Brzegowa zasada Harnacka dla funkcji harmonicznych na podzbiorach $\mathbf{R}^3$ o gładkich brzegach

Mateusz Kwaśnicki

2 lipca 2008

Poniższa notatka jest krótkim, elementarnym dowodem brzegowej zasady Harnacka dla nieujemnych funkcji harmonicznych na zbiorach posiadających własność kuli zewnętrznej i wewnętrznej.

1. Zbiory gładkie. Będziemy zawsze zakładali, że D jest otwartym i spójnym podzbiorem $\mathbf{R}^3$ o następującej własności: dla pewnej liczby $\rho > 0$ i każdego punktu $z \in \partial D$ istnieją kule $B_z = B(p_z, \rho) \subset D$ i $B^z = B(p^z, \rho) \subset D^c$, których brzegi zawierają z. Takie zbiory często określa się mianem zbiorów klasy $C^{1,1}$. Dla $x \in D$ oznaczamy przez z_x pewien punkt na ∂D najbliższy x. Ponadto określamy $\delta(x) = |x - z_x|$. Przez f będziemy zawsze oznaczali nieujemną funkcję ciągłą na D i harmoniczną w D.

2. Funkcja Greena i jądro Poissona. Funkcja Greena $G_D(x, y)$ to, przy ustalonym $x \in D$, ciągła funkcja zmiennej $y \in \bar{D} \setminus \{x\}$ równa zero na ∂D i spełniająca warunek $\int_D G_D(x, y) \Delta f(y) dy = -f(x)$ dla $f \in C_c^\infty(D)$. Jest to symetryczna funkcja harmoniczna ze względu na każdą ze współrzędnych.

Jądro Poissona $P_D(x, y)$ to, przy ustalonym $x \in D$, ciągła funkcja $y \in \partial D$ zdefiniowana jako pochodna funkcji Greena w (wewnętrznym) kierunku normalnym do ∂D. Jeśli f jest ciągłą funkcją na ∂D, to po rozszerzeniu f na D według wzoru $f(x) = \int_{\partial D} P_D(x, y) f(y) \sigma(dy)$, gdzie σ jest miarą powierzchniową, otrzymamy funkcję ciągłą na $\bar{D}$ i harmoniczną na D.

Funkcja Greena jest rosnącą funkcją zbioru. Stąd wynika też analogiczna własność dla jądra Poissona na części wspólnej brzegów. Zachodzi ponadto $G_D(x, y) \leq 1/(\pi\,|x - y|)$.

Dla kuli $D = B(0,r)$ mamy:

$$G_D(x,y) = \frac{1}{\pi|x-y|} - \frac{|x|^2|y|^2}{\pi\left||y|^3x - |x|^3y\right|}\,, \text{ and } P_D(x,y) = \frac{r^2-|x|^2}{4\pi|x-y|^3}\,.$$

3. Zasada Harnacka. Jeśli $K \subset D$ jest spójnym zbiorem zwartym, to dla pewnej stałej $c > 0$ zależnej od K i D zachodzi:

$$P_D(x_1,y) \le cP_D(x_2,y)$$

dla wszystkich $x_1, x_2 \in K$, $y \in \partial D$. W istocie, wpierw na mocy wzoru na jądro Poissona kuli stwierdzamy, że kule domknięte zawarte w D mają tę własność, a następnie pokrywamy K skończoną liczbą takich kul.

4. Zasada Harnacka dla kuli. Wobec wzoru na jądro Poissona kuli $B(z,\rho)$, dla $x \in D$ takiego, że $\delta(x) < \rho$, $z = z_x$ i $y \in \partial D$:

$$P_D(x,y) \ge \left(1 - \frac{(\rho-\delta(x))^2}{\rho^2}\right) P_D(p_z,y)\,.$$

5. Oszacowanie jądra Poissona. Niech $D = B(0,r) \setminus \bar{B}(0,\rho)$. Funkcja $f(x) = 1/\rho - 1/|x|$ jest harmoniczna na D i ciągła na $\bar{D}$, a więc:

$$\frac{r - \rho r|x|^{-1}}{r-\rho} = \int_{\partial B(0,r)} P_D(x,y)\sigma(dy)\,.$$

6. Oszacowanie funkcji Greena. Niech $p, q \in \mathbf{R}^3$ oraz $r \le |p-q|/3$. Załóżmy, że $r > \rho$ i określmy $D = (\bar{B}(p,\rho) \cup \bar{B}(q,\rho))^c$. Niech $x, y \in D$, $x \in B(p,r)$ i $y \in B(q,r)$, i niech $D_1 = B(p,r)\setminus\bar{B}(p,\rho)$, $D_2 = B(q,r)\setminus\bar{B}(q,\rho)$. Zachodzi:

$$G_D(x,y) = \int_{\partial B(p,r)}\int_{\partial B(q,r)} G_D(\xi,\eta)P_{D_1}(x,\xi)P_{D_2}(y,\eta)d\eta d\xi\,.$$

Korzystając z oszacowania jądra Poissona, nierówności $|\xi-\eta| \ge r$ oraz $G_D(\xi,\eta) \le 1/(\pi|\xi-\eta|)$, otrzymujemy:

$$G_D(x,y) \le \frac{1}{\pi r}\cdot\frac{r-\rho r|x-p|^{-1}}{r-\rho}\cdot\frac{r-\rho r|y-p|^{-1}}{r-\rho}\,.$$

7. Brzegowa zasada Harnacka. Niech F będzie spójnym zbiorem zwartym zawartym w otwartym zbiorze G. Niech D będzie spójnym zbiorem otwartym o własności kuli wewnętrznej i zewnętrznej z promieniem ρ. Niech f, g będą nieujemnymi funkcjami harmonicznymi na D i ciągłymi na $\bar{D}$, i niech ponadto $f(z) = g(z) = 0$ dla $z \in G \cap \partial D$. Wówczas istnieje stała $c > 0$ zależna tylko do D, F i G taka, że dla wszystkich $x, y \in F \cap D$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c \, \frac{f(y)}{g(y)} \, .$$

Dowód. Oznaczmy $K = \{x \in D : \delta(x) \geq \rho\}$. Niech $5r$ będzie odległością pomiędzy F i G^c. Możemy bez straty ogólności założyć, że $4\rho \leq r$. Niech $x, y \in D \setminus K$, $|x - y| \geq 4r$. Niech $p = p^{z_x}$, $q = p^{z_y}$. Wówczas $|p - q| \geq 3r$. Na mocy oszacowania funkcji Greena i zawierania $D \subset (\bar{B}^{z_x} \cup \bar{B}^{z_y})^c$:

$$\begin{aligned} G_D(x, y) &\leq \frac{1}{\pi r} \cdot \frac{r - \rho r(\rho + \delta(x))^{-1}}{r - \rho} \cdot \frac{r - \rho r(\rho + \delta(y))^{-1}}{r - \rho} \\ &= \frac{r\delta(x)\delta(y)}{(r - \rho)^2(\rho + \delta(x))(\rho + \delta(y))} \, . \end{aligned}$$

Obliczając pochodną przy $y \to z \in \partial D$ otrzymujemy:

$$P_D(x, z) \leq \frac{r\delta(x)}{\rho^2(r - \rho)^2}$$

dla wszystkich $x \in D \setminus K$, $z \in \partial D$ takich, że $|x - z| \geq 5r$. Z drugiej strony zasada Harnacka dla kuli daje:

$$P_D(x, z) \geq \frac{\delta(x)}{\rho} \cdot \inf_{K \times \partial D} P_D \, .$$

Zauważmy, że P_D jest ciągłą, dodatnią funkcją, a więc $\inf\limits_{K \times \partial D} P_D > 0$.

Ponieważ dla $x, y \in (D \setminus K) \cap F$ oraz $z \in \partial D \setminus G$ zachodzi $|x - z| \geq 5r$, $|y - z| \geq 5r$, więc:

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{\int_{\partial D \setminus G} P_D(x, z) f(z) \sigma(dz)}{\int_{\partial D \setminus G} P_D(y, z) f(z) \sigma(dz)} \leq c \, \frac{\delta(x)}{\delta(y)}$$

ze stałą c zależną od D, F i G. Na mocy zasady Harnacka powyższa nierówność zachodzi także w $K \cap F$ ze stałą zależną od D i K. To dowodzi tezy. $\square$