y \in B(x,r)$:

$$\frac{R^{d-2}(R - |y-x|)}{(R + |y-x|)^{d-1}} f(x) \leq f(y) \leq \frac{R^{d-2}(R + |y-x|)}{(R - |y-x|)^{d-1}} f(x)\,.$$

Ten stosunkowo łatwo wynikający z postaci jądra Poissona rezultat ma bardzo ważne zastosowania. Pozwala m.in. stwierdzić, że każdy rosnący i ograniczony w pewnym punkcie $x_0 \in D$ ciąg funkcji harmonicznych w obszarze D zbiega do funkcji harmonicznej, a zbieżność jest jednostajna na każdym zwartym podzbiorze D (tzw. *zasada Harnacka*). Z nierówności Harnacka łatwo wynikają również oszacowania gradientu funkcji harmonicznych.

Zasada Harnacka opisuje zachowanie funkcji harmonicznych wewnątrz obszaru, w którym funkcja jest harmoniczna. W teorii potencjału dość często ma miejsce następująca sytuacja. W obszarze D potencjał f jest harmoniczny (w D nie ma ładunku elektrycznego), a na pewnym kawałku brzegu $F \subseteq \partial D$ potencjał jest stały (tzn. ów kawałek brzegu jest przewodnikiem prądu); po dodaniu odpowiedniej stałej, możemy przyjąć, że $f(x) = 0$ dla $x \in F$. Zachowanie f w pobliżu F zależy od regularności brzegu D — w punktach zbioru F nieregularnych dla D^c potencjał nie musi nawet maleć do zera, natomiast jeśli F jest zbiorem klasy C^2, to istnieje pochodna normalna f na F. Okazuje się jednak, że przy pewnych założeniach na regularność F, wszystkie *nieujemne* potencjały o powyższych własnościach są w pobliżu F ze sobą porównywalne. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie (Brzegowa nierówność Harnacka dla funkcji harmonicznych)**.** *Załóżmy, że D jest obszarem w $\mathbf{R}^d$, zaś K — zwartym podzbiorem zbioru otwartego G. Załóżmy ponadto, że brzeg D jest dostatecznie regularny (zob. poniżej). Jeśli f_1, f_2 są nieujemnymi funkcjami harmonicznymi w D, ciągłymi na $\overline{D}$ poza punktami nieregularnymi dla D^c i równymi zero na $\partial D \cap G$, to:*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq C_{D,G,K} \frac{f_1(y)}{f_2(y)}, \qquad\qquad x, y \in K.$$

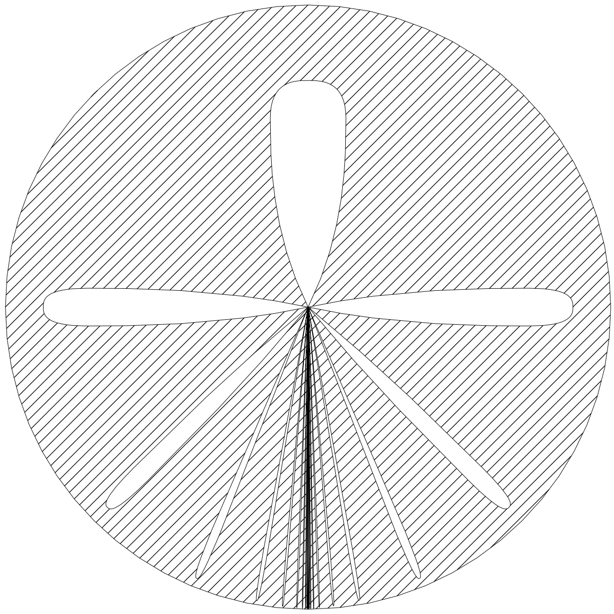
Twierdzenie to dla gładkich obszarów na płaszczyźnie było znane już w latach 50. XX wieku, dowód wykorzystywał metody analizy zespolonej. W ogólnym przypadku ($d \geq 2$) sformułowane zostało po raz pierwszy dla obszarów Lipschitza[7] przez Kempera w 1972 roku [58], lecz dowód tego autora zawierał błąd. Poprawny dowód opublikowali niezależnie od siebie Dahlberg w 1977 roku [37] oraz rok później Ancona [4] i Wu [78]. W następnych latach kolejni autorzy osłabiali założenia regularności w brzegowej nierówności Harnacka, wspomnijmy tu jedynie dwie prace. Jerison i Kenig [55] rozważali *obszary z brzegiem dostępnym niestycznie* (ang. *nontangentially accessible domain*, *NTA domain*). Autorzy ci udowodnili ponadto hölderowską ciągłość ilorazów funkcji harmonicznych w K. Bass i Burdzy [15] uogólnili brzegową nierówność Harnacka na skręcone obszary Höldera.

Założeń o regularności brzegu w brzegowej nierówności Harnacka nie można całkiem opuścić. Przykład zbioru, dla którego to twierdzenie nie zachodzi, zamieszczony jest na rysunku 1.

Brzegowa nierówność Harnacka jest ważnym narzędziem zarówno w rachunku prawdopodobieństwa, jak i teorii potencjału, dlatego wciąż jest przedmiotem zainteresowania [1, 61]. Stosowana była m.in. do badania rozkładów wycieczek ruchu Browna (ang. *Brownian excursions*) [28], oszacowań funkcji Greena (twierdzenie 3G) [3, 22, 52] czy tzw. *conditional gauge theorem* [36, 35]. Za pomocą brzegowej nierówności Harnacka można również badać stopień regularności brzegu [2].

Zagadnieniem związanym pośrednio z brzegową nierównością Harnacka jest opis nieujemnych funkcji harmonicznych w obszarze $D \subseteq \mathbf{R}^d$. Jeśli D jest ograniczony i ma gładki brzeg, to można określić jądro Poissona zbioru D. Można udowodnić, że każda nieujemna funkja harmoniczna w D jest wówczas postaci $\int_{\partial D} P_D(x, y) \mu(dy)$ dla pewnej skończonej i wyznaczonej jednoznacznie miary borelowskiej μ na ∂D. Ogólny przypadek rozważany był przez Roberta S. Martina [67]. Udowodnił on, że każda nieujemna funkcja

[7] Obszar D nazywany jest obszarem Lipschitza, jeśli jego brzeg można przedstawić jako sumę izometrycznych obrazów wykresów funkcji lipschitzowskich.



Rysunek 1: Przykład zbioru o nieregularnym brzegu, dla którego nie zachodzi brzegowa nierówność Harnacka. Istnieje nieskończenie wiele minimalnych funkcji α-harmonicznych z brzegu Martina z biegunem w środku koła

---

harmoniczna w obszarze ograniczonym D (bez żadnych założeń o regularności ∂D) jest całkową średnią z minimalnych funkcji harmonicznych. Nieujemną funkcją harmoniczną f nazywa się minimalną, jeśli jedynymi nieujemymi funkcjami harmonicznymi nie większymi od f są funkcje cf, $c \in [0, 1]$. Zbiór wszystkich minimalnych funkcji harmonicznych w D, które w ustalonym punkcie $x_0 \in D$ przyjmują wartość 1, czyli tzw. *brzeg Martina* D, oznaczmy przez $\partial_M D$. Na $\partial_M D$ możemy wprowadzić topologię zadaną przez zbieżność jednostajną na każdym zwartym podzbiorze D, albo metrykę L^2 na pewnej kuli $B(x_0, r_0) \Subset D$ (na mocy nierówności Harnacka obie metody prowadzą do tej samej topologii). Wówczas dowolna nieujemna funkcja harmoniczna w D jest postaci $\int_{\partial_M D} f(x)\mu(df)$, gdzie μ jest pewną skończoną i wyznaczoną jednoznacznie miarą borelowską na $\partial_M D$.

Jeśli utożsamimy punkt $y \in D$ z funkcją $f_y(x) = G_D(x, y)/G_D(x_0, y)$ zmiennej $x \in D$ (przyjmujemy $f_0(x) = 0$), to topologia D pokrywa się z topologią wyznaczoną przez zbieżność w $L^2(B(x_0, r_0))$ na $\{f_y : y \in D\}$. Okazuje się, że $\{f_y : y \in D\} \cup \partial_M D$ jest uzwarceniem zbioru $\{f_y : y \in D\}$ względem metryki L^2 na $B(x_0, r_0)$, tzw. uzwarceniem Martina D. Oznacza to, że minimalne funkcje harmoniczne można przybliżać ilorazami funkcji Greena. W przypadku nieregularnych zbiorów, np. przedstawionego na rysunku 1., $\partial_M D$ może być istotnie różny od ∂D. Jeśli jednak D jest dostatecznie regularny (np. jest obszarem z brzegiem dostępnym niestycznie), to w każdym punkcie ∂D istnieje granica ilorazu funkcji Greena, zatem brzeg Martina pokrywa się z brzegiem topologicznym. W takim przypadku jedyną minimalną funkcję harmoniczną odpowiadającą punktowi $y \in \partial D$ nazywa się jądrem Martina i oznacza $M_D(x, y)$.

Pewien wgląd w strukturę brzegu Martina daje twierdzenie Nadirashvilego [70], mówiące o tym, że odwzorowanie $f \mapsto \nabla f(0)$ (przyjmujemy, że $f_{x_0} \mapsto \infty$) jest homeomorfizmem między uzwarceniem Martina obszaru D na płaszczyźnie, tzn. zbiorem $\{f_y : y \in D\} \cup \partial_M D$, ze zwartym podzbiorem dwuwymiarowej sfery $\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$.

3.2 Skokowe symetryczne procesy stabilne

Poniższe wyniki są udowonione w pracy [I]. Na potrzeby tego podrozdziału zakładamy, że $d \geq 1$ i $\alpha \in (0,2)$. Zanim przejdziemy do głównych twierdzeń, poczyńmy kilka uwag na temat funkcji α-harmonicznych (por. [I], rozdział 5).

Niech f będzie nieujemną funkcją α-harmoniczną w zbiorze otwartym $D \subseteq \mathbf{R}^d$ i niech D_n będzie wstępującym ciągiem zbiorów otwartych, spełniającym warunki $D_n \Subset D$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$. Załóżmy dodatkowo, że D_n mają dostatecznie regularny brzeg, np. że spełniają warunek stożka zewnętrznego. Wówczas $\omega^x_{D_n}(\partial D_n) = 0$, zatem $\omega^x_{D_n}$ jest skupiona na $\overline{D_n}^c$.

Funkcja f spełnia równanie:

$$f(x) = \int f(y)\omega^x_{D_n}(dy) = \int_{D^c} f(y)\omega^x_{D_n}(dy) + \int_{D\setminus D_n} f(y)\omega^x_{D_n}(dy)\,.$$

Zgodnie ze wzorem Ikedy-Watanabe (4), pierwszą z całek po prawej stronie tego równania można zapisać w postaci $\int_{D^c} P_{D_n}(x,y)f(y)dy$, gdzie $P_{D_n}(x,y) = \int G_{D_n}(x,z)\nu(y-z)dz$ jest jądrem Poissona dla procesu (X_t). Ponieważ $G_{D_n}(x,y) \nearrow G_D(x,y)$, rozważana całka zbiega do *całki Poissona* $P_D f(x) = \int P_D(x,y)f(y)dy$. W szczególności oznacza to, że $P_D f(x)$ jest skończone dla wszystkich $x \in D$.

Z drugiej strony funkcje $\int_{D\setminus D_n} f(y)\omega^x_{D_n}(dy)$ dla $n \geq k$ tworzą ciąg nierosnący nieujemnych funkcji regularnie α-harmonicznych w D_k, zatem ich granica $f^{(s)}$ jest nieujemną funkcją α-harmoniczną w D. Co więcej, $f^{(s)}(x) = 0$ dla wszystkich $x \in D^c$, zatem $f^{(s)}$ jest singularnie α-harmoniczna.

Udowodniliśmy zatem, że każda nieujemna funkcja f α-harmoniczna w D rozkłada się jednoznacznie na sumę całki Poissona $P_D f$ i funkcji singularnie α-harmonicznej $f^{(s)}$. Pojęcie całki Poissona funkcji w naturalny sposób uogólnia się do całek Poissona miar, określamy $P_D\mu(x) = \int P_D(x,y)\mu(dy)$.

Załóżmy, że K jest zwartym podzbiorem zbioru otwartego G. Istnieje wówczas zbiór otwarty G' spełniający warunek stożka zewnętrznego i warunek $K \subseteq G' \subseteq G$. Jeśli teraz f jest nieujemną funkcją α-harmoniczną w D, ciągłą na $\overline{D}$ poza punktami nieregularnymi dla D^c i równą zero na $G \setminus D$, to f spełnia te warunki również wtedy, gdy zbiory D i G zastąpimy zbiorami $D' = D \cap G'$ i G'. Wiemy ponadto, że $\omega^x_{D'}(\partial D' \setminus G) = 0$, skąd już wynika, że $f = P_{D'} f$. Dzięki temu w brzegowej nierówności Harnacka możemy bez straty ogólności rozważać całki Poissona zamiast funkcji α-harmonicznych.

Twierdzenie 1 (Brzegowa nierówność Harnacka dla funkcji α-harmonicznych; [I], Theorem 4)**.** *Załóżmy, że K jest zwartym podzbiorem zbioru otwartego G. Wówczas dla dowolnego D i całek Poissona $f_1 = P_D\mu_1, f_2 = P_D\mu_2$ nieujemnych miar μ o nośniku zawartym w $D^c \cap G^c$ zachodzi:*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq C_{G,K}\frac{f_1(y)}{f_2(y)}\,, \qquad x, y \in K \cap D\,. \tag{6}$$

Zaważmy, że brzegowa nierówność Harnacka dla funkcji α-harmonicznych zachodzi w dużo większej ogólności niż w klasycznym przypadku, nie ma bowiem żadnych założeń regularności brzegu D, zaś stała w nierówności (6) nie zależy od D.

Brzegową nierówność Harnacka najczęściej wykorzystuje się dla zbiorów $G = B(0,1)$ i $K = B(0,\frac{1}{2})$. Bardzo użyteczny jest następujący wynik, stanowiący główny krok w dowodzie Twierdzenia 1.

Twierdzenie 2 ([I], Lemma 7). *Niech D będzie zbiorem otwartym. Jeśli $f = P_D\mu$, to:*

$$\frac{1}{C} \le \frac{f(x)}{\Lambda_{0,\frac{1}{2}}(\mu)\mathbf{E}_x\tau_{D\cap B(0,1)}} \le C\,, \qquad\qquad x \in D \cap B(0,\tfrac{1}{2})\,, \tag{7}$$

gdzie $\Lambda_{0,r}(\mu) = \int_{B(0,r)^c} P_D\mu(y)\nu(y)dy + \int \nu(y)\mu(dy)$.

Powyższy wynik stwierdza, że funkcje α-harmoniczne (całki Poissona) są porównywalne ze średnim czasem życia procesu (X_t) w $D \cap B(0,1)$. Ciekawe jest, że analogiczne stwierdzenie w klasycznym przypadku jest fałszywe.

W dowodzie Twierdzenia 2 wykorzystuje się wzór Dynkina (5) dla funkcji f klasy C^2, równej 1 w $B(0,\frac{3}{4})$ i zero w $B(0,1)^c$, aby stwierdzić, że dla $x \in D \cap B(0,\frac{3}{4})$ miara α-harmoniczna dopełnienia kuli jednostkowej $\omega_D^x(B(0,1)^c)$ szacuje się przez średni czas wyjścia z $D\cap B(0,1)$ (Lemma 5). Następnie stosuje się tzw. regularyzację jądra Poissona, czyli uśrednienie jądra Poissona kul $B(0,r)$ dla r z pewnego przedziału. Pozwala to na oszacowanie f przez $C\Lambda_{0,\frac{3}{4}}(\mu)$ (Lemma 6). Te dwa wyniki połączone w odpowiedni sposób dają Twierdzenie 2.

Brzegowa nierówność Harnacka dla $G = B(0,1)$ i $K = \overline{B}(0,\frac{1}{2})$ jest natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 2. Aby udowodnić Twierdzenie 1 w ogólnym przypadku, trzeba dodatkowo wykorzystać nielokalność procesu (X_t), która pozwala porównać wartości f_1 i f_2 w odległych punktach niekoniecznie spójnego zbioru D.

Szczegółowe dowody powyższych twierdzeń zawarte są w rozdziale 3 artykułu [I]. W następnym rozdziale udowodnione jest twierdzenie o istnieniu granic ilorazów funkcji α-harmonicznych.

Twierdzenie 3 ([I], Lemma 8). *Dla każdego $r > 0$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli D jest zbiorem otwartym oraz $f_1 = P_D\mu_1$ i $f_2 = P_D\mu_2$, gdzie μ_1 i μ_2 są nieujemnymi miarami o nośniku zwartym w $D^c \cap B(x,r)^c$, to:*

$$\sup_{y,z\in D\cap B(x,\delta)} \frac{f_1(y)f_2(z)}{f_1(z)f_2(y)} \le 1 + \varepsilon\,. \tag{8}$$

Z powyższego twierdzenia wynika m.in., że istnieje granica $\frac{f_1(y)}{f_2(y)}$ przy $y \to x \in \partial D$, $y \in D$, a zbieżność jest jednostajna nie tylko ze względu na możliwe funkcje f_1 i f_2, ale również zbiory D, w których te funkcje są α-harmoniczne. Jest to wynik słabszy niż hölderowska ciągłość ilorazu funkcji harmonicznych wspomniana w poprzednim podrozdziale (do której potrzeba jednak założeń o regularności brzegu), lecz dużo mocniejszy od stwierdzenia, że granica istnieje dla każdych funkcji f_1 i f_2. Twierdzenie 3 w pełnej ogólności wykorzystane jest w dowodzie Twierdzenia 5 o reprezentacji Martina.

Dowód Twierdzenia 3 jest bardzo techniczny i dość żmudny, polega na konstrukcji coraz lepszych oszacowań ilorazu $\frac{f_1(y)f_2(z)}{f_1(z)f_2(y)}$ na coraz mniejszych zbiorach z wykorzystaniem brzegowej nierówności Harnacka.

Z Twierdzenia 3 wynika, że jeśli D jest zbiorem Greena (tj. $G_D(x,y)$ nie jest stale nieskończone), to w każdym punkcie $y \in \partial D$ istnieje granica ilorazu funkcji Greena:

$$M_D(x,y) = \lim_{z\to y, z\in D} \frac{G_D(x,z)}{G_D(x_0,z)}\,.$$

W analogii do klasycznego przypadku granicę tę nazywa się jądrem Martina zbioru D. Inaczej niż w klasycznym przypadku, jądro Martina dla skokowego procesu α-stabilnego może nie być α-harmoniczne.

Twierdzenie 4 ([I], Theorem 2). *Niech D będzie zbiorem otwartym. Jądro Martina $M_D(x,y)$ z biegunem $y \in \partial D$ jest α-harmoniczne w D wtedy i tylko wtedy, gdy y jest* dostępny *z D, tzn. gdy $P_D(x,y) = \infty$ dla wszystkich (bądź równoważnie dla pewnego) $x \in D$. Jeśli y jest* niedostępny *z D, tj. jeśli $P_D(x,y) < \infty$ dla $x \in D$, to $M_D(x,y) = P_D(x,y)/P_D(x_0,y)$.*

Dowód tego twierdzenia wykorzystuje twierdzenie o istnieniu granic, brzegową nierówność Harnacka i wynikające z nich oszacowania funkcji Greena. Jeśli $D' = D \setminus B(y,r)$ oraz $x \in D'$, $z \in D \setminus D'$, to zachodzi:

$$\frac{G_D(x,z)}{G_D(x_0,z)} = \int \frac{G_D(v,z)}{G_D(x_0,z)} \omega_D^x(dv)\,.$$

Gdy można wejść z granicą $\lim_{z \to y}$ pod całkę, jądro Martina $M_D(x,y)$ jest regularnie α-harmoniczne w D'. Zagadnienie sprowadza się zatem do jednostajnej całkowalności rodziny funkcji $G_D(v,z)/G_D(x_0,z)$ względem $\omega_D^x(dv)$ dla z bliskich y. Korzystając z brzegowej nierówności Harnacka, redukuje się problem do oszacowań całki z $G_D(v,z)/G_D(x_0,z)$ względem miary Lebesgue'a na $D \cap B(y,r')$ dla dowolnie małego r'. Jeśli y jest dostępny z D, to zapisanie $G_D(x_0,z)$ jako całki Poissona na $D \setminus B(y,r')$ prowadzi do szukanego oszacowania. W przeciwnym przypadku dowodzi się wprost, że $M_D(x,y) = P_D(x,y)/P_D(x_0,y)$, skąd oczywiście wynika, że $M_D(x,y)$ nie jest α-harmoniczne.

Zdefiniowane w Twierdzeniu 4 pojęcie dostępności punktu ze zbioru nie wystąpiło wcześniej w literaturze w tym kontekście. Analogiczny warunek (pod inną nazwą) rozważany był wyłącznie w związku z istnieniem tzw. punktów cierniowych trajektorii procesu (X_t) [29, 79]. Zbiór punktów dostępnych oznaczamy $\partial_M D$ i nazywamy *brzegiem Martina* zbioru D (dla procesu (X_t)).

Przypomnijmy, że w przypadku klasycznym w każdym punkcie brzegowym może istnieć wiele granic częściowych ilorazu funkcji Greena i każda taka granica jest funkcją harmoniczną, bowiem jest jednostajną na zwartych podzbiorach granicą funkcji harmonicznych. W rozważanym tu przypadku $\alpha \in (0,2)$ istnieje jedna granica w każdym punkcie brzegowym, lecz nie musi być α-harmoniczna. Przyczyną tego jest nielokalność pojęcia α-harmoniczności. Nawet jeśli ciąg f_n funkcji α-harmonicznych zbiega do f jednostajnie na zwartych podzbiorach D, nie można przejść do granicy w równości $f_n(x) = \int f_n(y) \omega_B^X(dy)$ dla $B \Subset D$.

Rozważaliśmy dotąd dowolne, być może nieograniczone zbiory D, lecz nie mówiliśmy o zachowaniu funkcji harmonicznych w nieskończoności. Transformacja Kelwina pozwala sprowadzić to zagadnienie do badania zachowania funkcji w pobliżu ustalonego punktu. Okazuje się bowiem, że jeśli określimy $Tx = \frac{x}{|x|^2}$, to dla wszystkich D zachodzi $G_{TD}(Tx,Ty) = |x|^{d-\alpha}|y|^{d-\alpha}G_D(x,y)$ [27]. Pozwala to określić jądro Martina z biegunem w nieskończoności tym samym wzorem i stwierdzić, że jest ono α-harmoniczne wtedy i tylko wtedy, gdy ∞ jest dostępna z D, czyli gdy $\mathbf{E}_x \tau_D = \infty$ dla wszystkich (lub dla pewnego) $x \in D$. Jeśli zatem $\mathbf{E}_x \tau_D = \infty$, to uznajemy, że $\infty \in \partial_M D$.

Wykorzystując jednostajność oszacowań Twierdzenia 3, można udowodnić następujące twierdzenie strukturalne.

Twierdzenie 5 (o reprezentacji Martina funkcji α-harmonicznych; [I], Theorem 3). *Załóżmy, że $D \subseteq \mathbf{R}^d$ jest zbiorem Greena. Każda nieujemna funkcja f α-harmoniczna w D jest postaci $f(x) = P_D f(x) + M_D \sigma(x)$ dla pewnej skończonej i wyznaczonej jednoznacznie miary borelowskiej σ na $\partial_M D$.*

Jednoznaczność miary μ oznacza w istocie, że jądro Martina $M_D(x,y)$ jest dla każdego $y \in \partial_M D$ minimalną funkcją singularnie α-harmoniczną. Zastosowanie twierdzenia strukturalnego do funkcji $f(x) = \omega_D^x(E)$ pozwala dokładniej opisać miarę α-harmoniczną.

Wniosek 1 ([I], Proposition 1)**.** *Na zbiorze $D^c \setminus \partial_M D$ miara α-harmoniczna ω_D^x ma gęstość $P_D(x,y)$. Nośnik części singularnej miary ω_D^x zawiera się w zbiorze $\partial_M D$ (zerowej miary Lebesgue'a).*

Powyższy opis miary α-harmonicznej wciąż nie jest całkiem satysfakcjonujący, bowiem nie pozwala stwierdzić, czy ω_D^x ma niezerową składową singularną. Jest to jednak pierwszy wynik tego typu dla zupełnie nieregularnych zbiorów, których brzeg może mieć dodatnią miarę Lebesgue'a. Ciekawa jest interpretacja probabilistyczna tego wniosku. Jądro Poissona opisuje rozkład zmiennej $X(\tau_D)$ przy założeniu, że $X(\tau_D) \neq \lim_{\varepsilon \searrow 0} X(\tau_D - \varepsilon)$, tzn. że proces opuścił D poprzez skok. Część singularna opisuje rozkład $X(\tau_D)$ przy opuszczeniu D w sposób ciągły. Okazuje się więc, że jeśli proces (X_t) opuszcza bardzo nieregularny zbiór w sposób ciągły, to może wówczas trafić jedynie w niewielki (w sensie miary Lebesgue'a) kawałek brzegu.

Jak wiemy, funkcje $f_0 + P_D f_0$ (gdy nośnik f_0 zawiera się w D^c) są α-harmoniczne w D. W pracy [I] pojęcie α-harmoniczności w D zostało rozszerzone tak, aby również połączenie funkcji i miary "$\mu + P_D\mu$" było α-harmoniczne. Bardziej precyzyjnie mówi się (nawiązując do terminologii fizycznej teorii potencjału), że f (określona na D) jest α-harmoniczna w D *z zewnętrznym ładunkiem* μ, jeśli $f - P_D\mu$ jest singularnie α-harmoniczna w D. Wówczas oczywiście $P_D\mu$ jest α-harmoniczna z ładunkiem zewnętrznym μ. Takie podejście z jednej strony upraszcza zapis (bowiem $P_D(x,y)$ jest wówczas funkcją α-harmoniczną z ładunkiem zewnętrznym ε_y, co niekiedy dość istotnie poprawia czytelność i zwięzłość rozumowania), z drugiej umożliwia bardziej spójny opis funkcji α-harmonicznych w postaci całek z pewnego jądra względem miar borelowskich.

W przypadku zbiorów o dostatecznie regularnym brzegu, całki Poissona pokrywają się z funkcjami regularnie α-harmonicznymi. W przypadku dowolnego zbioru każda funkcja α-harmoniczna rozkłada się jednoznacznie na całkę Poissona i funkcję singularnie α-harmoniczną. Jeśli $\omega_D^x(\partial D) > 0$, to rozkład na funkcję regularnie α-harmoniczną i singularnie α-harmoniczną nie jest już jednoznaczny. To przemawia za korzystaniem z pojęcia całki Poissona w ogólnym przypadku i świadczy o użyteczności tego pojęcia.

3.3 Wcześniejsze wyniki i zastosowania

Brzegowa nierówność Harnacka dla funkcji α-harmonicznych po raz pierwszy była rozważana przez Bogdana w 1997 roku [20]. Dla zbiorów Lipschitza D udowodnił on nierówność (6) (ze stałą zależną od wartości stałej Lipschiza dla D) oraz twierdzenie o istnieniu granic ilorazów funkcji α-harmonicznych w punktach brzegowych D, a także hölderowską ciągłość ilorazów. Dowód brzegowej nierówności Harnacka wykorzystujący bardziej probabilistyczne metody został podany przez Bogdana i Byczkowskiego [25]. Wkrótce potem Bogdan [21] oraz niezależnie Chen i Song [32] udowodnili twierdzenie o reprezentacji Martina, gdy D jest zbiorem Lipschitza. W tym przypadku oczywiście $\partial_M D = \partial D$.

W 1999 roku Song i Wu [76] uogólnili brzegową nierówność Harnacka, twierdzenie o istnieniu granic i twierdzenie o reprezentacji Martina na zbiory κ-grube, odpowiednik obszarów z brzegiem dostępnym niestycznie w przypadku zbiorów niespójnych. Ściślej rzecz biorąc, nierówność (6) udowodniona została dla dowolnego zbioru otwartego, lecz ze stałą zależną od geometrii jego brzegu. Ta zależność zmusiła autorów do zawężenia dalszych rozważań do przypadku zbiorów κ-grubych.

Dowody w cytowanych powyżej pracach są wzorowane na klasycznych argumentach, stąd wynikają warunki regularności brzegu przypominające założenia twierdzeń o funkcjach harmonicznych. Okazuje się, że skokowy charakter procesu stabilnego dla $\alpha < 2$ pozwala znacznie uprościć rozumowanie i osłabić założenia.

Michalik i Samotij [69] udowodnili twierdzenie o reprezentacji Martina dla dowolnego zbioru otwartego D, stosując abstrakcyjne uzwarcenie Martina, również wzorowane na klasycznym przypadku. Ich rezultat przypomina Twierdzenie 5, lecz brak w nim jawnego opisu brzegu Martina $\partial_M D$.

Brzegowa zasada Harnacka dla funkcji α-harmonicznych ma podobny zakres zastosowań, co w przypadku klasycznym [23, 24, 26, 30, 33, 52, 54]. Umożliwia dowód twierdzenia o reprezentacji funkcji α-harmonicznych, które z kolei pozwala m.in. lepiej opisać rozkład procesu zatrzymanego w chwili wyjścia ze zbioru otwartego. Inne zastosowanie brzegowej nierówności Harnacka do badania funkcji własnych półgrupy (P_t^D) przedstawione jest w następnym rozdziale.

4 Wartości własne i funkcje własne półgrupy (P_t^D)

Rozdział ten poświęcony jest opisowi wyników zawartych w pracach [II, III, IV]. Na początku opisane są ogólne własności półgrup procesu zabitego w przypadku, gdy każdy P_t^D jest operatorem zwartym. Druga część dotyczy mocnej ultrakontraktywności i oszacowań pierwszej funkcji własnej dla zbiorów nieograniczonych. Później następuje opis oszacowania odstępu spektralnego dla ograniczonych zbiorów otwartych [II] i na końcu wyników dotyczących krotności wartości własnych półgrupy (P_t^D) dla $\alpha = 1$ i $D = (-1, 1) \subseteq \mathbf{R}$ [III].

4.1 Teoria spektralna półgrupy procesu zabitego

Przypomnijmy, że operator ograniczony A działający na pewnej przestrzeni Banacha X nazywamy zwartym, jeśli obrazy przez A podzbiorów ograniczonych X są warunkowo zwarte (tzn. ich domknięcia są zwarte). Jeśli X jest przestrzenią Hilberta i dla pewnego zupełnego układu ortonormalnego $\varphi_n \in X$ zachodzi $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 < \infty$, to A nazywamy operatorem Hilberta-Schmidta. Jeśli szereg $\|A\varphi_n\|^2$ jest sumowalny dla pewnego zupełnego układu ortonormalnego (φ_n), to jest sumowalny dla wszystkich takich układów, a suma (nazywana normą Hilberta-Schmidta operatora A) nie zależy od wyboru układu (φ_n).

Jeśli A jest ściśle dodatnio określonym, samosprzężonym operatorem zwartym na przestrzeni Hilberta X, to istnieje zupełny układ ortonormalny wektorów własnych $\varphi_n \in X$ odpowiadających dodatnim wartościom własnym ν_n. Bez straty ogólności można założyć, że $\nu_1 \geq \nu_2 \geq ...$ oraz $\nu_n \to 0$ gdy $n \to \infty$. Gdy mamy do czynienia z półgrupą $(A_t : t > 0)$ ściśle dodatnio określonych, samosprzężonych operatorów zwartych na przestrzeni Hilberta X, ciągłą w topologii mocnej zbieżności operatorów, to wszystkie operatory A_t mają te same wektory własne φ_n i zachodzi $A_t\varphi_n = e^{-\lambda_n t}\varphi_n$ dla pewnych liczb λ_n, zwanych wartościami własnymi półgrupy (A_t). Znów bez straty ogólności można przyjąć, że $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ i $\lambda_n \to \infty$ gdy $n \to \infty$. Dodajmy, że zwartość jednego z operatorów A_t implikuje zwartość wszystkich operatorów A_t.

Niech $D \subseteq \mathbf{R}^d$ będzie zbiorem otwartym. Jeśli $\alpha = 2$, to załóżmy dodatkowo, że

D jest spójny. Wówczas $p_t^D(x,y) > 0$ dla wszystkich $x, y \in D$. Ponieważ $p_t^D(x,y) = p_t^D(y,x)$, operatory P_t^D są samosprzężone. Ponadto $\int f(x) P_t^D f(x) dx = \int (P_{\frac{t}{2}}^D f(y))^2 dy$, zatem P_t^D jest ściśle dodatnio określony. Jeśli D jest zbiorem ograniczonym, to $p_t^D(x,y)$ należy do $L^2(D \times D)$, zatem P_t^D jest operatorem Hilberta-Schmidta. Gdy D jest zbiorem nieograniczonym, operatory P_t^D mogą nie być zwarte, tak jest np. dla $D = \mathbf{R}^d$. Jeśli jednak dla pewnego t operator P_t^D jest zwarty, to wobec uwagi z poprzedniego akapitu P_t^D jest zwarty dla wszystkich $t > 0$.

Dowody opisanych w tym akapicie własności półgrup (P_t^D) można znaleźć np. w artykule Getoora [50]. W książce Davisa [39] znajduje się opis półgrup procesów zabitych pochodzących od dyfuzji, lecz wiele zawartych tam twierdzeń i dowodów przenosi się na rozważany tu przypadek symetrycznych procesów stabilnych niemal bez zmian. Załóżmy, że wszystkie operatory P_t^D są zwarte. Wówczas istnieje zupełny układ ortonormalny funkcji własnych $\varphi_n \in L^2(D)$ spełniających równość $P_t^D \varphi_n = e^{-\lambda_n t} \varphi_n$, gdzie $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ i $\lambda_n \to \infty$. Z własności jądra $p_t^D(x,y)$ wynika, że φ_1 ma stały znak w D (możemy zatem założyć, że $\varphi_1(x) > 0$ dla $x \in D$), $\lambda_1 < \lambda_2$ oraz że wszystkie funkcje własne φ_n są ciągłe i ograniczone w D. Ponadto $p_t^D(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(y)$ dla wszystkich $t > 0$ i $x, y \in D$. Jeśli operatory P_t^D są zwarte, to również operator Greena jest zwarty (ale nie jest nigdy operatorem Hilberta-Schmidta, jeśli tylko $\alpha \leq d$) i zachodzi $G_D \varphi_n = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n$.

Dla dowolnego zbioru otwartego D operatory P_t^D są kontrakcjami na $L^2(D)$ (a także na $L^1(D)$ i $L^\infty(D)$). Co więcej, operatory P_t^D odwzorowują $L^2(D)$ w $L^\infty(D)$ — ta własność nazywana jest *ultrakontraktywnością*. Davies i Simon wprowadzili w 1984 roku [40] pojęcie *mocnej ultrakontraktywności* (lub *wewnętrznej ultrakontraktywności*, ang. *intrinsic ultracontractivity*) półgrupy operatorów zwartych. Mówimy, że P_t^D jest mocno ultrakontraktywna (w skrócie IU), gdy operatory P_t^D są zwarte i gdy zachodzi jeden z dwóch równoważnych warunków:

(a) Dla każdego $t > 0$ istnieje $C_{D,t} > 0$ takie, że $p_t^D(x,y) \leq C_{D,t} \varphi_1(x) \varphi_1(y)$.

(b) Dla każdego $t > 0$ operator o jądrze $\frac{e^{\lambda_1 t} p_t^D(x,y)}{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}$ odwzorowuje $L^2(D, (\varphi_1(x))^2 dx)$ w $L^\infty(D)$ (jest ultrakontraktywny).

Operatory występujące w punkcie (b) tworzą półgrupę nazywaną czasem *półgrupą wewnętrzną* (ang. *intrinsic semigroup*) wyjściowej półgrupy (P_t^D).

Pojęcie mocnej ultrakontraktywności półgrupy (P_t^D) wiąże się z wieloma ważnymi własnościami i dlatego było w ostatnich latach intensywnie badane. Jeśli (P_t^D) jest IU, to zachodzi:

$$e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} \leq \sup_{x,y \in D} \left| \frac{e^{\lambda_1 t} p_t^D(x,y)}{\varphi_1(x)\varphi_1(y)} - 1 \right| \leq C_D e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \qquad t > 0\,.$$

Dowód tej własności (w przypadku $\alpha = 2$, lecz uogólniający się bez zmian na przypadek dowolnego α) znajduje się w pracy Smitsa [75]. Wielkość $\lambda_2 - \lambda_1$ nazywana jest *odstępem spektralnym* (ang. *spectral gap*).

Badanie mocnej ultrakontraktywności jest blisko związane z oszacowaniami φ_1. W przypadku klasycznym oba te zagadnienia były badane przez wielu autorów dla zbiorów ograniczonych [5, 6, 7, 38, 40, 71] i nieograniczonych [8, 9, 10, 40, 41, 66, 68]. Gdy $\alpha = 2$, geometryczna charakteryzacja obszarów D, dla których (P_t^D) jest IU, stwarza te same problemy, które występują przy brzegowej nierówności Harnacka. Znane są przykłady obszarów ograniczonych, dla których (P_t^D) nie jest IU. Mocną ultrakontraktywność stosuje się m.in. do oszacowań średniego czasu życia pewnych procesów warunkowanych oraz do tzw. brzegowej wstecznej parabolicznej nierówności Harnacka [16, 48, 44, 59, 41]. Również oszacowania odstępu spektralnego w przypadku klasycznym budziły duże zainteresowanie [14, 17, 43, 74, 75, 80].

Mocna ultrakontraktywność dla półgrup procesów zabitych pochodzących od procesów skokowych ($\alpha < 2$) jest zdecydowanie prostszym pojęciem. Chen i Song [31] udowodnili, że dla dowolnego ograniczonego zbioru D o gładkim brzegu półgrupa P_t^D jest IU, natomiast Kulczycki [62] otrzymał mocną ultrakontraktywność dla dowolnego ograniczonego zbioru otwartego D. Wynik ten został później uogólniony na pewne procesy pochodzące od symetrycznego procesu stabilnego [51, 60, 63, 76]. Praca [IV] zawiera częściową odpowiedź na pytanie o IU w przypadku, gdy D jest nieograniczony.

Również oszacowania odstępu spektralnego w przypadku $\alpha < 2$ były przedmiotem zainteresowania w ostatnich latach [12, 13, 45]. Artykuł [II] zawiera oszacowanie odstępu spektralnego dla (P_t^D), gdy D jest dowolnym, niekoniecznie wypukłym otwartym zbiorem ograniczonym.

4.2 Oszacowania φ_1 i mocna ultrakontraktywność półgrup (P_t^D)

W tej części zakładamy, że $\alpha < 2$. Wiadomo, że jeśli D jest ograniczony, to (P_t^D) jest mocno ultrakontraktywną półgrupą operatorów zwartych. Pierwszym problemem, który należy sobie postawić, gdy rozważa się zbiory nieograniczone, jest charakteryzacja zbiorów D, dla których (P_t^D) jest zwarta. Ponieważ zwartość operatora jest bardzo technicznym i trudnym w zastosowaniach pojęciem, dobrze jest mieć jakiś warunek równoważny. Poniższe twierdzenie znacznie ułatwia badanie zarówno zwartości operatorów P_t^D, jak i własności P_t^D gdy są one zwarte.

Twierdzenie 6 ([IV], Lemma 1). *Niech $D \subseteq \mathbf{R}^d$ będzie otwarty. Operatory P_t^D są zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{E}_x \tau_D \to 0$ przy $|x| \to \infty$.*

Zauważmy, że choć w pracy [IV] rozważane są półgrupy dla $\alpha < 2$, dowód powyższego twierdzenia przenosi się bez trudu na przypadek klasyczny. Dalsze wyniki dotyczą jednak tylko procesów skokowych, odtąd zakładamy zatem, że $\alpha \in (0, 2)$. Twierdzenie 6 pozwala podać prosty, geometryczny warunek na zwartość operatorów P_t^D.

Wniosek 2 ([IV], Lemma 2). *Dla otwartego $D \subseteq \mathbf{R}^d$ określmy $g(x) = \int_{D^c} \nu(y - x) dy$. Jeśli $g(x)$ dąży do nieskończoności przy $|x| \to \infty$, to operatory P_t^D są zwarte.*

Dowody powyższych wyników są dość techniczne i wykorzystują jedynie podstawowe własności funkcji $p_t^D(x, y)$, takie jak oszacowanie $p_t^D(x, y) \le p_t(y - x) \le Ct|y - x|^{-d-\alpha}$.

Jednym z głównych wyników pracy [IV] jest następujące dwustronne oszacowanie pierwszej funkcji własnej. Zauważmy, że nie ma tu żadnych założeń o regularności D.

Twierdzenie 7 ([IV], Theorem 1). *Niech $D \subseteq \mathbf{R}^d$ będzie otwarty. Jeśli operatory P_t^D są zwarte, to:*

$$\varphi_n(x) \asymp C_D \frac{\mathbf{E}_x \tau_D}{(1 + |x|)^{-d-\alpha}} \asymp C_D \int \frac{G_D(x, y)}{(1 + |y|)^{-d-\alpha}} dy \,, \qquad x \in D \,. \tag{9}$$

Głównym narzędziem wykorzystanym w dowodzie tego twierdzenia jest brzegowa nierówność Harnacka (Twierdzenie 2) i wzór $\varphi_1(x) = \lambda_1 \int G_U(x,y)\varphi_1(y)dy + \int \varphi_1(y)\omega_U^x(dy)$ (jest to wniosek z równości $\varphi_1 = \lambda_1 G_D \varphi_1$ i własności funkcji Greena; można też wyprowadzić tę tożsamość ze wzoru Dynkina (5)). Ta technika dość łatwo prowadzi do dolnego oszacowania, ograniczenie z góry wymaga trochę więcej pracy. Dowodzi się mianowicie, że jeśli $\varphi_1(x) \le C_{D,\gamma}(1+|x|)^{-\gamma}$ dla pewnego $\gamma \ge 0$, $\gamma \ne d$, to wówczas $\varphi_1(x) \le C_{D,\gamma}(1+|x|)^{-\min(d,\gamma)-\alpha}$. Wielokrotne zastosowanie tego wzoru prowadzi do nierówności $\varphi_1(x) \le C_D(1+|x|)^{-d-\alpha}$, skąd już nietrudno uzyskać oszacowanie górne (9). Szczegóły rozumowania są dość techniczne, wykorzystują pewne uwikłane oszacowania funkcji φ_1.

Funkcja $\mathbf{E}_x \tau_D$ jest zwykle łatwiejsza do bezpośredniego szacowania niż φ_1. Wynika to z tego, że $\mathbf{E}_x \tau_D$ jest porównywalne z $\mathbf{E}_x \tau_{D \cap B(x,1)}$ ze stałą niezależną od x ([IV], wzór (8)), a więc szacowanie $\mathbf{E}_x \tau_D$ jest zagadnieniem lokalnym. Analogiczny rezultat dla $\varphi_1(x)$ nie zachodzi, bowiem zależność $\varphi_1(x)$ od D dla ustalonego x jest trudna do opisania.

Znajomość asymptotyki funkcji własnej φ_1 pozwala podać dwa warunki równoważne mocnej ultrakontraktywności półgrupy (P_t^D).

Twierdzenie 8 ([IV], Theorem 2)**.** *Niech $D \subseteq \mathbf{R}^d$ będzie otwarty. Załóżmy, że operatory P_t^D są zwarte. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(a) Półgrupa (P_t^D) jest mocno ultrakontraktywna.

(b) Istnieje $c_{D,t}$ takie, że $p_t^D(x,y) \le c_{D,t}(1+|x|)^{-d-\alpha}(1+|y|)^{-d-\alpha}$ dla $x, y \in D$, $t > 0$.

(c) Istnieje $c_{D,t}$ takie, że $\mathbf{P}_x(\tau_{D \setminus \overline{B}(0,r)} > t) \le c_{D,t}(1+r)^{-d-\alpha}$ dla $x \in D$, $r, t > 0$.

Warunek (b) oznacza w szczególności, że P_t^D jest operatorem Hilberta-Shmidta. Przeciwna implikacja nie ma miejsca. Warunek (b) jest ponadto monotoniczny ze względu na D, jeśli $D' \subseteq D$ i (b) zachodzi dla D, to zachodzi również dla D'. Innymi słowy, jeśli (P_t^D) jest IU, to także $P_t^{D'}$ jest IU. Podkreślmy, że w przypadku klasycznym analogiczne stwierdzenie nie jest prawdziwe.

Bardzo użyteczny okazuje się warunek (c). Wynika z niego między innymi, że mocna ultrakontraktywność (P_t^D) zależy wyłącznie $D \setminus B(0,r)$ dla dowolnie dużych $r > 0$. Prawdopodobieństwa rodzaju $\mathbf{P}_x(\tau_D > t)$ można łatwo szacować za pomocą funkcji g z Wniosku 2, w ten sposób uzyskuje się zamieszczone poniżej Twierdzenie 9.

Korzystając z Twierdzenia 7 łatwo udowodnić implikację (a)$\Rightarrow$(b), z kolei (b)$\Rightarrow$(c) wynika z prostego oszacowania całki. Dowód ostatniej implikacji jest dużo bardziej skomplikowany. Twierdzenie 7 pozwala zredukować zagadnienie mocnej ultrakontraktywności półgrupy (P_t^D) do nierówności $\mathbf{P}_x(\tau_D > t) \le C_{D,t}(1+|x|)^{-d-\alpha}\mathbf{E}_x \tau_D$. Z brzegowej nierówności Harnacka oraz własności czasu pierwszego wyjścia z D wynika pewne uwikłane oszacowanie funkcji $\mathbf{P}_x(\tau_D > t)$ ([IV], wzór (14)). Jego wielokrotnie zastosowanie (tak jak w dowodzie górnego ograniczenia w Twierdzeniu 9) pozwala uzyskać odpowiednią asymptotykę funkcji $\mathbf{P}_x(\tau_D > t)$.

Powyższe rezultaty prowadzą do prostych geometrycznych warunków koniecznych bądź wystarczających do mocnej ultrakontraktywności (P_t^D).

Twierdzenie 9 ([IV], Theorem 3)**.** *Niech $D \subseteq \mathbf{R}^d$ będzie zbiorem otwartym. Określamy $g(x) = \int_{D^c} \nu(y-x)dy$. Jeśli $\frac{g(x)}{\log|x|}$ dąży do nieskończoności przy $|x| \to \infty$, to operatory P_t^D są zwarte, a półgrupa (P_t^D) jest mocno ultrakontraktywna.*

Twierdzenie 10 ([IV], Theorem 4). *Niech* $D \subseteq \mathbf{R}^d$ *będzie zbiorem otwartym i niech* $\rho_D(x) = \operatorname{dist}(x, \partial D)$. *Jeśli półgrupa* (P_t^D) *jest mocno ultrakontraktywna, to* $(\rho_D(x))^\alpha \log|x|$ *dąży do zera przy* $|x| \to \infty$.

Powyższe twierdzenia pozwalają łatwo rozstrzygnąć kwestię mocnej ultrakontraktywności półgrupy (P_t^D) dla wielu konkretnych zbiorów D. Niech $f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ będzie ciągłą i ograniczoną funkcją dążącą do zera w nieskończoności. Mówimy, że zbiór $D_f = \{x \in \mathbf{R}^d : x_1 > 0, |\tilde{x}| < f(x_1)\}$ (utożsamiamy punkt $x \in \mathbf{R}^d$ z parą $(x_1, \tilde{x})$, $x_1 \in \mathbf{R}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{d-1}$) ma kształt *rogu* (ang. *horn-shaped region*) o profilu f. Półgrupa $(P_t^{D_f})$ jest mocno ultrakontraktywna, jeśli np. $f(x) = (1+x)^{-p}$ dla $p > 0$ lub $f(x) = (\log(2+x))^{-p}$ dla $p > \frac{1}{\alpha}$, natomiast nie jest mocno ultrakontraktywna, gdy $f(x) = (\log(2+x))^{-p}$ dla $p \in (0, \frac{1}{\alpha}]$. Więcej przykładów znajduje się w pracy [IV] (Proposition 1, Example 3, Example 4).

4.3 Oszacowanie odstępu spektralnego

Im większy jest odstęp spektralny $\lambda_2 - \lambda_1$, tym lepszym przybliżeniem $p_t^D(x,y)$ jest $e^{-\lambda_1 t}\varphi_1(x)\varphi_1(y))$. Dlatego istotne są przede wszystkim dolne oszacowania odstępu spektralnego.

Przy badaniu odstępu spektralnego półgrupy (P_t^D) bardzo często zakłada się wypukłość zbioru D. Bierze się to stąd, że w klasycznym przypadku nawet stosunkowo regularne zbiory mogą mieć dowolnie mały odstęp spektralny. Jeśli np. rozważymy zbiór D składający się z dwóch kul jednostkowych w ustalonej odległości, połączonych walcem o małym przekroju, odstęp spektralny maleje do zera, gdy zmniejszamy średnicę przekroju walca. Można to intuicyjnie wyjaśnić trudnością przejścia trajektorii ruchu Browna przez wąski kanał łączący obie kule (bez dotykania jego brzegu).

Gdy rozważamy półgrupy zabitych procesów skokowych, powyższe zjawisko nie ma miejsca, bowiem trajektorie (X_t) mogą przemieścić się z jednej kuli do drugiej poprzez skok. W pracy [II] udowodnione jest następujące oszacowanie.

Twierdzenie 11 ([II], Theorem 1.1 i Proposition 1.1). *Niech* $\alpha < 2$. *Istnieją stałe* $c_1 > 0$ *i* $c_2 > 0$ *takie, że dla dowolnego zbioru otwartego* $D \subseteq \mathbf{R}^d$ *zachodzi:*

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{c_1}{\lambda_1^{\frac{d}{\alpha}} (\operatorname{diam} D)^{d+\alpha}} \geq \frac{c_2 r^d}{(\operatorname{diam} D)^{d+\alpha}}, \tag{10}$$

gdzie r *jest promieniem największej kuli zawartej w* D.

Stałe c_1 i c_2 są dane jawnymi wzorami, zatem Twierdzenie 11 pozwala otrzymać numeryczne oszacowanie $\lambda_2 - \lambda_1$ dla dowolnego zbioru D. Wśród oszacowań wykorzystujących jedynie $\operatorname{diam} D$ i λ_1^D (lub $\operatorname{diam} D$ i r) wzór (10) jest optymalny, o czym można się przekonać, rozważając zbiory $B(x,1) \cup B(-x,1)$ dla x o coraz większej normie.

Dowód Twierdzenia 11 polega na zastosowaniu wzoru wariacyjnego na $\lambda_2 - \lambda_1$ wyprowadzonego przez Dydę i Kulczyckiego [45], którzy rozważali wypukłe i symetryczne względem obu osi podzbiory płaszczyzny. Stosuje się ponadto standardowe oszacowanie normy supremum funkcji własnych, $\|\varphi_n\|_\infty \leq C\lambda_n^{\frac{d}{2\alpha}}$, otrzymane poprzez zastosowanie nierówności Schwarza do prawej strony równości $\varphi_n = e^{\lambda_n t} P_t^D \varphi_n$.

4.4 Półgrupa procesu zabitego przy wyjściu z odcinka na prostej

W tym podrozdziale rozważamy odcinek $D = (-1, 1) \subseteq \mathbf{R}$. W przypadku klasycznym funkcje i wartości własne (P_t^D) dane są jawnym wzorem, zachodzi $\varphi_n = \sin(\frac{n\pi}{2}(x+1))$ oraz $\lambda_n = (\frac{n\pi}{2})^2$. Gdy jednak $\alpha < 2$, jawnych wzorów nie ma nawet w tym najprostszym z geometrycznego punktu widzenia przypadku i niezbadanych pozostaje wiele podstawowych własności φ_n i λ_n.

Z symetrii zagadnienia wynika, że możemy założyć, że funkcje φ_n są symetryczne (parzyste) lub antysymetryczne (nieparzyste). Blumenthal i Getoor [19] udowodnili, że liczba $N(\lambda)$ wartości własnych λ_n mniejszych od λ spełnia $\frac{\pi}{2}\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}N(\lambda) \to 1$ przy $\lambda \to \infty$. Chen i Song [34] wykazali, że $\frac{1}{2}(\frac{n\pi}{2})^2 \le \lambda_n \le (\frac{n\pi}{2})^\alpha$ (tego typu oszacowania udowodnione zostały tam w dużo ogólniejszym kontekście). Bañuelos i Kulczycki [11] rozważali przypadek *procesu Cauchy'ego* ($\alpha = 1$) i otrzymali pewne wyniki dotyczące kształtu pierwszych trzech funkcji własnych oraz oszacowanie pierwszych trzech wartości własnych:

$$1 < \lambda_1 < \tfrac{3\pi}{8}\,, \; 2 \le \lambda_2 \le \pi\,, \; 3.4 \le \lambda_3 \le \tfrac{3\pi}{2}\,.$$

W szczególności oznacza to, że pierwsze trzy wartości własne są proste. Przybliżenia numeryczne sugerują, że dla każdego α wszystkie wartości własne są proste, zaś w ciągu funkcji własnych naprzemiennie pojawiają się funkcje symetryczne i antysymetryczne, lecz brak dowodu tej hipotezy. Praca [III] stanowi krok w tym kierunku, zawiera bowiem dowód następującego wyniku.

Twierdzenie 12 ([III], Theorem 1). *Dla $\alpha = 1$ i $D = (-1, 1)$ każdej wartości własnej λ półgrupy (P_t^D) odpowiada co najwyżej jedna symetryczna i co najwyżej jedna antysymetryczna funkcja własna. W szczególności każda wartość własna jest co najwyżej dwukrotna.*

Przypadek $\alpha = 1$ jest dużo łatwiejszy do badania ze względu na opisany w artykule [11] związek półgrupy P_t^D z tzw. *mieszanym zagadnieniem Stiekłowa* na półpłaszczyźnie. Jest to następujące zagadnienie własne:

$$\begin{cases} \Delta u_n(x,t) &= 0\,, & x \in \mathbf{R}\,,\; t > 0\,, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,0) &= -\lambda_n u_n(x,0)\,, & x \in D\,, \\ u_n(x,0) &= 0\,, & x \in D^c\,. \end{cases} \tag{11}$$

Okazuje się, że rozwiązania zagadnienia (11) wyrażają się za pomocą φ_n wzorem $u_n(t,x) = P_t^D \varphi_n(x)$. Analogiczny związek ma miejsce także w wielowymiarowym przypadku dla dowolnego $D \subseteq \mathbf{R}^d$ i był wykorzystywany m.in. w pracach [11, 12, 13]. Przewaga sformułowania (11) polega głównie na możliwości wykorzystania dobrze rozwiniętej teorii funkcji harmonicznych i mieszanych zagadnień Stiekłowa.

Mieszane zagadnienie Stiekłowa podobne do (11), lecz z warunkiem Neumanna $\frac{\partial}{\partial t} u_n(x,0) = 0$ zamiast Dirichleta $u_n(x,0) = 0$ dla $x \in D$, jest dobrze znane w teorii równań różniczkowych cząstkowych oraz w fizyce. Po angielsku nazywa się je *sloshing problem*, co można przetłumaczyć jako *zagadnienie chlupotania*, niewielkich oscylacji płynu. Tego typu zagadnienia były i wciąż są szczegółowo badane [42, 49, 64, 77]. Nikolai Kuznetsov zwrócił uwagę na podobieństwo tych problemów i zasugerował zastosowanie metod znanych z prac o oscylacjach cieczy.

W przypadku zagadnienia chlupotania wszystkie wartości własne są proste, a n-ta wartość własna μ_n tego zagadnienia należy do przedziału $(\frac{n\pi}{2}, \frac{(n+1)\pi}{2})$ [77]. Dowód tego faktu jest stosunkowo nietrudny: $\mu_n > \frac{n\pi}{2}$ wynika z monotoniczności wartości własnych względem obszaru, a $\mu_n < \frac{(n+1)\pi}{2}$ uzyskuje się ze wzoru wariacyjnego, podstawiając pewne konkretne funkcje. Niestety w przypadku zagadnienia (11) obie te metody dają górne oszacowanie na λ_n. Nie jest znana metoda pozwalająca uzyskać dostatecznie dokładne ograniczenie z dołu.

Kuznetsov zasugerował użycie metod z pracy [64]. Stosując twierdzenia o lokalnej asymptotyce funkcji harmonicznych z warunkami brzegowymi, można czasem uzyskać twierdzenie postaci „dla każdej symetrycznej lub antysymetrycznej funkcji własnej φ pewien funkcjonał liniowy A nie może się zerować". Gdyby istniały dwie liniowo niezależne symetryczne funkcje własne przynależne do tej samej wartości własnej, to A zerowałby się na ich kombinacji liniowej. Zatem istnieje co najwyżej jedna taka funkcja. Analogicznym rozumowanie jest prawdziwe również dla funkcji antysymetrycznych. W ten sposób otrzymujemy Twierdzenie 12.

W rozważanym przez nas przypadku okazuje się, że odpowiednim funkcjonałem liniowym jest $A\varphi = \int_0^1 \varphi(x)dx$ ([III], Lemma 3). Idea dowodu jest inspirowana pracą [64], lecz zastosowane metody są innego rodzaju. Zamiast twierdzeń o lokalnej asymptotyce dowód wspomnianego lematu wykorzystuje transformatę Fouriera i transformatę Hilberta. Poniżej naszkicujemy główną ideę rozumowania.

Dla funkcji $f \in L^2(\mathbf{R})$ definiuje się $P(f) = \int_0^\infty (P_t f(0))^2 dt$ i dowodzi się, że:

$$P(f) = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{f(x)f(y)}{|x| + |y|} dxdy = \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{\hat{f}(\xi)\hat{f}(\eta)}{|\xi| + |\eta|} d\xi d\eta$$

(powyższy wzór jest urzekająco symetryczny i trudno uwierzyć, by nie był dotąd znany; autorowi jednak nie udało się go znaleźć w literaturze). Ponadto $0 \le P(f) \le \|f\|_2^2$ oraz $P(f) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest antysymetryczna. Co więcej, dla symetrycznych f zachodzi:

$$P(f) = -2 \int_0^\infty f(x) Hf(x) dx \,, \tag{12}$$

gdzie $Hf \in L^2(\mathbf{R})$ jest transformatą Hilberta funkcji f, tzn. $(Hf)\hat{}(\xi) = -i \operatorname{sign} \xi \hat{f}(\xi)$.

Dowodzi się, że funkcje własne (P_t^D) należą do dziedziny $L_{L^1(\mathbf{R})}$ (choć nie należą do dziedziny $L_{L^2(\mathbf{R})}$ ani $L_{C_0(\mathbf{R})}$) i zachodzi $(H\varphi)' = L_{L^1(\mathbf{R})}\varphi = -\lambda\varphi$ dla każdej funkcji własnej φ należącej do wartości własnej λ. Stosując tę równość we wzorze (12), otrzymamy:

$$P(\varphi) = -(\lim_{\varepsilon \searrow 0} H\varphi(1-\varepsilon) - H\varphi(0)) \int_0^1 \varphi(x) dx$$

dla symetrycznych funkcji własnych φ. Ponieważ $P(\varphi) \ne 0$, otrzymujemy $\int_0^1 \varphi(x)dx \ne 0$.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla antysymetrycznych funkcji własnych. Wówczas zamiast $P(\varphi)$ należy badać $P(H\varphi)$. W ten sposób udowadnia się, że $\int_0^1 \varphi(x)dx \ne 0$ dla wszystkich symetrycznych i antysymetrycznych funkcji własnych φ. Stąd, jak już zostało stwierdzone, wynika Twierdzenie 12.

Literatura

[1] H. Aikawa, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain.* J. Math. Soc. Japan 53(1) (2001), pp. 119–145.

[2] H. Aikawa, *Potential-theoretic characterizations of nonsmooth domains.* Bull. London Math. Soc. 36(4) (2004), pp. 469–482.

[3] H. Aikawa, T. Lundh, *The 3G inequality for a uniformly John domain.* Kodai Math. J. 28(2) (2005), pp. 209–219.

[4] A. Ancona, *Principle de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitizien.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 28, 4 (1978), pp. 169–213.

[5] R. Bañuelos, *Intrinsic ultracontractivity and eigenvalue estimates for Schrödinger operators.* J. Funct. Anal. 100 (1991), pp. 181–206.

[6] R. Bañuelos, *Lifetime and heat kernel estimates in nonsmooth domains.* Proc. University of Chicago conference in partial differential equations with minimal smoothness, IMA Publications, Vol. 42.

[7] R. Bañuelos, *Sharp estimates for Dirichlet eigenfunctions in simply connected domains.* J. Differential Equations 125(1) (1996), pp. 282–298.

[8] R. Bañuelos, M. van den Berg, *Dirichlet Eigenfunctions for horn-shaped regions and Laplacians on cross sections.* J. London Math. Soc. (2), 53(3) (1996), pp. 503–511.

[9] R. Bañuelos, B. Davis, *Geometrical Characterization of Intrinsic Ultracontractivity for Planar Domains with Boundaries Given by Graphs of Functions.* Indiana University Math J. 41 (1992), pp. 885–913.

[10] R. Bañuelos, B. Davis, *Sharp estimates for Dirichlet eigenfunctions in horn-shaped regions.* Comm. Math. Phys. 150(1) (1992), pp. 209–215.

[11] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *The Cauchy process and the Steklov problem.* J. Funct. Anal. 211(2) (2004), pp. 355–423.

[12] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *Eigenvalue gaps for the Cauchy process and a Poincaré inequality.* J. Funct. Anal. 234(1) (2006), pp. 199–225.

[13] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *Spectral gap for the Cauchy process on convex symmetric domains.* Comm. Partial Diff. Equations 31 (2006), pp. 1841–1878.

[14] R. Bañuelos, P. J. Méndez-Hernández, *Sharp inequalities for heat kernels of Schrödinger operators and applications to spectral gaps.* J. Funct. Anal. 176 (2000), pp. 368–399.

[15] R. Bass, K. Burdzy, *A boundary Harnack principle in twisted Hölder domains.* Ann. Math. 134(2) (1991), pp. 253–276.

[16] R. Bass, K. Burdzy, *Lifetimes of conditioned diffusions.* Probab. Theory Related Fields 91 (1992), pp. 405–443.

[17] M. van den Berg, *On condensation in the free-Boson gas and the spectrum of the Laplacian.* J. Stat. Phys. 31 (1983), pp. 623–637.

[18] J. Bliedtner, W. Hansen, *Potential Theory. An analytic and probabilistic approach to balayage.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986.

[19] R. M. Blumenthal, R. K. Getoor. *The asymptotic distribution of the eigenvalues for a class of Markov operators.* Pacific J. Math. 9(2) (1959), pp. 399–408.

[20] K. Bogdan, *The boundary Harnack principle for the fractional Laplacian.* Studia Math. 123 (1997), pp. 43–80.

[21] K. Bogdan, *Representation of α-harmonic functions in Lipschitz domains.* Hiroshima Math. J. 29 (1999), pp. 227–243.

[22] K. Bogdan, *Sharp estimates for the Green function in Lipschitz domains.* J. Math. Anal. Appl. 243(2) (2000), pp. 326–337.

[23] K. Bogdan, K. Burdzy, Z.-Q. Chen, *Censored stable processes.* Probab. Theory Related Fields 127(1) (2003), pp. 89–152.

[24] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Potential theory for the α-stable Schrödinger operator on bounded Lipschitz domains.* Studia Math. 133(1) (1999), pp. 53–92.

[25] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Probabilistic proof of boundary Harnack principle for α-harmonic functions.* Potential Anal. 11(2) (1999), pp. 135–156.

[26] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Potential theory of Schrödinger operator based on fractional Laplacian.* Probab. Math. Statist. 20(2) (2000), Acta Univ. Wratislav. No. 2256, pp. 293–335.

[27] K. Bogdan, T. Żak, *On Kelvin transformation.* J. Theor. Prob. 19(1) (2006), pp. 89–120.

[28] K. Burdzy, *Multidimensional Brownian Excursions and Potential Theory.* Longman, London, 1987.

[29] K. Burdzy, T. Kulczycki, *Stable processes have thorns.* Ann. Probab. 31 (2003), pp. 170–194

[30] Z.Q. Chen, P. Kim, *Green function estimate for censored stable processes.* Probab. Theory Related Fields 124(4) (2002), pp. 595–610.

[31] Z.Q. Chen, R. Song, *Intrinsic ultracontractivity and conditional gauge for symmetric stable processes.* J. Funct. Anal. 150(1) (1997), pp. 204–239.

[32] Z.Q. Chen, R. Song, *Martin boundary and integral representation for harmonic functions of symmetric stable processes.* J. Funct. Anal. 159 (1998), pp. 267–294.

[33] Z.Q. Chen, R. Song, *Conditional gauge theorem for non-local Feynman-Kac transforms.* Probab. Theory Relat. Fields 125 (2003), pp. 45–72.

[34] Z.Q. Chen, R. Song, *Two sided eigenvalue estimates for subordinate Brownian motion in bounded domains.* J. Funct. Anal. 226 (2005), pp. 90–113.

[35] M. Cranston, E. Fabes, Z. Zhao, *Conditional Gauge and Potential Theory for the Schrodinger Operator.* Trans. Amer. Math. Soc. 307(1) (1988), pp. 171–194.

[36] K. Chung, Z. Zhao, *From Brownian motion to Schrödinger's equation.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[37] B. Dahlberg, *Estimates of harmonic measure.* Arch. Rat. Mech. Anal. 65 (1977), pp. 275–288.

[38] E. B. Davies, *Criteria for ultracontractivity.* Ann. Inst. H. Poincare 43A (1985) pp. 181–194.

[39] E. B. Davis, *Heat Kernels and Spectral Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[40] E. B. Davies, B. Simon, *Ultracontractivity and heat kernels for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians.* J. Func. Anal. 59 (1984), pp. 335–395.

[41] B. Davis, *Intrinsic ultracontractivity and the Dirichlet Laplacian.* J. Funct. Anal. 100(1) (1991), pp. 162–180.

[42] A. M. J. Davis, *Short surface waves in a canal: dependence of frequency on curvature.* Proc. Roy. Soc. Lond. A 313 (1969), pp. 249–260.

[43] B. Davis, *On the spectral gap for fixed membranes.* Ark. Mat. 39 (2001), pp. 65–74.

[44] D. DeBlassie, *The lifetime of conditioned Brownian motion in certain Lipschitz domains.* Prob. Theory Rel. Fields 75 (1987), pp. 431–458.

[45] B. Dyda, T. Kulczycki, *Spectral gap for stable process on convex planar double symmetric domains.* Potential Anal. 27(2) (2007), pp. 101–132.

[46] E.B. Dynkin, *Markov processes, Vols. I and II.* Springer-Verlag, Berlin-Götingen-Heidelberg, 1965.

[47] J. Dziubański, *Asymptotic behaviour of densities of stable semigroups of measures.* Probab. Theory and Related Fields 87(4), pp. 459–467.

[48] E. B. Fabes, N. Garofalo, S. Salsa, *A backward Harnack inequality and Fatou theorem for nonnegative solutions of parabolic equations.* Illinois J. Math. 30 (1986), pp. 536–565.

[49] D. W. Fox, J. R. Kuttler, *Sloshing frequencies.* Z. angew. Math. Phys. 34 (1983), pp. 668–696.

[50] R. K. Getoor, *Markov operators and their associated semi-groups.* Pacific J. Math. 9 (1959), pp. 449–472.

[51] T. Grzywny, M. Ryznar, *Two-Sided Optimal Bounds for Green Functions of Half-Spaces for Relativistic α-Stable Process.* To appear in Potential Anal.

[52] W. Hansen, *Uniform boundary Harnack principle and generalized triangle property.* J. Funct. Anal. 226(2) (2005), pp. 452–484.

[53] N. Ikeda, S. Watanabe, *On some relations between the harmonic measure and the Lévy measure for a certain class of Markov processes.* Probab. Theory Related Fields 114 (1962), pp. 207–227.

[54] T. Jakubowski, *The estimates for the Green function in Lipschitz domains for the symmetric stable processes.* Probab. Math. Statist. 22(2) (2002), Acta Univ. Wratislav. No. 2470, pp. 419–441.

[55] D. S. Jerison, C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains.* Anv. in Math. 46 (1982), pp. 171–194.

[56] S. Kakutani *On Brownian motions in n-space.* Proc. Imp. Acad. 20(9), pp. 648–652.

[57] S. Kakutani *Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions.* Proc. Imp. Acad. 20(10) (1944), pp. 706–714.

[58] J. T. Kemper, *A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities.* Comm. Pure Applied Math. 25 (1972), pp. 247–255.

[59] C. E. Kenig, J. Pipher, *The h-path distribution of the lifetime of conditioned Brownian motion for nonsmooth domains.* Probab. Theory Rel. Fields 82(4) (1989), pp. 615–623.

[60] P. Kim, R. Song, *Intrinsic ultracontractivity for non-symmetric Levy processes.* To appear in Forum Math.

[61] P. Kim, R. Song, *Boundary Harnack principle for Brownian motions with measure-valued drifts in bounded Lipschitz domains.* Math. Ann. 339(1) (2007), pp. 135–174

[62] T. Kulczycki, *Intrinsic ultracontractivity for symmetric stable processes.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46(3) (1998), pp. 325–334.

[63] T. Kulczycki, B. Siudeja, *Intrinsic ultracontractivity of the Feynman-Kac semigroup for relativistic stable processes.* Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), pp. 5025–5057.

[64] N. Kuznetsov, O. Motygin, *The Steklov problem in a half-plane: the dependence of eigenvalues on a piecewise-constant coefficient.* J. Math. Sci. 127(6) (2005), pp. 2429–2445.

[65] N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

[66] A. Lindeman, M. H. Pang, Z. Zhao, *Sharp Bounds for Ground State Eigenfunctions on Domains with Horns and Cusps.* J. Math. Anal. Appl. 212(2) (1997), pp. 381-416.

[67] R. S. Martin, *Minimal positive harmonic functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941), pp. 137–172.

[68] P. J. Méndez-Hernández, *Toward a Geometrical Characterization of Intrinsic Ultracontractivity of the Dirichlet Laplacian.* Michigan Math. J. 47 (2000), pp. 79–99.

[69] K. Michalik, K. Samotij, *Martin representation for α-harmonic functions.* Probab. Math. Statist. 20 (2000), pp. 75–91.

[70] N. S. Nadirashvili, *The Martin compactification of a plane domain.* Ann. Inst. Fourier 44(5) (1994), pp. 1351–1354.

[71] E. M. Ouhabaz, F.-Y. Wang, *Sharp estimates for intrinsic ultracontractivity on $C^{1,\alpha}$-domains.* Manu. Math. 112 (2007), pp 229–244.

[72] M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels.* Acta Sci. Math. Szeged, 1938.

[73] K. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[74] I. M. Singer, B. Wong, S.-T. Yau, S. S.-T. Yau, *An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 12(2) (1985), pp. 319–333.

[75] R. G. Smits, *Spectral gaps and rates to equilibrium for diffusions in convex domains.* Michigan Math. J. 43(1) (1996), pp. 141–157.

[76] R. Song, J.M. Wu, *Boundary Harnack principle for symmetric stable processes.* J. Funct. Anal. 168 (1999), pp. 403–427.

[77] B. Andreas Troesch, R. Troesch, *A Remark on the Sloshing Frequencies for a Half-Space.* ZAMP 23(4) (1972), pp. 703–711.

[78] J.M Wu, *Comparisons of kernel functions boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains.* Ann. Inst. Fourier 28(4) (1978), pp. 147–167.

[79] J.M. Wu, *Symmetric stable processes stay in thick sets.* Ann. Probab. 32 (2004), pp. 315–336.

[80] Q. Yu, J. Q. Zhong, *Lower bounds of the gap between the first and second eigenvalues of the Schrödinger operator.* Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), pp. 341–349.