Teoria potencjału dla ułamkowych potęg operatora Laplace'a

Mateusz Kwaśnicki

Skład rozprawy doktorskiej:

[1] *Estimates and structure of α-harmonic functions* (praca z K. Bogdanem i T. Kulczyckim, Prob. Theory Rel. Fields 2008)

[2] *Spectral gap estimate for stable processes on arbitrary bounded open sets* (Probab. Math. Statist. 2008)

[3] *Eigenvalues of the Cauchy process on an interval have at most double multiplicity* (praca wysłana do redakcji)

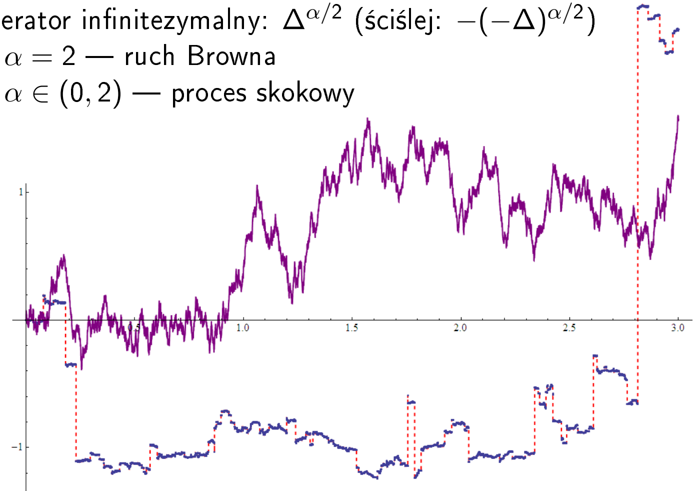
[4] *Intrinsic ultracontractivity for stable semigroups on unbounded open sets* (praca wysłana do redakcji)

Izotropowe procesy stabilne

Definicja

Izotropowym procesem α**-stabilnym** *nazywamy proces Lévy'ego* $X(t)$ *w* $\mathbf{R}^d$ *i funkcji charakterystycznej* $\exp(-t|x|^\alpha)$, $\alpha \in (0, 2]$.

- generator infinitezymalny: $\Delta^{\alpha/2}$ (ściślej: $-(-\Delta)^{\alpha/2}$)
- dla $\alpha = 2$ — ruch Browna
- dla $\alpha \in (0, 2)$ — proces skokowy



Oznaczenia

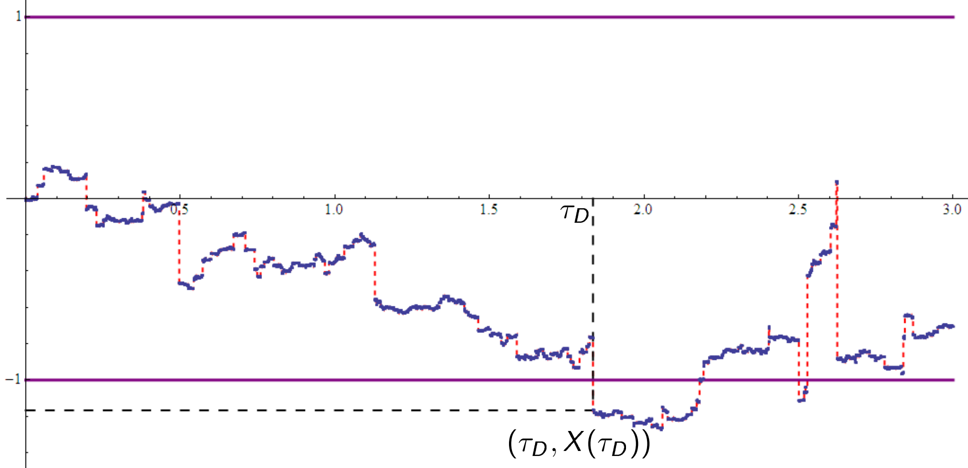
Jeśli nie jest powiedziane inaczej, to:

- $\alpha \in (0, 2)$
- $d \in \{1, 2, 3, ...\}$ — wymiar
- $D \subseteq \mathbf{R}^d$ — otwarty
- X_t — izotropowy proces α-stabilny w $\mathbf{R}^d$
- β_t — ruch Browna w $\mathbf{R}^d$
- $\mathbf{P}^x$ — rozkład prawd. procesu startującego z $x \in \mathbf{R}^d$
- $\mathbf{E}^x$ — wartość oczekiwana względem $\mathbf{P}^x$

Czas pierwszego wyjścia z D:

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0 \ : \ X_t \notin D\}$$

- dla $\alpha = 2$ — $\beta(\tau_D) \in \partial D$
- dla $\alpha < 2$ — $X(\tau_D) \in \mathbf{R}^d \setminus D$



Funkcje α-harmoniczne

Definicja

Funkcję $f : D \to [0, \infty)$ *nazywamy* **harmoniczną** *w* D, *jeśli*

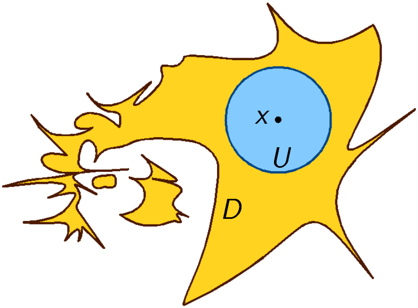
$$\Delta f(x) = 0\,, \qquad \text{gdy } x \in D.$$

Funkcje α-harmoniczne

Definicja

Funkcję $f : D \to [0, \infty)$ *nazywamy* **harmoniczną** *w* D*, jeśli*

$$f(x) = \int_{\partial B(x,r)} f(y)\sigma(dy)\,, \qquad \text{gdy } x \in D,\ \overline{B}(x,r) \subseteq D.$$



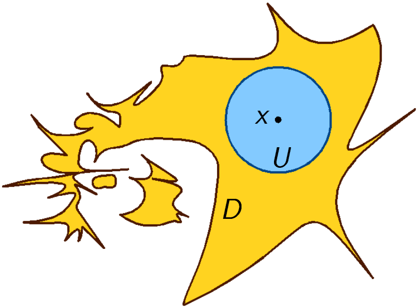
Funkcje α-harmoniczne

Definicja

Funkcję $f : D \to [0,\infty)$ nazywamy **harmoniczną** *w D, jeśli*

$$f(x) = \mathbf{E}^x f(\beta(\tau_U)), \qquad \text{gdy } U = B(x,r);$$

gdzie β_t — ruch Browna.



Funkcje α-harmoniczne

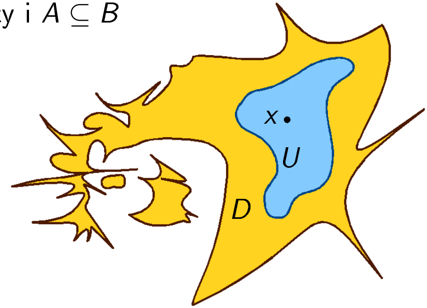
Definicja

Funkcję $f : D \to [0, \infty)$ *nazywamy* **harmoniczną** *w* D, *jeśli*

$$f(x) = \mathbf{E}^x f(\beta(\tau_U)), \qquad \text{gdy } x \in U \Subset D;$$

gdzie β_t *— ruch Browna.*

- $A \Subset B$ oznacza, że $\overline{A}$ jest zwarty i $\overline{A} \subseteq B$



Funkcje α-harmoniczne

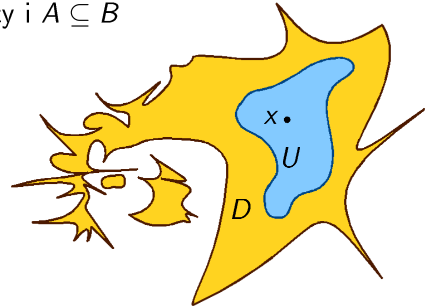
Definicja

Funkcję $f : D \to [0, \infty)$ *nazywamy* α-**harmoniczną** *w* D*, jeśli*

$$f(x) = \mathbf{E}^x f(X(\tau_U)), \qquad \text{gdy } x \in U \Subset D;$$

gdzie X_t *— izotropowy proces* α*-stabilny.*

- $A \Subset B$ oznacza, że $\overline{A}$ jest zwarty i $\overline{A} \subseteq B$



Funkcje α-harmoniczne

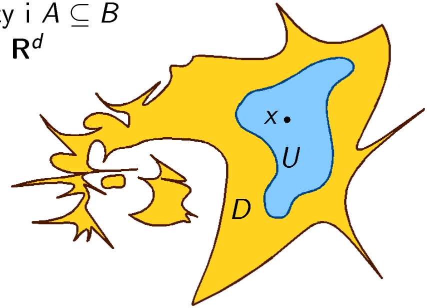
Definicja

*Funkcję $f : \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$ nazywamy α-**harmoniczną** w D, jeśli*

$$f(x) = \mathbf{E}^x f(X(\tau_U)), \qquad \text{gdy } x \in U \Subset D;$$

gdzie X_t — izotropowy proces α-stabilny.

- $A \Subset B$ oznacza, że $\overline{A}$ jest zwarty i $\overline{A} \subseteq B$
- f musi być określona na **całym $\mathbf{R}^d$**



Funkcje α-harmoniczne

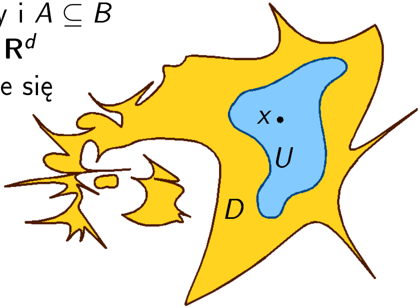
Definicja

Funkcję $f:\mathbf{R}^d\to[0,\infty)$ *nazywamy* α-**harmoniczną** *w* D, *jeśli*

$$f(x)=\mathbf{E}^x f(X(\tau_U)),\qquad gdy\ x\in U\Subset D;\qquad\spadesuit$$

f *jest* **singularnie** α-**harm.** *w* D, *jeśli dodatkowo* $f=0$ *na* D^c;
f *jest* **regularnie** α-**harm.** *w* D, *jeśli* $\spadesuit$, *gdy* $x\in U\subseteq D$.

- $A\Subset B$ oznacza, że $\overline{A}$ jest zwarty i $\overline{A}\subseteq B$
- f musi być określona na **całym** $\mathbf{R}^d$
- regularna α-harmoniczność wiąże się z ciągłością na brzegu



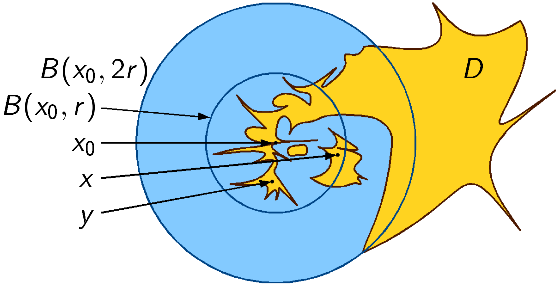
Brzegowa nierówność Harnacka

Tw. (K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki; PTRF 2008)

Jeśli $x_0 \in \partial D$, $f, g \geq 0$ *— regularnie* α*-harmoniczne w* D*,* $f = g = 0$ *na* $B(x_0, 2R) \setminus D$*, to*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq C \frac{f(y)}{g(y)} \qquad \text{dla } x, y \in D \cap B(x_0, R).$$

Ponadto $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *istnieje.*



Brzegowa nierówność Harnacka

Tw. (K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki; PTRF 2008)

Jeśli $x_0 \in \partial D$, $f, g \geq 0$ *— regularnie* α*-harmoniczne w* D, $f = g = 0$ *na* $B(x_0, 2R) \setminus D$, *to*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq C\,\frac{f(y)}{g(y)} \qquad \text{dla } x, y \in D \cap B(x_0, R).$$

Ponadto $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *istnieje.*

Historia:

- Bogdan (1997) — D Lipschitza, $C = C(D)$
- Song, Wu (1999) — D dowolne, $C = C(D)$

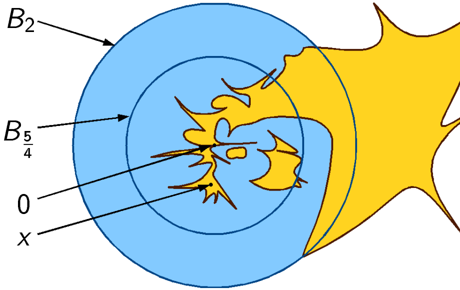
- **Stała C nie zależy od D, x_0, R**
- Nie ma **żadnych** założeń o regularności ∂D i spójności D
- Dla $\alpha = 2$ potrzebne dodatkowe założenia

Brzegowa nierówność Harnacka — pięć kul

$B_r = B(0, r)$, $D_r = D \cap B_r$

$\tau_r = \tau_{D_r}$

$f(x) = \mathbf{E}^x f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}})$



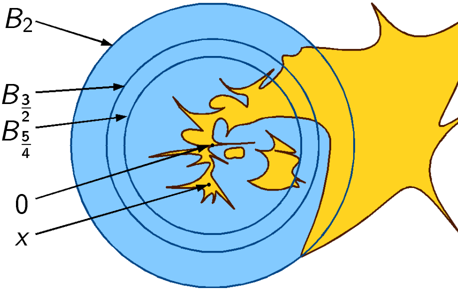
Brzegowa nierówność Harnacka — pięć kul

$B_r = B(0,r)$, $D_r = D \cap B_r$

$\tau_r = \tau_{D_r}$

$f(x) = \mathbf{E}^x f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}})$

$$f(x) = \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| \geq \tfrac{3}{2} \right)$$
$$+ \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); \tfrac{5}{4} \leq |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| < \tfrac{3}{2} \right)$$

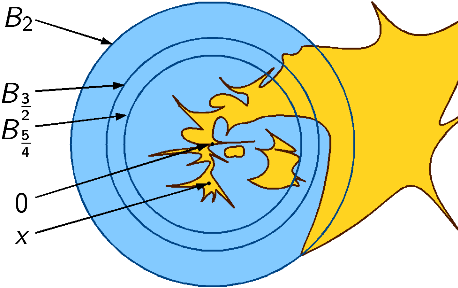


Brzegowa nierówność Harnacka — pięć kul

$B_r = B(0,r),\ D_r = D \cap B_r$
$\tau_r = \tau_{D_r}$
$f(x) = \mathbf{E}^x f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}})$

$$f(x) = \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| \geq \tfrac{3}{2} \right)$$
$$+ \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); \tfrac{5}{4} \leq |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| < \tfrac{3}{2} \right)$$

$$(1) \asymp C\mathbf{E}^x \tau_{\frac{5}{4}} \int_{B^c_{3/2}} \frac{f(z)}{|z|^{d+\alpha}} dz$$

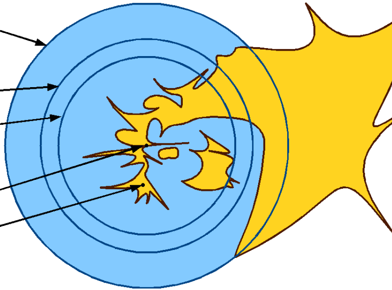


Brzegowa nierówność Harnacka — pięć kul

$B_r = B(0,r),\ D_r = D \cap B_r$

$\tau_r = \tau_{D_r}$

$f(x) = \mathbf{E}^x f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}})$



$$f(x) = \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| \geq \tfrac{3}{2} \right)$$
$$+ \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); \tfrac{5}{4} \leq |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| < \tfrac{3}{2} \right)$$

$$(1) \asymp C \mathbf{E}^x \tau_{\frac{5}{4}} \int_{B^c_{3/2}} \frac{f(z)}{|z|^{d+\alpha}} dz$$

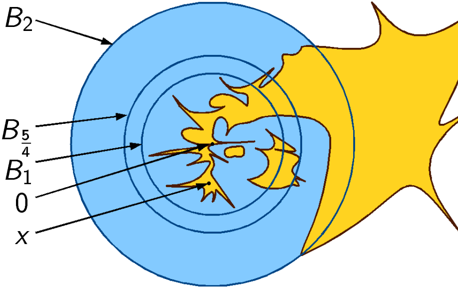
$$(2) \leq \mathbf{P}^x(|X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| \geq \tfrac{5}{4}) \sup_{B_{3/2}} f$$

Brzegowa nierówność Harnacka — pięć kul

$$B_r = B(0,r),\ D_r = D \cap B_r$$

$$\tau_r = \tau_{D_r}$$

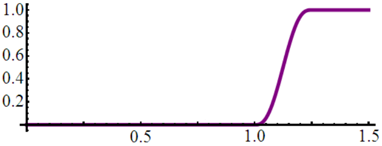
$$f(x) = \mathbf{E}^x f(X_{\tau_{\frac54}})$$



$$f(x) = \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac54}}); |X_{\tau_{\frac54}}| \geq \tfrac32 \right)$$

$$+ \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac54}}); \tfrac54 \leq |X_{\tau_{\frac54}}| < \tfrac32 \right)$$

$$(1) \asymp C\mathbf{E}^x \tau_{\frac54} \int_{B^c_{3/2}} \frac{f(z)}{|z|^{d+\alpha}} dz$$



$$(2) \leq \mathbf{P}^x(|X_{\tau_{\frac54}}| \geq \tfrac54) \sup_{B_{3/2}} f$$

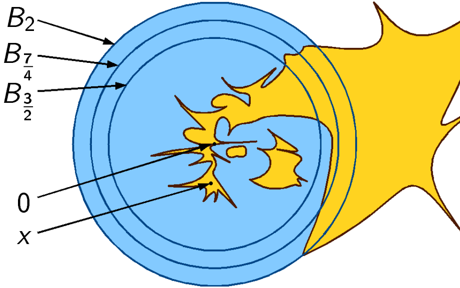
$$\mathbf{P}^x(X_{\tau_{\frac54}} \geq \tfrac54) \leq \mathbf{E}^x \phi(X_{\tau_{\frac54}}) = G_{D_{\frac54}} \Delta^{\alpha/2} \phi(x) \leq C\mathbf{E}^x \tau_{\frac54}$$

Brzegowa nierówność Harnacka — pięć kul

$B_r = B(0,r),\ D_r = D \cap B_r$

$\tau_r = \tau_{D_r}$

$f(x) = \mathbf{E}^x f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}})$



$$f(x) = \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| \geq \tfrac{3}{2} \right) + \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); \tfrac{5}{4} \leq |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| < \tfrac{3}{2} \right)$$

$$(1) \asymp C\mathbf{E}^x \tau_{\frac{5}{4}} \int_{B^c_{3/2}} \frac{f(z)}{|z|^{d+\alpha}} dz$$

$$(2) \leq \mathbf{P}^x(|X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| \geq \tfrac{5}{4}) \sup_{B_{3/2}} f$$

$$\mathbf{P}^x(X_{\tau_{\frac{5}{4}}} \geq \tfrac{5}{4}) \leq \mathbf{E}^x \phi(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}) = G_{D_{\frac{5}{4}}} \Delta^{\alpha/2}\phi(x) \leq C\mathbf{E}^x \tau_{\frac{5}{4}}$$

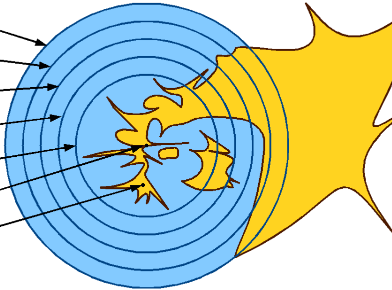
$$f(y) \leq 4 \int_{\frac{7}{4}}^{2} \mathbf{E}^y f(X_{\tau_s})\, ds \leq C \int_{B^c_{7/4}} \frac{f(z)}{|z|^{d+\alpha}} dz$$

Brzegowa nierówność Harnacka — pięć kul

$B_r = B(0,r),\ D_r = D \cap B_r$

$\tau_r = \tau_{D_r}$

$f(x) = \mathbf{E}^x f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}})$



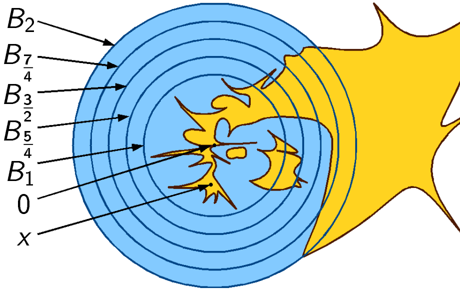
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| \geq \tfrac{3}{2} \right) \\
&\quad + \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); \tfrac{5}{4} \leq |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| < \tfrac{3}{2} \right) \\
&\asymp C \mathbf{E}^x \tau_2 \int_{B_1^c} \frac{f(z)}{|z|^{d+\alpha}} dz \\
&= C\, A(x)\, B(f)
\end{aligned}
$$

Brzegowa nierówność Harnacka — pięć kul

$B_r = B(0,r),\ D_r = D \cap B_r$

$\tau_r = \tau_{D_r}$

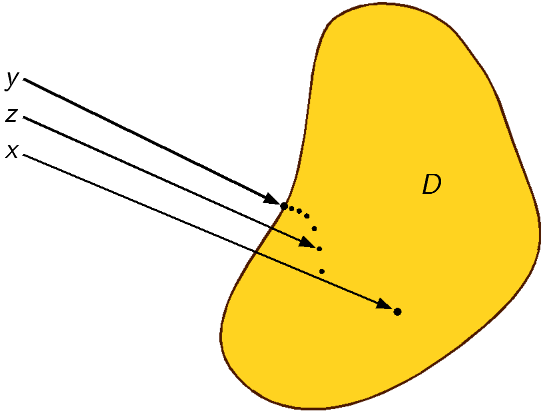
$f(x) = \mathbf{E}^x f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}})$



$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| \geq \tfrac{3}{2} \right) \\ &\quad + \mathbf{E}^x \left(f(X_{\tau_{\frac{5}{4}}}); \tfrac{5}{4} \leq |X_{\tau_{\frac{5}{4}}}| < \tfrac{3}{2} \right) \\ &\asymp C \mathbf{E}^x \tau_2 \int_{B_1^c} \frac{f(z)}{|z|^{d+\alpha}} dz \\ &= C\, A(x)\, B(f) \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)g(y)}{f(y)g(x)} \asymp C \frac{(A(x)B(f))(A(y)B(g))}{(A(y)B(f))(A(x)B(g))} = C$$

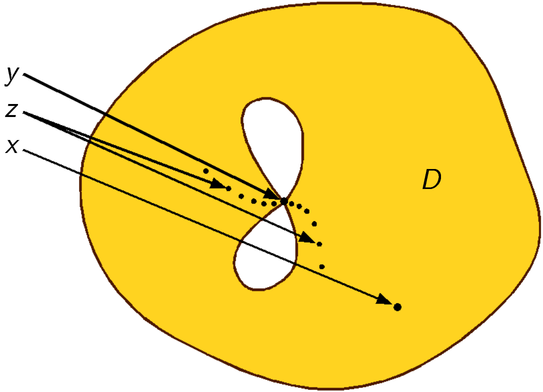
Reprezentacja Martina



Dla $x \in D$, $y \in \partial D$ **jądro Martina**:

$$M_D(x, y) = \lim_{z \to y} \frac{G_D(x, z)}{G_D(x_0, z)}$$

Reprezentacja Martina



Dla $x \in D$, $y \in \partial D$ **jądro Martina**:

$$M_D(x,y) = \lim_{z \to y} \frac{G_D(x,z)}{G_D(x_0,z)}$$

Reprezentacja Martina

Tw. (K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki; PTRF 2008)

- *$M_D(x, y)$ istnieje.*
- *$M_D(\cdot, y)$ jest α-harmoniczne* $\iff \displaystyle\int \frac{\mathbf{E}^z \tau_D}{|y - z|^{d+\alpha}}\, dz = \infty.$

$$M_D(x, y) = \lim_{z \to y} \frac{G_D(x, z)}{G_D(x_0, z)}$$

Reprezentacja Martina

Tw. (K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki; PTRF 2008)

- $M_D(x, y)$ *istnieje.*
- $M_D(\cdot, y)$ *jest* α*-harmoniczne* $\iff \displaystyle\int \frac{\mathbf{E}^z \tau_D}{|y - z|^{d+\alpha}}\, dz = \infty.$

$$M_D(x, y) = \lim_{z \to y} \frac{G_D(x, z)}{G_D(x_0, z)}$$

Brzeg Martina:

$$\partial_M D = \left\{ y \in \partial D \ : \ \int \frac{\mathbf{E}^z \tau_D}{|y - z|^{d+\alpha}}\, dz = \infty \right\}$$

Reprezentacja Martina

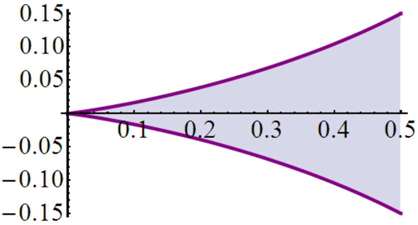
$$\partial_M D = \left\{ y \in \partial D \ : \ \int \frac{\mathbf{E}^z \tau_D}{|y - z|^{d+\alpha}}\, dz = \infty \right\}$$

Tw. (K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki; PTRF 2008)

Dla $p : (0,1) \to [0,\infty)$ *rosnącej oraz*
$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 < x < 1,\ -p(x) < y < p(x)\}$*:*

$$0 \in \partial_M D_f \iff \int_0^1 \frac{(p(x))^{\alpha+1}}{x^{\alpha+2}}\, dx = \infty\,.$$

Dla $p(x) = x|\log x|^{-q}$:
$0 \in \partial_M D \iff q \le \dfrac{1}{\alpha+1}$



Reprezentacja Martina

Tw. (K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki; PTRF 2008)

Jeśli $f \geq 0$ — singularnie α-harmoniczna w D, to

$$f(x) = \int_{\partial_M D} M_D(x,y)\mu(dy) \qquad\qquad x \in D$$

dla pewnej miary μ na $\partial_M D$.

- Brak założeń o regularności ∂D
- Rozważane także zbiory nieograniczone
- Reprezentacja jest jednoznaczna

Półgrupa procesu zabitego (klasyka)

Równanie ciepła w D:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= \Delta_x u(t,x) && x \in D \\ u(t,x) &= 0 && x \in \partial D \\ u(0,x) &= f(x) && x \in D \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} u(t,x) &= P_t^D f(x) \\ &= \int_D p_t^D(x,y)\, f(y)\, dy \\ &= \mathbf{E}^x(f(\beta_t)\ ;\ \tau_D > t) \end{aligned}$$

$p_t^D(x,y)$ — jądro ciepła — gęstość przejścia zabitego ruchu Browna

Półgrupa procesu zabitego

Definicja

$$P_t^D f(x) = \mathbf{E}^x(f(X_t) \; ; \; \tau_D > t).$$

- $P_t^D f(x) = \int_D p_t^D(x,y)\, f(y)\, dy$

Półgrupa procesu zabitego

Definicja

$$P_t^D f(x) = \mathbf{E}^x(f(X_t) \; ; \; \tau_D > t).$$

- $P_t^D f(x) = \displaystyle\int_D p_t^D(x,y)\, f(y)\, dy$
- Jeśli $|D| < \infty$, to P_t^D są zwarte
- Jeśli P_t^D są zwarte, to istnieje baza ortonormalna $\varphi_n \in L^2(D)$,

$$\varphi_n = e^{-\lambda_n t} P_t^D \varphi_n \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \to \infty$$

φ_n, λ_n — funkcje i wartości własne półgrupy

Odstęp spektralny

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; PMS 2008)

Dla $D \subseteq \mathbf{R}^d$ — otwartego i ograniczonego

$$\lambda_2 - \lambda_1 \ge \frac{C_1}{\lambda_1^{d/\alpha} (\operatorname{diam} D)^{d+\alpha}} \ge \frac{C_2 \, r^d}{(\operatorname{diam} D)^{d+\alpha}} \, ,$$

gdzie r jest promieniem największej kuli zawartej w D.

- Brak założeń o regularności ∂D
- Dla $\alpha = 2$ analogiczne oszacowanie nie zachodzi

- $p_t^D(x, y) \sim e^{-\lambda_1 t} \varphi_1(x) \, \varphi_1(y)$, gdy $t \to \infty$
- $\sup\limits_{x,y \in D} \left| \dfrac{p_t^D(x, y)}{e^{-\lambda_1 t} \varphi_1(x) \, \varphi_1(y)} - 1 \right| \asymp e^{-(\lambda_2 - \lambda_1) t}$

Wartości własne na odcinku

Gdy $\alpha = 2$, to

$$\Delta\varphi_n(x) = -\lambda_n \varphi_n(x) \qquad x \in D$$

Dla $D = (-1, 1)$:

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi(1+x)}{2} \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$$

Wartości własne na odcinku

Gdy $\alpha = 2$, to

$$\Delta\varphi_n(x) = -\lambda_n\varphi_n(x) \qquad\qquad x \in D$$

Dla $D = (-1, 1)$:

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi(1+x)}{2} \qquad\qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$$

Gdy $\alpha \in (0, 2)$:

$$\Delta^{\alpha/2}\varphi_n(x) = -\lambda_n\varphi_n(x) \qquad\qquad x \in D$$

Historia dla $\alpha = 1$:

- Blumenthal, Getoor (1959): $N(\lambda) \sim \frac{2}{\pi}\lambda$
- Bañuelos, Kulczycki (2004, 2006): λ_1, λ_2, λ_3 — jednokrotne
- Chen, Song (2005): $\frac{n\pi}{4} \le \lambda_n \le \frac{n\pi}{2}$

Wartości własne na odcinku

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

Dla $\alpha = 1$ i $D = (-1, 1) \subseteq \mathbf{R}$ wartości własne P_t^D są co najwyżej **dwukrotne**.
Każdej wartości własnej odpowiada co najwyżej jedna symetryczna funkcja własna i co najwyżej jedna antysymetryczna funkcja własna.

- Związki z RRCz i macierzami Toeplitza
- Wynik pośredni:

$$\iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} \frac{f(x)\,g(y)}{|x|+|y|}\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} \frac{\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\eta)}{|\xi|+|\eta|}\,d\xi\,d\eta\,, \quad f, g \in L^2(\mathbf{R})$$

Półgrupa procesu zabitego — zwartość

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

Operatory P_t^D są zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{|x| \to \infty} \mathbf{E}^x \tau_D = 0 \,.$$

- Twierdzenie prawdziwe także dla $\alpha = 2$.

Półgrupa procesu zabitego — zwartość

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

Operatory P_t^D są zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathbf{E}^x \tau_D = 0\,.$$

- Twierdzenie prawdziwe także dla $\alpha = 2$.

Wniosek (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

Jeśli $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} \int_{D^c} \frac{1}{|y-x|^{d+\alpha}}\, dy = \infty$, *to* P_t^D *są zwarte.*

- Warunek geometryczny.
- Dla $\alpha = 2$ nie ma analogicznych twierdzeń.

Półgrupa procesu zabitego — pierwsza funkcja własna

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

Jeśli P_t^D są zwarte, to

$$\varphi_1(x) \asymp \frac{C\,\mathbf{E}^x \tau_D}{(1 + |x|)^{d+\alpha}}\,.$$

- Stała C dobrana jest do zbioru D
- Dla $\alpha = 2$ asymptotyka φ_1 jest bardziej złożona

Półgrupa procesu zabitego — pierwsza funkcja własna

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

Jeśli P_t^D są zwarte, to

$$\varphi_1(x) \asymp \frac{C\,\mathbf{E}^x \tau_D}{(1+|x|)^{d+\alpha}}\,.$$

- Stała C dobrana jest do zbioru D
- Dla $\alpha = 2$ asymptotyka φ_1 jest bardziej złożona

Metody:

- asymptotyka gęstości przejścia $p_t(x) \asymp \min(t|x|^{-d-\alpha}, t^{-d/\alpha})$
- oszacowania całek
- mocna własność Markowa
- brzegowa nierówność Harnacka

Półgrupa procesu zabitego — mocna ultrakontraktywność

Definicja

Półgrupa (P_t^D) *jest* **mocno ultrakontraktywna** *(IU), jeśli*

$$p_t^D(x,y) \le C(t)\,\varphi_1(x)\,\varphi_1(y)\,.$$

(P_t^D) jest IU, gdy:

- Chen, Song (1997) — D ograniczone, brzeg gładki
- Kulczycki (1998) — D ograniczone

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\log|x|} \int_{D^c} \frac{1}{|y-x|^{d+\alpha}}\,dy = \infty \implies (P_t^D)\ \textit{jest IU}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} (\mathrm{dist}(x,\partial D))^\alpha \log|x| = 0 \impliedby (P_t^D)\ \textit{jest IU}$$

Półgrupa procesu zabitego — mocna ultrakontraktywność

Definicja

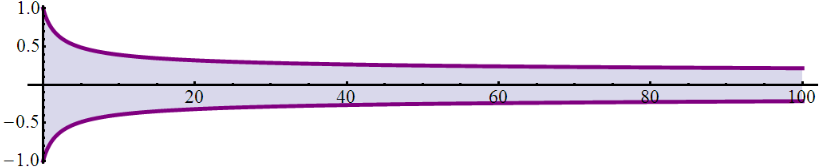
Półgrupa (P_t^D) *jest* **mocno ultrakontraktywna** *(IU), jeśli*

$$p_t^D(x, y) \le C(t)\, \varphi_1(x)\, \varphi_1(y)\,.$$

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

Dla $p : (0, \infty) \to [0, \infty)$ *— lipschitzowskiej,*
$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; x > 0,\, -p(x) < y < p(x)\}$*:*

$$(P_t^D) \text{ jest IU} \iff \lim_{x\to\infty} (p(x))^\alpha \log x = 0\,.$$



Półgrupa procesu zabitego — mocna ultrakontraktywność

Definicja

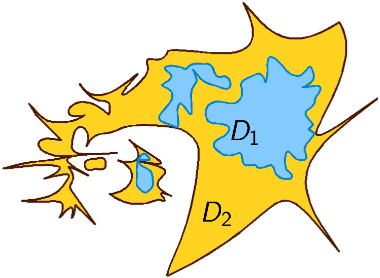
Półgrupa (P_t^D) jest **mocno ultrakontraktywna** *(IU), jeśli*

$$p_t^D(x, y) \le C(t)\,\varphi_1(x)\,\varphi_1(y)\,.$$

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

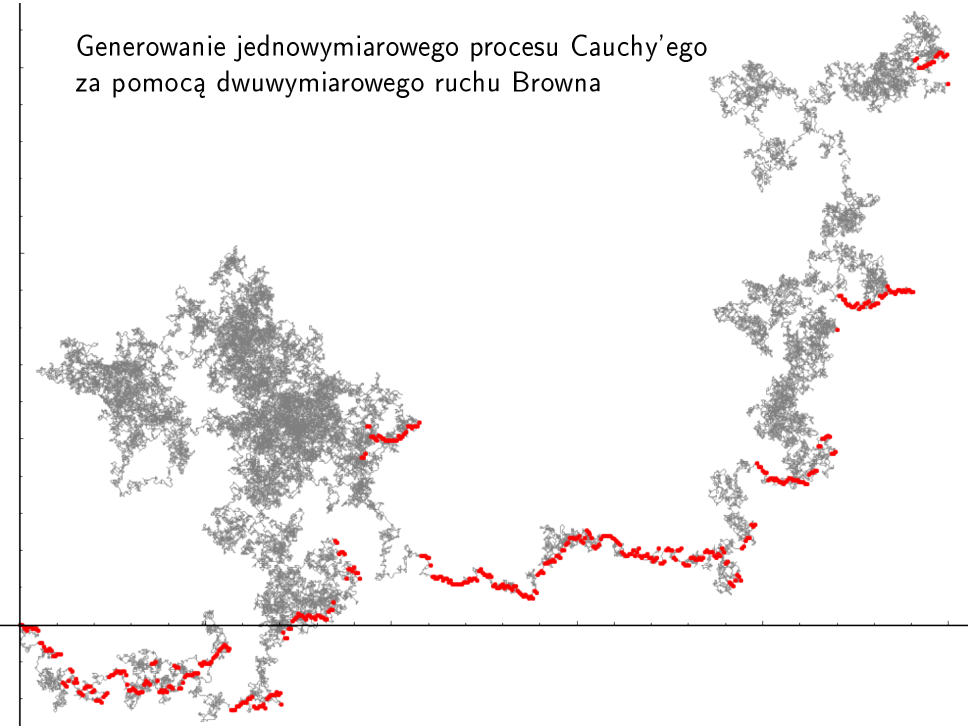
Jeśli $D_1 \subseteq D_2$ i $(P_t^{D_2})$ jest IU, to $(P_t^{D_1})$ też jest IU.

- Dla $\alpha = 2$ takie twierdzenie jest fałszywe.



Wszystkiego najlepszego, mamo!

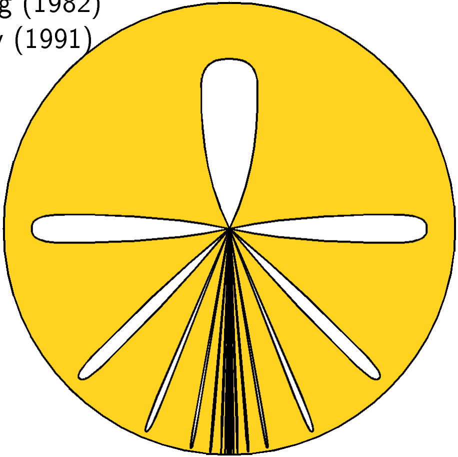
Generowanie jednowymiarowego procesu Cauchy'ego za pomocą dwuwymiarowego ruchu Browna



Brzegowa nierówność Harnacka (klasyka)

Dla $\alpha = 2$:

- $D \subseteq \mathbf{R}^2$, ∂D gładki — lata 50.
- $D \subseteq \mathbf{R}^d$, ∂D Lipschitza — Dahlberg (1977), Ancona, Wu (1978)
- $D \subseteq \mathbf{R}^d$ NTA — Jerison, Kenig (1982)
- $D \subseteq \mathbf{R}^d$ THD — Bass, Burdzy (1991)



Reprezentacja Martina (klasyka)

Dla $\alpha = 2$:

- ∂D gładki — jądro Martina = jądro Poissona
- $\partial_M D$ — zbiór f minimalnie harmonicznych, $f(x_0) = 1$
- $D \cup \partial_M D$ — uzwarcenie Martina D; $D \ni x \mapsto f_x = \dfrac{G_D(x, \cdot)}{G_D(x, x_0)}$
- dla $d = 2$: (Nadirashvili)
  $D \cup \partial_M D \ni x \mapsto \nabla f_x(x_0) \in K \subseteq \mathbf{C} \cup \{\infty\}$

Odstęp spektralny i IU (klasyka)

Odstęp spektralny ($\alpha = 2$):

- fizyka: gazy bozonowe, modele Isinga
- tempo zbieżności do stanów stacjonarnych w łańcuchach Markowa
- wykładnicza całkowalność funkcji Lipschitza
- badany dla grafów, na rozmaitościach.

IU ($\alpha = 2$):

- logarytmiczne nierówności Sobolewa
- procesy warunkowane
- istnieją ograniczone D dla których (P_t^D) nie jest IU
- istnieją $D_1 \subseteq D_2$ takie, że $(P_t^{D_2})$ jest IU, a $(P_t^{D_1})$ nie
- dla p malejącej, (P_t^D) jest IU $\iff |D| < \infty$

Ułamkowy laplasjan

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = \mathcal{A}_{d,-\alpha} \text{p.v.} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|^{d+\alpha}}\, dy$$

$$\left(-(-\Delta)^{\alpha/2} f\right)\hat{}\,(\xi) = -|\xi|^{\alpha} \hat{f}(\xi)$$

Motywacje:

- fizyka: oscylacje cieczy lub „galarety”, równanie elastyczności, dyslokacje w kryształach
- związek z potencjałami Riesza
- całki singularne

Funkcja Greena

$$G_D(x,y) = \int_0^\infty p_t^D(x,y)\,dt$$
$$G_D f(x) = \int_D G_D(x,y)\,f(y)\,dy$$
$$= \mathbf{E}^x \int_0^{\tau_D} f(X_t)dt$$

Wzór Dynkina:

$$\phi(x) = \mathbf{E}^x \phi(X(\tau_D)) - G_D \Delta^{\alpha/2}\phi(x)$$

Wzór Ikedy-Watanabe: $(x \in D,\ y \in \overline{D}^c,\ t > 0)$

$$\mathbf{P}^x(\tau_D \in dt, X(\tau_D) \in dy) = \mathcal{A}_{d,-\alpha}\left(\int_D \frac{p_t^D(x,z)}{|z-y|^{d+\alpha}}\,dz\right) dt\,dy$$
$$\mathbf{P}^x(X(\tau_D) \in dy) = \left(\int_D \frac{G_D(x,z)}{|z-y|^{d+\alpha}}\,dz\right) dy$$

Wartości własne na odcinku – elementy dowodu

Dla funkcji symetrycznych:

- Określamy $R(f) = \int_0^\infty (P_t f(0))^2 dt$, $f \in L^2(\mathbf{R})$
- Jeśli $R(f) = 0$, to $f = 0$
- $R(f) = 2 \int_0^\infty f(x) Hf(x) dx$
- $R(\varphi) = -\frac{1}{2}(H\varphi(1) + H\varphi(0)) \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$
- Jeśli $\int_{-1}^1 \varphi(x)\, dx = 0$, to $R(\varphi) = 0$
- $\int_{-1}^1 (a\, \varphi_n(x) + b\, \varphi_m(x))\, dx = 0$ dla pewnych a, b
- Wniosek: jeśli $\lambda_n = \lambda_m$, to $a\varphi_n + b\varphi_m = 0$

Dla antysymetrycznych: powyższe + transformata Hilberta

Pierwsza funkcja własna — elementy dowodu

- $D_x = D \cap B(x, |x|/2)$

Ograniczenie dolne:

- $\varphi_1(x) \geq \mathbf{E}^x \varphi_1(X(\tau_{D_x})) \geq C|x|^{-d-\alpha} \mathbf{E}^x \tau_{D_x}$
- $\mathbf{E}_x \tau_D = \mathbf{E}^x \tau_{D_x} + \mathbf{E}^x(\mathbf{E}^{X(\tau_{D_x})} \tau_D) \leq C \mathbf{E}^x \tau_{D_x}$

Ograniczenie górne:

- Jeśli $\varphi_1(x) \leq C(1 + |x|)^{-\gamma}$ $(\gamma \geq 0)$, to
  $\varphi_1(x) \leq \mathbf{E}^x \tau_D \left(\lambda_1 \sup_{D_x} \varphi_1 + C|x|^{-\min(d,\gamma)-\alpha} \right)$
- Samopoprawiające się oszacowanie: $\gamma \mapsto \min(d, \gamma) + \alpha$

Półgrupa procesu zabitego — mocna ultrakontraktywność

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

(P_t^D) *jest IU* $\iff p_t^D(x,y) \le \dfrac{C(t)}{(1+|x|)^{d+\alpha}(1+|y|)^{d+\alpha}}$

$\iff \mathbf{P}^x(\tau_{D\setminus\overline{B}(0,r)} > t) \le \dfrac{C(t)}{(1+r)^{d+\alpha}}.$

Wniosek (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

Jeśli (P_t^D) *jest IU, to* P_t^D *są operatorami Hilberta-Schmidta.*

Twierdzenie (M. Kwaśnicki; preprint 2008)

Jeśli $p(x) > 0$, $p \in C^2$ *na* (a,∞), $p, p'/p, p''$ *— ograniczone na* (a,∞), *to*

$$\mathbf{E}^x\tau_D \asymp C(p(x_1)\rho_D(x))^{\alpha/2}.$$

Macierze Toeplitza

- $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$
- $f(x_0) = m = \inf f(x)$ — jedyne minimum
- $f(x_0 + t) = m + |t| + o(|t|)$
- (a_n) – szereg Fouriera f, $\quad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} f(x)\, dx$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-k} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-k+1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

n-ta najmniejsza wartość własna A_k: (Parter, Widom)

$$m + \frac{\lambda_n}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) .$$

Transformata Hilberta

$$H : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R}) ,$$
$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\,\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,dy ,$$
$$\widehat{Hf}(\xi) = -i\,\text{sign}(\xi)\,\hat{f}(\xi) .$$

- H jest izometrią na $L^2(\mathbf{R})$
- $H^2 f = -f$
- Jeśli f – symetryczna, to Hf – antysymetryczna
- Jeśli f – antysymetryczna, to Hf – symetryczna
- $-(-\Delta)^{1/2} f = (Hf)'$
- $Hf = \lim_{t \searrow 0} q_t * f$ w $L^2(\mathbf{R})$, $q_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{t^2+x^2}$

Potencjał Newtona

- $$Uf(x) = \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{4\pi^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{f(x-y)}{|y|^{d-2}}\, dy$$
- $(Uf)\hat{}(\xi) = |\xi|^{-2}\hat{f}(\xi)$

- Jeśli $f \in C_c^2(\mathbf{R}^d)$, to $U\Delta f(x) = -f(x)$
- Jeśli $f \in C_c(\mathbf{R}^d)$, to $\Delta Uf(x) = -f(x)$
- Jeśli $f \in C_c(\mathbf{R}^d) \cap \Lambda_\varepsilon(\mathbf{R}^d)$, to $Uf(x) \in C^2(\mathbf{R}^d)$

- $$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} Uf(x) = R_{i,j}f(x)$$
  $$(R_{i,j}f)\hat{}(\xi) = -\frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$$
  $$R_{i,j}f(x) = \frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\pi^{d/2}} \text{p.v.}\int_{\mathbf{R}^d} \frac{y_i\, y_j\, f(x-y)}{|y|^{d+2}}\, dy \ (i \neq j)$$
  $$R_{i,i}f(x) = \frac{f(x)}{d} + \frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\pi^{d/2}} \text{p.v.}\int_{\mathbf{R}^d} \frac{(y_i^2 - \frac{1}{d}|y|^2)\, f(y-x)}{|y|^{d+2}}\, dy$$

Potencjał Newtona

- $Uf(x) = \dfrac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{4\pi^{d/2}} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} \dfrac{f(x-y)}{|y|^{d-2}}\,dy$
- $(Uf)\hat{}(\xi) = |\xi|^{-2}\hat{f}(\xi)$

W $\mathbf{R}^3$:

- $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} Uf(x) = \dfrac{3}{4\pi} \text{p.v.} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} \dfrac{y_1\, y_2\, f(x-y)}{|y|^5}\,dy$
- $f(x) = \dfrac{\operatorname{sign}(x_1 x_2)}{\log|x_1 x_2|}\,\phi(x)$
- $|y|^5 \dfrac{y_1\, y_2\, f(-y)}{|y|^5} = \dfrac{|y_1\, y_2|}{\log|y_1 y_2|}\,\phi(y)$