Twierdzenie Choqueta o mierzalności rzutów

(Na podstawie wykładu prof. Michała Morayne)

Mateusz Kwaśnicki

12. grudnia 2004.

1 Wstęp

Ten tekst jest skróconym zapisem wykładów dr M. Morayne, poświęconych podstawom analizy stochastycznej. W wielu miejscach – przede wszystkim w dowodach twierdzeń – pominięto szczegóły rozumowania, które czytelnik powinien jednak bez trudu uzupełnić. Aby ułatwić lekturę tekstu, tam gdzie trudność łatwo przeoczyć, zamieszczono symbol „♠".

2 Podstawowe definicje i fakty.

1. Oznaczenia. Niech $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ oznaczają odpowiednio przestrzenie liczb naturalnych (z zerem) oraz całkowitych z topologią dyskretną, zaś $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ – zbiór nieskończonych ciągów liczb całkowitych z topologią produktową, indukowaną przez metrykę:

$$d(p, q) = (\min\{i : p_i \neq q_i\} + 1)^{-1} .$$

Niech nadto:

$$\mathbf{S} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{Z}^n$$

będzie zbiorem wszystkich ciągów skończonych. Jedyny ciąg długości zero oznaczamy symbolem $\mathbf{0}$. Niech $\mathbf{S}^* = \mathbf{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Symbole $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ oznaczają odpowiednio zbiory liczb rzeczywistych i wymiernych; symbol „$+$" w indeksie dolnym będzie oznaczał, że mamy na myśli jedynie liczby nieujemne (z zerem); wykluczenie zera ze zbioru będziemy oznaczać symbolem „$*$" w indeksie górnym. W szczególności $\mathbf{N}^*$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Jeśli $k \in \mathbf{N}$, zaś $p \in \mathbf{Z}^\mathbf{N}$ bądź $p \in \mathbf{Z}^n$ dla pewnego $n \geq k$, to oznaczamy:

$$p\langle k\rangle = (p_0, \ldots, p_{k-1}).$$

Jeśli zaś $p \in \mathbf{S}$, $p = (p_0, \ldots, p_{k-1})$ oraz $i \in \mathbf{Z}$, to określamy:

$$\langle p, i\rangle = (p_0, \ldots, p_{k-1}, i).$$

2. Twierdzenie. Przestrzenie topologiczne: $\mathbf{Z}^\mathbf{N}$ (z topologią produktową), $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ oraz $\mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}$ (z naturalną topologią) są ze sobą homeomorficzne.

Dowód. Na potrzeby tego dowodu, niech $p' = (p_0, \ldots, p_{k-2}, p_{k-1} + 1)$ dla $p = (p_0, \ldots, p_{k-1}) \in \mathbf{S}^*$.

Określamy funkcję $\psi : \mathbf{S}^* \to \mathbf{Q}$ indukcyjnie dla coraz dłuższych ciągów tak, aby dla wszystkich $p = (p_0, \ldots, p_{k-1}) \in \mathbf{S}$ spełnione były następujące warunki:

$$\begin{gathered}\psi(\langle p, i\rangle) \text{ jest ściśle rosnącą funkcją } i \in \mathbf{Z},\\ \lim_{i\to-\infty} \psi(\langle p, i\rangle) = \psi(p) \text{ oraz}\\ \lim_{i\to\infty} \psi(\langle p, i\rangle) = \psi(p') \text{ jeśli } k \in \mathbf{N},\\ \lim_{i\to-\infty} \psi(i) = -\infty \text{ oraz } \lim_{i\to\infty} \psi(i) = \infty,\\ \psi(\mathbf{S}^*) = \mathbf{Q}.\end{gathered}$$

(Ostatni warunek uzyskamy na przykład żądając, by w k-tym kroku konstrukcji wyczerpać wszystkie liczby wymierne o mianowniku k.) Dla ciągu $p \in \mathbf{Z}^\mathbf{N}$ określamy:

$$\varphi(p) = \lim_{k\to\infty} \psi(p\langle k\rangle).$$

Wówczas φ jest różnowartościowym odwzorowaniem $\mathbf{Z}^\mathbf{N}$ na $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (♠). Obrazami zbiorów bazowych topologii w $\mathbf{Z}^\mathbf{N}$ są wszystkie zbiory bazy topologii w $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, złożonej z przedziałów postaci $(q(p), q(p'))$ dla $p \in \mathbf{S}^*$. To oznacza ciągłość odwzorowań φ i φ^{-1}. Homeomorfizm między przestrzeniami $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ oraz $\mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}$ ustala funkcja $x \mapsto 2 - x$ dla $x < 1$, $x \mapsto 1/x$ w przeciwnym przypadku. $\square$

3. Uwaga. W powyższym dowodzie można bez żadnych dodatkowych zmian zastąpić zbiór $\mathbf{Q}$ dowolnym innym gęstym podzbiorem przeliczalnym $E \subset \mathbf{R}$. Tym samym udowodniliśmy, że $\mathbf{R}\backslash E_1$ oraz $\mathbf{R}\backslash E_2$ są homeomorficzne dla każdych dwóch przeliczalnych podzbiorów gęstych $E_1, E_2 \subset \mathbf{R}$. Śledząc uważnie dowód można zauważyć, że homeomorfizm między tymi przestrzeniami jest ustalony przez pewną funkcję rosnącą f rozszerzającą się w sposób ciągły do homeomorfizmu $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Oznacza to, że istnieje ciągła i rosnąca funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniająca warunek $f(E_1) = E_2$. Co ciekawe, istnieje funkcja spełniająca te założenia i dodatkowo taka, że f i f^{-1} są nieskończenie wiele razy różniczkowalne.

4. Definicje. Od tego momentu, jeśli nie zostanie powiedziane inaczej, X jest pewnym zbiorem, zaś Φ pewną rodziną jego podzbiorów. Oznaczamy:

$$(\Phi)_\delta = \left\{ \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n : A_n \in \Phi, n \in \mathbf{N} \right\},$$
$$(\Phi)_\sigma = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n : A_n \in \Phi, n \in \mathbf{N} \right\},$$
$$\Phi^c = \{A^c : A \in \Phi\}.$$

Rodzinę Φ nazywamy *$\sigma\delta$-kratą*, jeśli $\Phi = (\Phi)_\delta = (\Phi)_\sigma$, zaś *$\sigma$-algebrą*, jeśli jest $\sigma\delta$-kratą oraz $\Phi = \Phi^c$. Najmniejszą $\sigma\delta$-kratę zawierającą Φ oznaczamy $\hat{\Phi}$, zaś najmniejszą σ-algebrę – $\sigma(\Phi)$. Rodzinę wszystkich podzbiorów X oznaczamy $\mathcal{P}(X)$. Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, to przez $\mathcal{B}(X)$ oznaczamy rodzinę *zbiorów borelowskich* na X, czyli $\sigma(\tau)$, gdzie τ jest rodziną otwartych podzbiorów X.

Jeśli Φ i Ψ są rodzinami podzbiorów odpowiednio zbioru X i Y, to określamy:

$$\Phi \times \Psi = \{A \times B : A \in \Phi, B \in \Psi\},$$
$$\Phi \mathbin{\hat{\otimes}} \Psi = (\Phi \times \Psi)\hat{},$$
$$\Phi \otimes \Psi = \sigma(\Phi \times \Psi).$$

Definiujemy *rzutowanie*: $\pi(x, y) = x$. Dla zbioru $A \subset X \times Y$ oraz $x \in X$ określamy *cięcie* $(A)_x$ jako $\{y \in Y : (x, y) \in A\}$.

5. Fakt. Zachodzą następujące relacje:

$$\Phi \,\hat{\otimes}\, \Psi = \Phi \,\hat{\otimes}\, \hat{\Psi} = \hat{\Phi} \,\hat{\otimes}\, \hat{\Psi},$$
$$\Phi \otimes \Psi = \Phi \otimes \sigma(\Psi) = \sigma(\Phi) \otimes \sigma(\Psi).$$

3 Transformacja $\mathcal{A}$ Souslina

1. Definicja. Niech $T : \mathbf{S}^* \to \mathcal{P}(X)$. Oznaczamy:

$$\mathcal{A}(T) = \bigcup_{p\in\mathbf{Z}^\mathbf{N}} \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} T(p\langle n\rangle),$$
$$\mathcal{A}(\Phi) = \{\mathcal{A}(T) : T : \mathbf{S}^* \to \Phi\}.$$

2. Twierdzenie. Operacja $\mathcal{A}$ jest indempotentna, czyli $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\Phi)) = \mathcal{A}(\Phi)$.

Dowód. Niech $\hat{T} : \mathbf{S}^* \to \mathcal{A}(\Phi)$ i niech $\hat{T}(p) = \mathcal{A}(T_p)$, gdzie $T_p : \mathbf{S}^* \to \Phi$. Niech ponadto $n \mapsto (\alpha(n), \beta(n))$ będzie bijekcją między $\mathbf{Z}$ oraz $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Niech $k \in \mathbf{N}, k > 0$. Wówczas $k = 2^i(2j+1)$ dla pewnych wyznaczonych jednoznacznie $i, j \in \mathbf{N}$. Określamy wtedy:

$$q = (\alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(p_4), \ldots, \alpha(p_{2^i})),$$
$$\widetilde{T}(p_1, \ldots, p_k) = T_q(\beta(p_{2^i}), p_{2^i\cdot 3}, p_{2^i\cdot 5}, \ldots, p_{2^i(2j+1)}).$$

Wówczas (♠):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\widetilde{T}) &= \bigcup_{p\in\mathbf{Z}^\mathbf{N}} \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \widetilde{T}(p\langle k\rangle) \\
&= \bigcup_{q\in\mathbf{Z}^\mathbf{N}} \bigcup_{p_i\in\mathbf{Z}^\mathbf{N}, i\in\mathbf{N}^*} \bigcap_{i\in\mathbf{N}^*} \bigcap_{j\in\mathbf{N}^*} T_{q\langle i\rangle}(p_i\langle j\rangle) \\
&= \bigcup_{q\in\mathbf{Z}^\mathbf{N}} \bigcap_{i\in\mathbf{N}^*} \bigcup_{p\in\mathbf{Z}^\mathbf{N}} \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} T_{q\langle i\rangle}(p\langle k\rangle) \\
&= \bigcup_{q\in\mathbf{Z}^\mathbf{N}} \bigcap_{i\in\mathbf{N}^*} \mathcal{A}(T_{q\langle i\rangle}) = \mathcal{A}(\hat{T}).
\end{aligned}$$
□

3. Twierdzenie. Rodzina $\mathcal{A}(\Phi)$ jest $\sigma\delta$-kratą zawierającą Φ.

Dowód. Niech $A_n \in \Phi$ dla $n \in \mathbf{N}$. Określmy $T_1(p_0, \ldots, p_{k-1}) = A_{|p_0|}$, $T_2(p_0, \ldots, p_{k-1}) = A_{k-1}$ dla każdego $(p_0, \ldots, p_{k-1}) \in \mathbf{S}^*$. Wówczas $\mathcal{A}(T_1) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ oraz $\mathcal{A}(T_2) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$, a więc $(\Phi)_\sigma \subset \mathcal{A}(\Phi)$, $(\Phi)_\delta \subset \mathcal{A}(\Phi)$.

Stosując ten rezultat dla $\mathcal{A}(\Phi)$ w miejsce Φ otrzymujemy:

$$(\mathcal{A}(\Phi))_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{A}(\Phi)) = \mathcal{A}(\Phi),$$
$$(\mathcal{A}(\Phi))_\delta \subset \mathcal{A}(\mathcal{A}(\Phi)) = \mathcal{A}(\Phi),$$

co dowodzi tezy. □

4. Uwaga. W ogólności rodzina $\mathcal{A}(\Phi)$ nie jest σ-algebrą, nawet gdy Φ jest σ-algebrą.

5. Twierdzenie. Zachodzą następujące równości:

$$\mathcal{A}(\Phi) = \left\{\pi(E) : E \in \Phi \hat{\otimes} \mathcal{B}\left(\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}\right)\right\} = \left\{\pi(E) : E \in \Phi \hat{\otimes} \mathcal{B}(\mathbf{R})\right\}.$$

Dowód. Teza twierdzenia wynika z poniższych trzech lematów. □

6. Lemat. Zachodzi inkluzja $\mathcal{A}(\Phi) \subset \left\{\pi(E) : E \in \Phi \hat{\otimes} \mathcal{B}\left(\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}\right)\right\}$.

Dowód. Niech $T : \mathbf{S}^* \to \Phi$. Określmy:

$$E_k = \bigcup_{p\in\mathbf{Z}^k} T(p) \times U(p),$$

gdzie $U(p_0, \ldots, p_{k-1}) = \left\{q \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}} : q_i = p_i, i = 0, \ldots, k-1\right\}$ jest zbiorem bazowym topologii w $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$. Niech $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Wówczas $E \in \Phi \hat{\otimes} \mathcal{B}\left(\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}\right)$ oraz $\pi(E) = \mathcal{A}(T)$. □

7. Lemat. Zachodzi inkluzja $\mathcal{A}(\Phi) \supset \left\{\pi(E) : E \in \Phi \hat{\otimes} \mathcal{B}(\mathbf{R})\right\}$.

Dowód. Niech $\Psi = \{[a, b] : a, b \in \mathbf{R}, a \le b\}$ będzie rodziną domkniętych przedziałów liczb rzeczywistych. Wówczas $(\Psi)_\delta = \Psi$ oraz $\hat{\Psi} = \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Ponadto jeśli $B_n \in \Psi$, $n \in \mathbf{N}$, to:

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_n = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbf{N} : \bigcap_{n=0}^{k} B_n = \emptyset.$$

Oznacza to, że jeśli $E_n \in \Phi \times \Psi$, $n \in \mathbf{N}$, to:

$$\pi\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} E_n\right) = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} \pi\left(\bigcap_{n=0}^{k} E_n\right).$$

Oczywiście rzut sumy dowolnej mnogości zbiorów jest sumą rzutów tych zbiorów. Weźmy zatem dowolne $T : \mathbf{S}^* \to \Phi \times \Psi$ i niech $T(p) = T_1(p) \times T_2(p)$. Określmy $\widetilde{T} : \mathbf{S}^* \to \Phi \times \Psi$ dla $p = (p_0, \ldots, p_{k-1}) \in \mathbf{S}^*$ wzorem:

$$\widetilde{T}(p) = T_1(p) \times \left(\bigcap_{n=1}^{k} T_2(p\langle n\rangle)\right).$$

Wówczas (♠):

$$\pi(\mathcal{A}(T)) = \pi(\mathcal{A}(\widetilde{T})) = \mathcal{A}(\pi \circ \widetilde{T}) \in \mathcal{A}(\Phi).$$

Ale $\mathcal{A}(\Phi \times \Psi) \supset (\Phi \times \Psi)\hat{} = \Phi \mathbin{\hat{\otimes}} \mathcal{B}(\mathbf{R})$, a więc $\pi(E) \in \mathcal{A}(\Phi)$ dla wszystkich $E \in \Phi \mathbin{\hat{\otimes}} \mathcal{B}(\mathbf{R})$. $\square$

8. Lemat. Zachodzi równość:

$$\left\{\pi(E) : E \in \Phi \mathbin{\hat{\otimes}} \mathcal{B}\left(\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}\right)\right\} = \left\{\pi(E) : E \in \Phi \mathbin{\hat{\otimes}} \mathcal{B}(\mathbf{R})\right\}.$$

Dowód. Przestrzenie $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ i $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ są homeomorficzne (twierdzenie 2.2), a między przestrzeniami $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ oraz $\mathbf{R}$ istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie borelowskie, którego odwrotność jest także borelowska. Zatem:

$$\begin{aligned}\left\{\pi(E) : E \in \Phi \mathbin{\hat{\otimes}} \mathcal{B}\left(\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}\right)\right\} &= \left\{\pi(E) : E \in \Phi \mathbin{\hat{\otimes}} \mathcal{B}(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})\right\} \\ &= \left\{\pi(E) : E \in \Phi \mathbin{\hat{\otimes}} \mathcal{B}(\mathbf{R})\right\}.\end{aligned}$$ $\square$

9. Uwaga. Oczywiście w twierdzeniu 5 można w miejsce $\mathbf{R}$ napisać $\mathbf{R}_+$ bądź dowolny przedział (otwarty lub domknięty) liczb rzeczywistych.

4 Twierdzenie Königa o drzewach

1. Definicja. *Drzewem* nazywamy każdy zbiór $\mathcal{T} \subset \mathbf{S}$ spełniający warunek:

$$(p_0, \ldots, p_k) \in \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad (p_0, \ldots, p_{k-1}) \in \mathcal{T}$$

dla wszystkich $k \in \mathbf{N}$. Dla *wierzchołka* $p \in \mathcal{T}$ liczbę:

$$\#\{i : \langle p, i \rangle \in \mathcal{T}\}$$

nazywamy *stopniem rozgałęzienia* wierzchołka p. Drzewo $\mathcal{T}$ nazywamy *skończenie rozgałęzionym*, jeśli stopień rozgałęzienia każdego wierzchołka $\mathcal{T}$ jest skończony.

2. Twierdzenie Königa o drzewach skończenie rozgałęzionych. Jeśli T jest drzewem skończenie rozgałęzionym oraz $\#\mathcal{T} = \infty$, to istnieje ciąg $p \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ taki, że $p\langle k \rangle \in \mathcal{T}$ dla każdego $k \in \mathbf{N}^*$.

Dowód. Ciąg p skonstruujemy indukcyjnie, dbając o to, by w każdym kroku zbiór przedłużeń ciągu $p\langle k \rangle$ w drzewie $\mathcal{T}$:

$$A(p\langle k \rangle) = \{q \in \mathcal{T} : q\langle k \rangle = p\langle k \rangle\}$$

był nieskończony. Dla $k = 0$ zachodzi $A(\mathbf{0}) = \mathcal{T}$, a więc warunek jest spełniony. Jeśli skonstruowany został już ciąg $p\langle k \rangle$, to:

$$A(p\langle k \rangle) = \{p\langle k \rangle\} \cup \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} A(\langle p\langle k \rangle, i \rangle)$$

oraz tylko skończenie wiele zbiorów $A(\langle p\langle k \rangle, i \rangle)$, $i \in \mathbf{Z}$, jest niepustych. Zatem dla pewnego $i \in \mathbf{Z}$ zbiór $A(\langle p\langle k \rangle, i \rangle)$ jest nieskończony. Przyjmujemy $p_k = i$. $\square$

5 Pojemność Choqueta

1. Definicja. Funkcję $\nu : \mathcal{P}(X) \to \mathbf{R}$ nazywamy Φ-*pojemnością Choqueta* (w skrócie Φ-pojemnością), jeśli spełnia następujące warunki:

1. Monotoniczność: Dla $A \subset B \subset X$ zachodzi $\nu(A) \leq \nu(B)$,

2. Ciągłość w górę: Dla $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset X$ zachodzi $\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$,

3. Ciągłość w dół: Dla $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset X$, $A_n \in \Phi$, $n \in \mathbf{N}$, zachodzi $\nu\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$.

Mówimy, że $A \subset X$ jest ν-*kapacytowalny*, jeśli:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B \in (\Phi)_\delta : \quad B \subset A, \nu(B) > \nu(A) - \epsilon.$$

2. Twierdzenie. Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną, zaś $\mathbf{P}^*$ miarą zewnętrzną, czyli:

$$\mathbf{P}^*(A) = \inf\left\{\mathbf{P}(E) : E \in \mathcal{F}, E \supset A\right\},$$

to $\mathbf{P}^*$ jest $\mathcal{F}$-pojemnością.

Dowód. Najpierw udowodnimy, że $\mathbf{P}^*$ jest $\mathcal{F}$-pojemnością. Monotoniczność wynika wprost z definicji. Jeśli $A_n \subset X$ dla $n \in \mathbf{N}$, to niech $E_n \in \mathcal{F}$ będzie takim zbiorem, że $A_n \subset E_n$, $\mathbf{P}^*(A_n) = \mathbf{P}(E_n)$.

Jeśli $A_0 \subset A_1 \subset \ldots$, to:

$$\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}^*(A_n) \le \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i\right) \le \mathbf{P}(E_n).$$

Zatem:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E_n) =& \mathbf{P}^*(A_n) \le \mathbf{P}^*\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} A_j\right) \le \mathbf{P}\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} \bigcap_{i=j}^{\infty} E_i\right) \\ &= \lim_{j\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=j}^{\infty} E_i\right) = \lim_{j\to\infty} \mathbf{P}\left(E_j\right),\end{aligned}$$

co oznacza ciągłość w górę. Ciągłość w dół wynika wynika z ciągłości miary. $\square$

3. Twierdzenie Choqueta. Załóżmy, że Φ jest *kratą*, czyli rodziną zamkniętą na skończone sumy i przekroje. Jeśli ν jest Φ-pojemnością, to każdy zbiór z rodziny $\mathcal{A}(\Phi)$ jest ν-kapacytowalny.

Dowód. Niech $A = \mathcal{A}(T)$, gdzie $T : \mathbf{S}^* \to \Phi$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że:

$$T(p\langle k\rangle) \supset T(p\langle k+1\rangle)$$

dla wszystkich $p \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, $k \in \mathbf{N}^*$. Określamy:

$$\widetilde{T}(p) = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} T(p\langle k\rangle)$$

dla $p \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$. Ponadto dla dowolnego skończonego ciągu liczb naturalnych $m = (m_0, \ldots, m_{k-1})$ niech $S(m)$ oznacza sumę mnogościową obrazów wszystkich ciągów z $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, których początkowe współrzędne są ograniczone przez liczby m_i, a więc:

$$S(m) = \bigcup_{p \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}, |p_i| < m_i \text{ dla } i=0,\ldots,k-1} \widetilde{T}(p).$$

Zauważmy, że $S(\mathbf{0}) = A$. Ustalmy $\epsilon > 0$. Konstruujemy indukcyjnie ciąg liczb naturalnych m w następujący sposób. Przyjmijmy, że zostały już określone $m_0, \ldots, m_{k-1}$ tak, że:

$$\nu(S(m\langle k\rangle)) > \nu(A) - \epsilon.$$

Wobec:

$$S(m\langle k\rangle) = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} S(\langle m\langle k\rangle, i\rangle)$$

i definicji Φ-pojemności, dla pewnego $m_k \in \mathbf{N}$:

$$\nu(S(m\langle k+1\rangle)) > \nu(A) - \epsilon.$$

Niech teraz:

$$F_k = \bigcup_{p \in \mathbf{N}^k, |p_i| < m_i \text{ dla } i=0,\ldots,k-1} T(p)$$

dla $k \in \mathbf{N}^*$ oraz niech:

$$F = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} F_k.$$

Oczywiście $F_k \in \Phi$, więc $F \in (\Phi)_\delta$. Ponadto:

$$\nu(F_k) \geq \nu(S(m\langle k\rangle)) > \nu(A) - \epsilon,$$

przez co $\nu(F) = \lim_{k\to\infty} \nu(F_k) \geq \nu(A) - \epsilon$. Pokażemy, że $F \subset A$.

Niech $x \in F$. Określamy drzewo $\mathcal{T}$ jako zbiór wszystkich wierzchołków postaci $p\langle k\rangle$ dla $p \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ takich, że $x \in T(p)$ oraz $|p_i| < m_i$ dla $i = 0, \ldots, k-1$. Jest to drzewo nieskończone (bo wobec definicji F i F_k zawiera ciągi dowolnej długości) i skończenie rozgałęzione, więc na mocy twierdzenia Königa (4.2) istnieje ciąg $p \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ taki, że $|p_i| < m_i$ dla $i \in \mathbf{N}$ oraz $x \in T(p\langle k\rangle)$ dla wszystkich $k \in \mathbf{N}^*$. To oznacza, że $x \in A$. Zatem $F \subset A$. □

Powyższy dowód pochodzi od prof. J. Cichonia i prof. [???].

4. Wnioski. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Przez $\mathcal{F}^\mu$ oznaczamy *σ-algebrę uzupełnioną* względem miary μ, a więc σ-algebrę generowaną przez $\mathcal{F}$ oraz wszystkie zbiory $A \subset X$ takie, że $\mu^*(A) = 0$. Wówczas:

$$\mathcal{F}^\mu = \{A : \exists E_1, E_2 \in \mathcal{F} : E_1 \subset A \subset E_2, \mu(E_1) = \mu(E_2)\}$$

lub inaczej:

$$\mathcal{F}^\mu = \{A : \exists E \in \mathcal{F} : E \subset A, \mu(E) = \mu^*(A)\}.$$

Miarę μ można jednoznacznie rozszerzyć do miary na $\mathcal{F}^\mu$. Na mocy tw. Choqueta i faktu, że μ^* jest $\mathcal{F}^\mu$-pojemnością, każdy zbiór z rodziny $\mathcal{A}(\mathcal{F}^\mu)$ spełnia powyższy warunek, więc $\mathcal{A}(\mathcal{F}^\mu) \subset \mathcal{F}^\mu$.

Co więcej, jeśli $(\Omega, \mathcal{F})$ jest przestrzenią mierzalną, to dla każdej miary probabilistycznej μ na σ-algebrze $\mathcal{F}$ zachodzi $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}^\mu$, a więc:

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}^* = \bigcap_{\mu \in \mathbf{M}(\mathcal{F})} \mathcal{F}^\mu,$$

gdzie $\mathbf{M}(\mathcal{F})$ oznacza rodzinę wszystkich miar probabilistycznych na σ-algebrze $\mathcal{F}$, zaś $\mathcal{F}^*$ nazywane jest *rodziną zbiorów uniwersalnie mierzalnych*. Zauważmy, że $(\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F}^*$.

Na mocy twierdzenia 3.5 oznacza to, że rzuty $\pi(E)$ zbiorów $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$ (a nawet $E \in \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$) należą do rodziny zbiorów uniwersalnie mierzalnych $\mathcal{F}^*$, zaś rzuty zbiorów $E \in \mathcal{F}^\mu \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$ należą do $\mathcal{F}^\mu$. W szczególności rzuty borelowskich podzbiorów płaszczyzny na jedną z osi są mierzalne w sensie Lebesgue'a.

5. Twierdzenie. Jeśli $\Phi = \{E \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) : \forall \omega \in \Omega : (E)_\omega \text{ jest zwarty}\}$ oraz $X = \Omega \times \mathbf{R}_+$, to funkcja $\nu(A) = \mathbf{P}^*(\pi(A))$ dla $A \in \mathcal{P}(X)$ jest Φ-pojemnością.

Dowód. Monotoniczność ν wynika z monotoniczności rzutów, ciągłość w górę z przemienności rzutowania i sumowania oraz ciągłości w górę $\mathbf{P}^*$ udowodnionej w twierdzeniu 5.2. Jeśli $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$, $A_n \in \Phi$, $n \in \mathbf{N}$, to dla $\omega \in \Omega$:

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (A_n)_\omega = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbf{N} : (A_n)_\omega = \emptyset$$

wobec zwartości cięć $(A_n)_\omega$, a więc $\pi\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \pi(A_n)$. Ponadto na mocy wniosków wyciągniętych z tw. Choqueta, zachodzi $\pi(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbf{P}}$, $\pi\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) \in \mathcal{F}^{\mathbf{P}}$. Zatem po przedłużeniu $\mathbf{P}$ do miary na $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$:

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) &= \mathbf{P}^*\left(\pi\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \pi(A_n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\pi(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n). \qquad \square\end{aligned}$$

Znów w miejsce $\mathbf{R}_+$ można wpisać $\mathbf{R}$ bądź dowolny przedział liczb rzeczywistych.

6 Wykresy mierzalne i twierdzenie von Neumanna o selektorze

1. Definicja. Zbiór $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ nazywamy *wykresem mierzalnym*, jeśli:

$$\forall \omega \in \Omega : \#(A)_\omega \le 1.$$

Debiutem zbioru $E \subset \Omega \times \mathbf{R}_+$ nazywamy funkcję określoną dla $\omega \in \pi(E)$ wzorem $\mathcal{D}_A(\omega) = \inf\{t \in \mathbf{R}_+ : (\omega, t) \in E\}$.

2. Twierdzenie. Jeśli przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ jest *zupełna* (czyli $\mathcal{F}^{\mathbf{P}} = \mathcal{F}$), to każdy wykres mierzalny jest postaci:

$$\{(\omega, f(\omega)) : \omega \in E\}$$

dla pewnego $E \in \mathcal{F}$ oraz $f : E \to \mathbf{R}_+$ borelowskiej.

Dowód. Jeśli $E \in \mathcal{F}$ oraz $f : E \to \mathbf{R}_+$ jest funkcją borelowską, to:

$$\begin{aligned}&\{(\omega, f(\omega)) : \omega \in E\} \\ &\quad = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \left(f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right) \cap E\right) \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+).\end{aligned}$$

Jeśli zaś A jest wykresem mierzalnym, to określamy $E = \pi(A) \in \mathcal{F}^{\mathbf{P}} = \mathcal{F}$ (mierzalność E wynika z 5.4) oraz $f(\omega) \in (A)_\omega$ dla $\omega \in E$. Zauważmy, że wybór f jest jednoznaczny oraz że $A = \{(\omega, f(\omega)) : \omega \in E\}$. Ponadto dla $F \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{\omega \in \Omega : (A)_\omega \cap F \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega : (A \cap (\Omega \times F))_\omega \neq \emptyset\} \\ &= \pi(A \cap (\Omega \times F)) \in \mathcal{F}^{\mathbf{P}} = \mathcal{F} \end{aligned}$$

(mierzalność ponownie jest konsekwencją 5.4). Zatem f jest funkcją borelowską. □

3. Twierdzenie. Jeśli przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ jest zupełna oraz $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$, to $\mathcal{D}_E$ jest funkcją mierzalną.

Dowód. Teza wynika z następującego rachunku:

$$\begin{aligned} \{\omega \in \pi(E) : \mathcal{D}_E(\omega) < t\} &= \{\omega \in \Omega : \quad \exists s \in [0, t) : (\omega, s) \in E\} \\ &= \pi(E \cap (\Omega \times [0, t))) \end{aligned}$$

oraz z 5.4. □

4. Uwaga. W dowodach powyższych twierdzeń wykorzystaliśmy jedynie fakt, że rzut zbioru mierzalnego jest mierzalny. Można zatem osłabić założenia tych twierdzeń: zamiast zupełności przestrzeni probabilistycznej wystarczy wymagać, by $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. W szczególności $\mathcal{F}$ może być σ-algebrą zbiorów uniwersalnie mierzalnych.

5. Twierdzenie von Neumanna o selektorze. Jeśli przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ jest zupełna, zaś $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$, to istnieje wykres mierzalny $A \subset E$ taki, że $\pi(A) = \pi(E)$.

Dowód. Niech $\Phi = \{E \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) : \forall \omega \in \Omega : (E)_\omega \text{ jest zwarty}\}$ i niech $\nu(A) = \mathbf{P}^*(\pi(A))$. Udowodniliśmy w 5.5, że ν jest Φ-pojemnością. Skonstruujemy indukcyjnie ciąg $F_n \in \Phi$, $n \in \mathbf{N}^*$, oraz ciąg pomocniczy $E_n \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Niech $E_1 = E$. Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbf{N}^*$ skonstruowaliśmy już $E_n \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$. Ponieważ E_n jest ν-kapacytowalny, więc istnieje $F_n \in (\Phi)_\delta = \Phi$ taki, że $F_n \subset E_n$ oraz $\nu(F_n) > \nu(E_n) - 1/n$. Określamy:

$$E_{n+1} = E_n \setminus (\pi(F_n) \times \mathbf{R}_+).$$

Na mocy 5.4 $E_{n+1} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$.

Zauważmy, że $\pi(F_n) \cap \pi(E_{n+1}) = \emptyset$ oraz $\pi(E_{n+1}) \cup \pi(F_n) = \pi(E_n)$. Wynika stąd, że dla $n \neq m$ zachodzi $\pi(F_n) \cap \pi(F_m) = \emptyset$, a więc:

$$F = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} F_n \in \Phi,$$

oraz:

$$\pi(F) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \pi(F_n) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \pi(E_n) \setminus \pi(E_{n+1}) = \pi(E) \setminus \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} E_n.$$

Stąd:

$$\mathbf{P}(\pi(E)) - \mathbf{P}(\pi(F)) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(E_{n+1}) = \lim_{n \to \infty} (\nu(E_n) - \nu(F_n)) = 0$$

(mierzalność wszystkich zbiorów w powyższej równości wynika z 5.4). Ponadto wobec $F_n \subset E_n$ zachodzi $F \subset E$.

Określmy $f : \pi(E) \to \mathbf{R}_+$ wzorem $f(\omega) = \mathcal{D}_F(\omega)$ dla $\omega \in \pi(F)$ oraz tak, by $f(\omega) \in E_\omega$ dla $\omega \in \pi(E) \setminus \pi(E)$. Na mocy twierdzenia 6.3 i wobec zupełności przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, funkcja f jest mierzalna. Ponadto jej wykres jest zawarty w E (bo wykres $\mathcal{D}_F$ jest zawarty w F). Teza wynika z twierdzenia 6.2. $\square$