

Autoreferat rozprawy habilitacyjnej

Teoria spektralna jednowymiarowych procesów Lévy'ego na półprostej i odcinku

Mateusz Kwaśnicki

Rozprawę habilitacyjną tworzą trzy artykuły:

- [A] T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, J. Małecki, A. Stós, *Spectral properties of the Cauchy process on half-line and interval*. Proc. London Math. Soc. 101(2) (2010): 589–622
- [B] M. Kwaśnicki, *Spectral analysis of subordinate Brownian motions on the half-line*. Studia Math. 206(3) (2011): 211–271.
- [C] M. Kwaśnicki, *Eigenvalues of the fractional Laplace operator in the interval*. J. Funct. Anal. 262(5) (2012): 2379–2402.

SPIS TREŚCI

1. Wprowadzenie	2
1.1. Klasyczne równanie ciepła	2
1.2. Założenia i cel rozprawy	5
1.3. Procesy Lévy'ego i zupełne funkcje Bernsteina	7
1.4. Związek z równaniem ewolucji	9
1.5. Wcześniejsze wyniki i współczesne kierunki badań	10
2. Teoria spektralna dla półprostej	12
2.1. Związek z równaniami różniczkowymi	12
2.2. Metoda Wienera-Hopfa	14
2.3. Własności funkcji własnych	18
2.4. Rozwinięcie w układzie uogólnionych funkcji własnych	19
2.5. Przykłady	21
3. Teoria spektralna dla odcinka	22
3.1. Wzór asymptotyczny na wartości własne	22
3.2. Aproksymacja funkcji własnych	23
3.3. Oszacowania funkcji własnych	25
3.4. Metody numeryczne	25
4. Zastosowania i rozszerzenia	27
4.1. Rozkład funkcjonału supremum	27
4.2. Prawdopodobieństwo przejścia na półprostej	30
4.3. Równania różniczkowe cząstkowe	30
4.4. Proces relatywistyczny na odcinku	31
4.5. Wielowymiarowy proces α -stabilny	31
4.6. Teoria spektralna dla dopełnienia punktu	32
Literatura	32

1. WPROWADZENIE

1.1. **Klasyczne równanie ciepła.** Jednym z klasycznych zagadnień w teorii równań różniczkowych cząstkowych jest równanie ciepła z warunkiem brzegowym Dirichleta. Przedstawiona rozprawa habilitacyjna dotyczy uogólnień tego równania, otrzymanych przez zastąpienie operatora Laplace'a Δ odpowiednim operatorem nielokalnym. Szczególnie ważnym przykładem będzie ułamkowy operator Laplace'a $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ dla $\alpha \in (0, 2)$.

W przypadku jednowymiarowym równanie ciepła ma postać

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) & (t > 0, x \in D), \\ u(t, x) = 0 & (t > 0, x \in \partial D), \\ u(0, x) = f(x) & (x \in D), \end{cases}$$

gdzie D jest spójnym, otwartym podzbiorem \mathbf{R} , zaś f jest odpowiednio regularnym stanem początkowym. Rozwiązanie równania ciepła jest postaci

$$u(t, x) = P_t^D f(x) = \int_D p_t^D(x, y) f(y) dy,$$

gdzie $p_t^D(x, y)$ jest jądrem ciepła, tj. rozwiązaniem fundamentalnym zagadnienia (1.1). Rozwiązywanie zagadnienia (1.1) sprowadza się zatem do badania operatorów ciepła P_t^D (zdefiniowanych powyższym równaniem, o ile całka jest bezwzględnie zbieżna) oraz jądra ciepła $p_t^D(x, y)$.

Ustalmy następujące oznaczenia. Niech $C_0(D)$ będzie przestrzenią Banacha funkcji ciągłych na D i zbieżnych do 0 w każdym punkcie brzegu zbioru D oraz w ∞ i $-\infty$ (gdy D jest nieograniczony). Metryka w $C_0(D)$ jest dana przez normę supremum $\|f\|_{C_0(D)} = \sup_{x \in D} |f(x)|$. Przez $C_c(D)$ oznaczamy zbiór funkcji ciągłych na D , których nośnik jest zwartym podzbiorem D , a przez $C_c^\infty(D)$ — podzbiór $C_c(D)$ złożony z funkcji gładkich. Podobnie $C_b(D)$ oznacza zbiór ciągłych i ograniczonych funkcji na D , zaś $C_b^\infty(D)$ jest zbiorem ograniczonych funkcji gładkich na D , których pochodne wszystkich stopni są ograniczone.

Przez $L^p(D)$ ($p \in [1, \infty)$) oznaczana jest przestrzeń Lebesgue'a, z normą $\|f\|_{L^p(D)} = (\int_D |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Przestrzeń istotnie ograniczonych funkcji mierzalnych na D oznaczamy przez $L^\infty(D)$. Norma $\|f\|_{L^\infty(D)}$ tej przestrzeni dana jest przez istotne supremum $|f(x)|$ na D .

Funkcje f określone na $D \subseteq \mathbf{R}$ utożsamiamy z ich rozszerzeniami na \mathbf{R} , danymi przez warunek $f(x) = 0$ dla $x \notin D$. Operatory P_t^D działają na każdej z przestrzeni $C_0(D)$ i $L^p(D)$ ($p \in [1, \infty]$).

Dla jednowymiarowego równania ciepła jądro ciepła $p_t^D(x, y)$ jest dane jawnym wzorem. Dla $D = \mathbf{R}$ jest to jądro Gaussa–Weierstrassa,

$$p_t^{\mathbf{R}}(x, y) = p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \quad (t > 0, x, y \in \mathbf{R}).$$

W przypadku półprostej $D = (a, \infty)$ zachodzi

$$\begin{aligned} p_t^{(a, \infty)}(x, y) &= p_t(x, y) - p_t(x, 2a - y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y-2a)^2}{4t}\right) \right) \end{aligned}$$

dla $t > 0$, $x, y \in D$. Ten sam wzór jest poprawny również dla $D = (-\infty, a)$. Gdy D jest odcinkiem, $D = (a, a + b)$, mamy

$$\begin{aligned} p_t^{(a, a+b)}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_t(x, y + 2nb) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_t(x, 2a - y + 2nb) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x - y - 2nb)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x + y - 2nb - 2a)^2}{4t}\right) \right) \end{aligned}$$

dla $t > 0$, $x, y \in D$. Dla wielowymiarowego równania ciepła analogiczne wzory są znane tylko dla bardzo szczególnych zbiorów D .

Zagadnienie (1.1) jest niezmiennicze na przesunięcia i odbicie symetryczne, wystarczy zatem rozważać półprostą $D = (0, \infty)$ oraz odcinki postaci $D = (0, a)$. Ponadto (1.1) ma własność skalowania, dzięki której wystarczy rozważać tylko jeden odcinek, zwykle $D = (0, 1)$ lub $D = (-1, 1)$.

Jeden z możliwych opisów rozwiązań $u(t, x)$, użyteczny zarówno w teoretycznych, jak i praktycznych zastosowaniach, jest dany przez teorię spektralną operatorów P_t^D . W przedstawionych wyżej trzech przypadkach (prosta, półprosta, odcinek) przyjmuje ona jawną i wyjątkowo prostą postać, opisaną poniżej. Głównym rezultatem rozprawy habilitacyjnej jest uogólnienie tych klasycznych wyników, warto więc dokładnie je omówić.

PRZYKŁAD 1.1. Dla $D = \mathbf{R}$ operatory $P_t = P_t^{\mathbf{R}}$ są diagonalizowane przez transformatę Fouriera, zdefiniowaną wzorem

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx \quad (f \in L^1(\mathbf{R}), \xi \in \mathbf{R}).$$

W istocie, na mocy tw. Plancherela, $(2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$ rozszerza się do operatora unitarnego na $L^2(\mathbf{R})$ i ponadto

$$(1.2) \quad \mathcal{F}P_t f(\xi) = e^{-t\xi^2} \mathcal{F}f(\xi) \quad (f \in L^1(\mathbf{R}) \cup L^2(\mathbf{R}), t > 0, \xi \in \mathbf{R}).$$

W przypadku $f \in L^2(\mathbf{R})$ powyższą równość, jak i wiele innych poniżej, należy rozumieć jako równość funkcji w $L^2(\mathbf{R})$, tj. dla prawie wszystkich $\xi \in \mathbf{R}$. Wzór (1.2) w jawny sposób zadaje reprezentację spektralną operatorów ciepła. Jeśli $f \in L^1(\mathbf{R})$, to zastosowanie odwrotnej transformaty Fouriera do obu stron (1.2) prowadzi do rozwinięcia w układzie uogólnionych funkcji własnych,

$$P_t f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\xi^2} e^{-i\xi x} e^{i\xi y} f(y) dy d\xi \quad (f \in L^1(\mathbf{R}), t > 0, x \in \mathbf{R}),$$

co na mocy tw. Fubinięgo pociąga reprezentację spektralną jądra ciepła,

$$p_t(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\xi^2} e^{-i\xi x} e^{i\xi y} d\xi \quad (t > 0, x, y \in \mathbf{R}).$$

Powyższą całkę można oczywiście obliczyć, uzyskując jawny wzór na jądro Gaussa-Weierstrassa.

PRZYKŁAD 1.2. Podobny rachunek można przeprowadzić w przypadku półprostej $D = (0, \infty)$, jeśli zastąpi się transformatę Fouriera transformatą sinusową, daną wzorem

$$\mathcal{F}_{\sin} f(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(\xi x) dx \quad (f \in L^1(D), \xi > 0).$$

Wtedy $\sqrt{2/\pi} \mathcal{F}_{\sin}$ rozszerza się do operatora unitarnego na $L^2(D)$ oraz

$$\mathcal{F}_{\sin} P_t^{(0,\infty)} f(\xi) = e^{-t\xi^2} \mathcal{F}_{\sin} f(\xi) \quad (f \in L^1(D) \cup L^2(D), t > 0, \xi > 0).$$

Stosując odwrotną transformatę sinusową do obu stron powyższej równości, otrzymujemy

$$(1.3) \quad P_t^{(0,\infty)} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t\xi^2} \sin(\xi x) \sin(\xi y) f(y) dy d\xi$$

dla $f \in L^1(D)$, $t > 0$, $x \in D$, co na mocy tw. Fubniego prowadzi do reprezentacji

$$p_t^{(0,\infty)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-t\xi^2} \sin(\xi x) \sin(\xi y) d\xi \quad (t > 0, x, y \in D).$$

PRZYKŁAD 1.3. W przypadku odcinka $D = (0, a)$ do reprezentacji spektralnej wykorzystuje się szeregi Fouriera i wiele całek należy zastąpić odpowiednimi sumami. Współczynniki w rozwinięciu funkcji $f \in L^1(D)$ oznaczamy przez

$$\hat{f}(n) = \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Wtedy

$$(P_t^{(0,a)} f)^\wedge(n) = \exp\left(-t\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) \hat{f}(n) \quad (f \in L^1(D), t > 0, n = 1, 2, \dots).$$

Otrzymujemy zatem

$$P_t^{(0,a)} f(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \exp\left(-t\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) f(y) dy d\xi$$

dla $f \in L^1(D)$, $t > 0$, $x \in D$, skąd łatwo

$$p_t^{(0,a)}(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-t\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad (t > 0, x, y \in D).$$

W każdym z powyższych przykładów wykorzystana jest transformata całkowa, której jądrem są funkcje własne operatorów ciepła: $e^{i\xi x}$ w przypadku $D = \mathbf{R}$ (można je zastąpić funkcjami $\sin(\xi x)$ i $\cos(\xi x)$ o wartościach rzeczywistych), $\sin(\xi x)$ dla $D = (0, \infty)$ oraz $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ dla $D = (0, a)$. Łatwo sprawdzić, że funkcje te są jednocześnie funkcjami własnymi jednowymiarowego operatora Laplace'a (tj. operatora drugiej pochodnej), spełniającymi warunek brzegowy Dirichleta. Nie jest to oczywiście przypadek: operatory ciepła tworzą półgrupę operatorów, tj. $P_t^D P_s^D = P_{t+s}^D$ dla $t, s > 0$, a generatorem tej półgrupy jest właśnie operator Laplace'a-Dirichleta Δ_D . Formalnie operator ten zdefiniowany jest wzorem

$$(1.4) \quad \Delta_D f = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_t^D f - f}{t}$$

dla wszystkich f , dla których granica istnieje w normie odpowiedniej przestrzeni ($C_0(D)$ lub $L^p(D)$). Zbiór takich funkcji f nazywamy dziedziną Δ_D na odpowiedniej przestrzeni i oznaczamy $\mathcal{D}(\Delta_D; C_0)$ lub $\mathcal{D}(\Delta_D; L^p)$, w zależności od tego, o jakiej przestrzeni mowa.

Należy podkreślić, że półgrupa operatorów P_t^D jest mocno ciągła na $C_0(D)$ oraz na $L^p(D)$ dla $p \in [1, \infty)$, lecz nie na $L^\infty(D)$. Mimo to definicja $\mathcal{D}(\Delta_D; L^\infty)$ oraz wzór (1.4) mają sens, a operatory P_t^D tworzą mocno ciągłą półgrupę na domknięciu $\mathcal{D}(\Delta_D; L^\infty)$ w normie przestrzeni $L^\infty(D)$.

Powyżej zdefiniowana została w istocie rodzina operatorów Δ_D na różnych przestrzeniach Banacha. Oznaczanie ich wszystkich tym samym symbolem Δ_D jest uzasadnione,

ponieważ jeśli granica w (1.4) istnieje w normach więcej niż jednej z rozważanych przestrzeni, wartość $\Delta_D f$ nie zależy od wyboru normy (należy jednak pamiętać, że w przypadku $C_0(D)$ funkcja $\Delta_D f$ jest określona wszędzie, zaś dla $L^p(D)$ tylko prawie wszędzie).

1.2. Założenia i cel rozprawy. Wprowadzone w poprzednim rozdziale operatory ciepła P_t^D mają następującą interpretację probabilistyczną: jeśli X_t jest jednowymiarowym ruchem Browna (tj. procesem Wienera) o wariancji $\text{Var } X_t = 2t$, to dla dowolnej funkcji $f \in C_0(D)$ lub $f \in L^p(D)$ ($p \in [1, \infty]$) zachodzi

$$(1.5) \quad P_t^D f(x) = \mathbf{E}_x(f(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \tau_D\}}) \quad (t > 0, x \in D),$$

gdzie $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D\}$ jest czasem wyjścia procesu X_t ze zbioru D (przez \mathbf{P}_x i \mathbf{E}_x oznaczamy prawdopodobieństwo i wartość oczekiwaną związaną z procesem X_t startującym z punktu $x \in \mathbf{R}$). Innymi słowy, P_t^D jest operatorem przejścia, zaś p_t^D gęstością prawdopodobieństwa przejścia ruchu Browna zabitego w chwili wyjścia ze zbioru D .

W analogiczny sposób wzorem (1.5) określa się operatory przejścia P_t^D dowolnego procesu Markowa X_t zabitego w chwili wyjścia z D (proces ten bywa również nazywany podprocesem procesu X_t w D lub częścią procesu X_t w D). Operatory P_t^D tworzą półgrupę operatorów na $C_0(D)$ oraz na $L^p(D)$ ($p \in [1, \infty]$), która w przypadkach badanych poniżej jest mocno ciągła na każdej z tych przestrzeni, z wyjątkiem $L^\infty(D)$. Podobnie jak we wzorze (1.4), generator tej półgrupy jest dany wzorem

$$\mathcal{A}_D f = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_t^D f - f}{t}$$

dla funkcji f z dziedziny \mathcal{A}_D , oznaczanej odpowiednio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_D; C_0)$ lub $\mathcal{D}(\mathcal{A}_D; L^p)$ (wyższej definicji dotyczą uwagi, którymi opatrzone wzór (1.4)). Gdy $D = \mathbf{R}$, symbol D w P_t^D i \mathcal{A}_D jest zwyczajowo pomijany, tj. piszemy $P_t = P_t^{\mathbf{R}}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbf{R}}$. Operatory P_t^D są związane z równaniem ewolucji podobnym do (1.1); to zagadnienie omówione jest dokładniej w rozdz. 1.4.

Przypomnijmy następujące standardowe definicje (zob. [8, 55]).

- DEFINICJA 1.4. (a) Proces stochastyczny X_t o wartościach w \mathbf{R} jest (jednowymiarowym) *procesem Lévy'ego*, jeśli ma przyrosty niezależne i jednorodne w czasie, a prawie wszystkie trajektorie X_t są funkcjami càdlàg (tj. prawostronnie ciągłymi, z lewostronnymi granicami w każdym punkcie).
- (b) *Wykładnikiem Lévy'ego-Chinczyna* procesu Lévy'ego X_t nazywamy funkcję Ψ o własności $\mathbf{E}_x \exp(i\xi X_t) = e^{i\xi x} e^{-t\Psi(\xi)}$ dla $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $\xi \in \mathbf{R}$.
- (c) *Miarę Lévy'ego* procesu Lévy'ego X_t nazywamy miarę Radona $\nu(dz)$ na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ o własności

$$(1.6) \quad \Psi(\xi) = a\xi^2 - ib\xi + \int_{\mathbf{R} \setminus \{0\}} (1 - e^{i\xi z} + i\xi z \mathbf{1}_{(-1,1)}(z)) \nu(dz) \quad (\xi \in \mathbf{R})$$

dla pewnych $a \geq 0$ (*współczynnik dyfuzji*) oraz $b \in \mathbf{R}$ (*współczynnik dryfu*).

- (d) Proces Lévy'ego X_t jest *subordinatorem*, jeśli prawie wszystkie trajektorie X_t są funkcjami niemalejącymi.
- (e) Proces Lévy'ego X_t nazywany jest *podporządkowanym ruchem Browna*, jeśli ma on te same rozkłady skończenie wymiarowe co proces postaci B_{Z_t} , gdzie B_s jest jednowymiarowym ruchem Browna (tj. procesem Wienera), zaś Z_t jest subordinatorem niezależnym od procesu B_s .

ZAŁOŻENIE 1.5. W dalszej części autoreferatu zakładamy następujące warunki:

- (a) proces X_t jest symetryczny, tzn. operatory P_t są samosprzężone na $L^2(\mathbf{R})$;

- (b) proces X_t jest jednorodny w czasie i przestrzeni, tj. jest procesem Lévy'ego;
- (c) miara Lévy'ego procesu X_t ma gęstość $\nu(z)$, która jest funkcją całkowicie monotoniczną na $(0, \infty)$, tj. $(-1)^n \nu^{(n)}(z) \geq 0$ dla $z > 0$, $n = 0, 1, \dots$

Celem przedstawionej rozprawy habilitacyjnej jest zbadanie, przy powyższych założeniach, teorii spektralnej operatora \mathcal{A}_D i generowanej przez niego półgrupy P_t^D w przypadku, gdy D jest półprostą lub odcinkiem. Główne wyniki to:

- (A) jawny wzór na funkcje własne i rozwinięcie w układzie uogólnionych funkcji własnych dla $D = (0, \infty)$, analogicznie do przykł. 1.2;
- (B) zastosowanie (A) do uzyskania dwuczłonowego wzoru asymptotycznego Weyla na wartości własne operatora \mathcal{A}_D dla symetrycznych procesów α -stabilnych X_t , w przypadku gdy D jest odcinkiem;
- (C) wykorzystanie (A) do opisu rozkładu funkcjonału supremum i czasów pierwszego przejścia przez barierę procesu X_t .

Badaniom funkcji i wartości własnych operatorów \mathcal{A}_D i P_t^D , gdy D jest odcinkiem, a X_t jest procesem Cauchy'ego (tj. symetrycznym procesem 1-stabilnym), poświęconych jest seria artykułów Kulczyckiego i współpracowników (por. [1, 2, 3, 13, 46]). Trudności napotymane w tych badaniach stanowiły pierwotną motywacją do badań, które doprowadziły do powyższych wyników. W [A] udało się poprawić wiele wcześniejszych wyników, a kluczową rolę w badaniu teorii dla odcinka odegrała teoria spektralna X_t na półprostej. Kolejnym krokiem było uogólnienie tych wyników dla wszystkich symetrycznych procesów α -stabilnych: przypadek półprostej badany jest w [B], a odcinka — w [C]. Teorię dla półprostej w [B] udało się rozwinąć w dużo ogólniejszym kontekście. Artykuł [C] dotyczy procesów α -stabilnych, ale zastosowana w nim technika wydaje się dużo ogólniejsza: niedawna praca [36] zawiera analogiczne wyniki dla procesu relatywistycznego, ściśle związanego z pewnym modelem mechaniki kwantowej.

Rozwinięcia w układzie uogólnionych funkcji własnych operatorów $\mathcal{A}_{(0,\infty)}$ nie były wcześniej badane. Mają one zastosowania nie tylko do wzorów asymptotycznych na wartości własne \mathcal{A}_D , gdy D jest odcinkiem. Ważnym wnioskiem z teorii spektralnej operatora $\mathcal{A}_{(0,\infty)}$ jest jawny wzór całkowity na rozkład funkcjonału supremum procesu X_t i czasów przejścia X_t przez barierę. To zastosowanie stanowiło punkt wyjścia dla badań nad teorią fluktuacji ogólniejszych procesów Lévy'ego w pracy [48]. W artykule [25] wzory dla półprostej wykorzystane są z kolei do badania półgrup wielowymiarowych procesów zabitych przy wyjściu z obszaru. Również teoria spektralna operatorów \mathcal{A}_D i P_t^D dla $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, rozwinięta później w artykule [47], ma swoje źródło w wynikach składających się na opisywaną tu rozprawę habilitacyjną. Innym ciekawym kierunkiem badań jest analiza harmoniczna (np. własności L^p) uzyskanych rozwinięć w układzie uogólnionych funkcji własnych.

Struktura pozostałej części autoreferatu jest następująca. W rozdz. 1.3 omówiona jest rola założeń 1.5(a)–(c) oraz ich konsekwencje i równoważne sformułowania. W kolejnej części przedstawiony jest związek operatorów P_t^D z równaniem ewolucji podobnym do równania ciepła (1.1). Tło historyczne i opis współcześnie prowadzonych badań teorii spektralnej operatorów P_t^D i \mathcal{A}_D znajdują się w rozdz. 1.5.

Praca [A] zawiera rezultaty (A)–(C) w przypadku, gdy X_t jest symetrycznym procesem 1-stabilnym, tzw. procesem Cauchy'ego. W artykule [B] udowodnione są punkty (A) i (C) przy założeniach 1.5(a)–(c). Praca [C] dotyczy zagadnienia (B) dla wszystkich symetrycznych procesów α -stabilnych. Wyniki tych prac są opisane w rozdz. 2–4. Ponieważ rozprawa (z wyjątkiem niektórych wstępnych wyników) dotyczy symetrycznych procesów

Lévy'ego, odtąd przez proces α -stabilny zawsze rozumiany jest symetryczny α -stabilny proces Lévy'ego.

1.3. Procesy Lévy'ego i zupełne funkcje Bernsteina. W ogólności założenie 1.5(a) dotyczy symetrii procesu X_t w czasie (z miarą Lebesgue'a na \mathbf{R} jako miarą odniesienia), zob. [17]. W przypadku procesów Lévy'ego (założenie 1.5(b)) symetria w czasie jest równoważna symetrii w przestrzeni, zatem warunek 1.5(a) można interpretować jako równość rozkładów procesów $X_t - X_0$ oraz $-(X_t - X_0)$.

Wobec powyższego X_t nie ma dryfu ($b = 0$ we wzorze Lévy'ego-Chinczyna (1.6)), a jego miara Lévy'ego $\nu(dz)$ jest symetryczna. Założenie 1.5(c) mówi, że $\nu(dz)$ ma gęstość, oznaczaną $\nu(z)$, która jest funkcją całkowicie monotoniczną na $(0, \infty)$. Wobec symetrii zachodzi oczywiście $\nu(z) = \nu(-z)$. Wykładnik Lévy'ego-Chinczyna procesu X_t przyjmuje więc postać

$$(1.7) \quad \Psi(\xi) = a\xi^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(\xi z))\nu(z)dz \quad (\xi \in \mathbf{R}),$$

zaś generator \mathcal{A} półgrupy przejścia spełnia (zob. [56])

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}f(x) &= a\Delta f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x+z) + \mathbf{1}_{(-1,1)}(z)f'(x)z)\nu(z)dz \\ &= a\Delta f(x) + \int_0^{\infty} (2f(x) - f(x+z) - f(x-z))\nu(z)dz \end{aligned}$$

dla $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}$. Gdy $a = 1$ oraz $\nu(z) = 0$ dla wszystkich z , proces X_t jest ruchem Browna, $\mathcal{A} = \Delta$ jest operatorem Laplace'a, zaś $\mathcal{A}_D = \Delta_D$ jest operatorem Laplace'a-Dirichleta. Ten przypadek, określany niżej mianem klasycznego, jest dobrze zbadany i został omówiony w przykł. 1.1–1.3.

Dzięki założeniu 1.5(a) operatory przejścia P_t^D są samosprężone na $L^2(D)$, co umożliwia korzystanie z ogólnych metod teorii spektralnej operatorów samosprężonych. Warto zauważyć, że dla niesymetrycznych procesów X_t operatory P_t^D często nie są nawet operatorami normalnymi (tj. nie są przemienne ze swoim sprzężeniem), co czyni ich badanie istotnie trudniejszym. Dowody głównych wyników rozprawy wykorzystują metody transformaty Fouriera, w szczególności tzw. metodę Wienera-Hopfa (opisaną w rozdz. 2). Ponieważ stosuje się ona tylko do operatorów splotowych, potrzebne jest założenie 1.5(b), dzięki któremu P_t oraz \mathcal{A} są operatorami splotu z odpowiednią miarą lub dystrybucją (zob. (1.8)). Warunek regularności 1.5(c) zapewnia istnienie rozszerzenia holomorficznego wykładnika Lévy'ego-Chinczyna, potrzebnego do zastosowania metody Wienera-Hopfa.

Warunki 1.5(a) oraz 1.5(c) dla procesów Lévy'ego (tj. przy założeniu 1.5(b)) mają dwie inne równoważne postacie. Aby je podać, potrzebna jest następująca definicja.

DEFINICJA 1.6. Funkcja $\psi(\xi)$ określona dla $\xi > 0$ nazywana jest *zupełną funkcją Bernsteina* (lub *funkcją operatorowo monotoniczną*), jeśli spełnia którykolwiek z następujących równoważnych warunków (zob. [57]):

(a) dla pewnych $c_1, c_2 \geq 0$ oraz pewnej miary Radona m na $(0, \infty)$ spełniającej warunek $\int_0^\infty \min(1/\zeta, 1/\zeta^2)m(d\zeta) < \infty$ zachodzi

$$(1.9) \quad \psi(\xi) = c_1 + c_2\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi + \zeta} \frac{m(d\zeta)}{\zeta} \quad (\xi > 0);$$

(b) dla pewnych $c_1, c_2 \geq 0$ oraz pewnej całkowitej monotonicznej funkcji $\mu(s)$ na $(0, \infty)$ spełniającej warunek $\int_0^\infty \min(1, s)\mu(s)ds < \infty$ zachodzi

$$\psi(\xi) = c_1 + c_2\xi + \int_0^\infty (1 - e^{-\xi s})\mu(s)ds \quad (\xi > 0);$$

- (c) $\psi(\xi) \geq 0$ dla $\xi > 0$ oraz ψ rozszerza się do funkcji holomorficznej na $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$ (oznaczanej tym samym symbolem) o własności $\text{Im}\psi(\xi) \geq 0$, gdy $\text{Im}\xi > 0$;
- (d) dla dowolnych samosprzężonych macierzy A, B tego samego rozmiaru z warunku $0 \leq A \leq B$ wynika $0 \leq \psi(A) \leq \psi(B)$.

LEMAT 1.7 ([B], *Corollary 2.16*). Dla dowolnego procesu Lévy'ego X_t następujące warunki są równoważne:

- (a) X_t jest symetryczny, a miara Lévy'ego ma gęstość $\nu(z)$ całkowicie monotoniczną na $(0, \infty)$ (tj. spełnione są założenia 1.5(a) i 1.5(c));
- (b) X_t jest podporządkowanym ruchem Browna, a miara Lévy'ego subordynatora Z_t odpowiadającego procesowi X_t (zob. def. 1.4(e)) ma całkowicie monotoniczną gęstość na $(0, \infty)$;
- (c) wykładnik Lévy'ego-Chinczyna procesu X_t jest postaci $\Psi(\xi) = \psi(\xi^2)$ dla pewnej zupełnej funkcji Bernsteina ψ .

Powyższy fakt nie jest w całości nowy. Równoważność warunków (b) i (c) jest klasycznym wynikiem i wynika z def. 1.6(b) (zob. [57]), zaś warunek zbliżony do (a) znajduje się w artykule [54]. Wydaje się jednak, że dowód równoważności wszystkich trzech warunków nie pojawił się wcześniej w literaturze.

UWAGA. Z lematu 1.7 wynika, że rozważany proces jest podporządkowanym ruchem Browna, odpowiadającym zupełnej funkcji Bernsteina $\psi(\xi)$. Oznacza to, że półgrupa operatorów przejścia P_t procesu X_t , której generatorem jest \mathcal{A} , jest podporządkowana w sensie Bochnera półgrupie operatorów przejścia ruchu Browna, generowanej przez operator Laplace'a Δ (zob. [56]). W tej sytuacji często stosuje się zapis $\mathcal{A} = -\psi(-\Delta)$; spotykana jest też notacja $\mathcal{A} = \psi(\Delta)$. Dla generatorów na $L^2(\mathbf{R})$ pierwsza z tych równości jest zgodna z rachunkiem operatorowym na przestrzeni Hilberta. W istocie, na mocy tw. Lévy'ego-Chinczyna, operatory \mathcal{A} i Δ są operatorami samosprzężonymi, mającymi reprezentację spektralną

$$\mathcal{F}\mathcal{A}f(\xi) = -\psi(\xi^2)\mathcal{F}f(\xi), \quad \mathcal{F}\Delta f(\xi) = -\xi^2\mathcal{F}f(\xi)$$

dla $t > 0$, $\xi \in \mathbf{R}$, $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$. Wobec tego w rozwinięciu w układzie uogólnionych funkcji własnych $e^{i\xi x}$ operatory $-\mathcal{A}$ i $-\Delta$ są operatorami mnożenia odpowiednio przez $\psi(\xi^2)$ oraz ξ^2 . Równość $\mathcal{A} = -\psi(-\Delta)$ może częściowo wyjaśniać rolę założenia 1.5(c), mówiącego, że ψ jest zupełną funkcją Bernsteina (por. def. 1.6(d)).

Należy podkreślić, że półgrupa operatorów przejścia P_t^D zabitego podporządkowanego ruchu Browna nie jest podporządkowana w sensie Bochnera półgrupie operatorów przejścia zabitego ruchu Browna; w przeciwnym razie jej teoria spektralna sprowadzałaby się do przypadku klasycznego. Innymi słowy, operacje podporządkowania i zabijania procesu nie są przemienne. Dokładniejszą dyskusję tego zagadnienia można znaleźć w artykule [60].

W dalszej części autoreferatu w większości wzorów występuje funkcja ψ , a czasem także jej rozszerzenie holomorficzne. Jeśli omawiane są konkretne przykłady, zawsze podany jest opis procesu X_t i wzór na ψ .

1.4. **Związek z równaniem ewolucji** ([B], rozdz. 2.3–2.4). Operatory P_t^D pozwalają rozwiązywać dla operatora \mathcal{A}_D zagadnienie podobne do (1.1). Wprost z definicji generatora półgrupy wynika, że funkcja $u(t, x) = P_t^D f(x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathcal{A}_D u(t, x) & (t > 0, x \in D), \\ u(0, x) = f(x) & (x \in D), \end{cases}$$

gdzie \mathcal{A}_D działa na współrzędnej x , a $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_D; C_0)$ lub $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_D; L^p)$ ($p \in [1, \infty]$) jest warunkiem początkowym. Nasuwa się pytanie, czy operator \mathcal{A}_D można w powyższym zagadnieniu zastąpić operatorem \mathcal{A} w zamian za dodanie warunku brzegowego, takiego jak $u(t, x) = 0$ dla $t > 0, x \in \partial D$, w (1.1).

Pierwszym problemem jest nielokalność operatora \mathcal{A} : o ile wartość $\Delta f(x)$ zależy tylko od zachowania f w dowolnie małym otoczeniu x , o tyle zgodnie ze wzorem (1.8) do określenia $\mathcal{A}f(x)$ potrzebna jest znajomość wartości $f(y)$ dla każdego $y \in \mathbf{R}$. Z tego powodu zamiast warunku brzegowego: $u(t, x) = 0$ dla $t > 0, x \in \partial D$, potrzebny jest warunek zewnętrzny: $u(t, x) = 0$ dla $t > 0, x \notin D$. W ten sposób dochodzimy do następującego równania ewolucji:

$$(1.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathcal{A}u(t, x) & (t > 0, x \in D), \\ u(t, x) = 0 & (t > 0, x \notin D), \\ u(0, x) = f(x) & (x \in D). \end{cases}$$

Okazuje się, że — przy odpowiednich założeniach — funkcja $u(t, x) = P_t^D f(x)$ w istocie jest rozwiązaniem zagadnienia (1.10), pod warunkiem że generator \mathcal{A} interpretowany jest punktowo, tak jak we wzorze (1.8). Natomiast w ogólności funkcja $u(t, x) = P_t^D f(x)$ (dla ustalonego $t > 0$) nie należy do $\mathcal{D}(\mathcal{A}; C_0)$ ani $\mathcal{D}(\mathcal{A}; L^p)$ ($p \in [1, \infty)$). Innymi słowy, funkcje z dziedziny \mathcal{A}_D przeważnie nie należą do dziedziny \mathcal{A} .

Co ciekawe, związek między dziedzinami operatorów \mathcal{A}_D i \mathcal{A} nie był wcześniej badany systematycznie. Częstkowe wyniki można znaleźć np. w artykułach [1, 11, 12] lub [A]. W poniższym twierdzeniu podsumowane są (w pewnym uproszczeniu) wyniki uzyskane we wstępnym rozdziale pracy [B].

TWIERDZENIE 1.8 ([B], rozdz. 2.4). (a) Niech X_t będzie złożonym procesem Poissona (tj. $a = 0$ oraz $\int_{-\infty}^{\infty} \nu(z) dz < \infty$ w (1.7)). Wówczas dla dowolnego otwartego $D \subseteq \mathbf{R}$ operator \mathcal{A}_D jest ograniczony na każdej z przestrzeni $C_0(D)$ i $L^p(D)$ ($p \in [1, \infty]$) i wartość $\mathcal{A}_D f(x)$ nie zależy od wyboru D (o ile $x \in D$). W szczególności $\mathcal{A}_D f(x) = \mathcal{A}f(x)$ (zob. [B], *Lemma 2.7*).

(b) Załóżmy, że X_t nie jest złożonym procesem Poissona, zaś $D \subseteq \mathbf{R}$ jest odcinkiem lub półprostą. Niech $f \in C_0(D)$. Wówczas jeśli prawa strona wzoru (1.8) poprawnie określa funkcję $g(x)$ dla $x \in D$ i ponadto $g \in C_0(D)$, to $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_D; C_0)$ oraz $\mathcal{A}_D f = g$ (zob. [B], *Lemma 2.10*).

(c) Niech $\varepsilon > 0$ i niech $D \subseteq \mathbf{R}$ będzie odcinkiem lub półprostą. Załóżmy, że $f \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ spełnia warunek $f(x) = 0$, jeśli $\text{dist}(x, \mathbf{R} \setminus D) < \varepsilon$. Załóżmy ponadto, że dla każdego $x \in \partial D$ prawa strona (1.8) jest równa 0. Wówczas $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_D; L^\infty)$ i $\mathcal{A}_D f(x)$ jest dane przez prawą stronę (1.8) dla każdego $x \in D$ (zob. [B], *Lemma 2.11*).

W pracy [B] powyższy wynik sformułowany jest dużo ogólniej, dla (także niesymetrycznych) wielowymiarowych procesów Lévy'ego X_t zabitych przy wyjściu ze zbioru otwartego

D , którego każdy punkt brzegowy jest regularny (zob. [8, 10, 55]). Twierdzenie to dostarcza dogodnej metody dowodzenia, że funkcja należy do dziedziny generatora półgrupy P_t^D na $C_0(D)$ lub $L^\infty(D)$. Dowód tw. 1.8 wykorzystuje klasyczne wyniki teorii procesów Markowa: wzór Dynkina i własności operatora charakterystycznego Dynkina.

1.5. Wcześniejsze wyniki i współczesne kierunki badań. Teoria spektralna w przypadku klasycznym (gdy X_t jest ruchem Browna) ma długą historię i brak tu miejsca, by ją szczegółowo opisywać (zob. np. [19]). Poniżej opisane są wyłącznie wyniki dla procesów skokowych (których generatory są operatorami nielokalnymi).

Niemal wszystkie dotychczasowe badania teorii spektralnej operatorów P_t^D i \mathcal{A}_D dotyczą przypadków, w których D jest ograniczony (lub przynajmniej ma skończoną miarę Lebesgue'a), zatem wyniki uzyskane dla półprostej tworzą nowy kierunek badań. Znałe wcześniej własności funkcji i wartości własnych operatorów \mathcal{A}_D i P_t^D dla odcinków D nie są tak dokładne, jak te uzyskane w artykułach [A] i [C]. Z drugiej strony należy podkreślić, że wiele wcześniejszych prac dotyczy również procesów wielowymiarowych.

Część znanych własności operatorów P_t^D została udowodniona w bardzo dużej ogólności. Załóżmy, że gęstość prawdopodobieństwa przejścia $p_t(x, y)$ (tj. jądro operatora P_t) symetrycznego procesu Lévy'ego X_t istnieje i jest ograniczoną funkcją zmiennych $x, y \in \mathbf{R}$ dla każdego $t > 0$. Wtedy istnieje również gęstość prawdopodobieństwa przejścia procesu zabitego $p_t^D(x, y)$ (jądro operatora P_t^D) i ponadto $p_t^D(x, y) \leq p_t(x, y)$. Wobec tego, jeśli D ma skończoną miarę Lebesgue'a, to P_t^D są samosprzężonymi operatorami Hilberta-Schmidta na $L^2(D)$. W szczególności istnieje ortonormalny układ funkcji własnych $\varphi_n \in L^2(D)$ ($n = 1, 2, \dots$). Ze względu na własność półgrupową funkcje własne nie zależą od $t > 0$, a wartości własne są funkcjami wykładniczymi t . Mamy zatem

$$P_t^D \varphi_n = e^{-\lambda_n t} \varphi_n \quad (t > 0, n = 1, 2, \dots),$$

i bez utraty ogólności możemy założyć, że $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$. Jeśli D jest spójny lub jeśli gęstość miary Lévy'ego $\nu(z)$ jest ściśle dodatnia, to wiadomo ponadto, że λ_1 ma krotność 1, tj. $\lambda_1 < \lambda_2$, i ponadto φ_1 ma stały znak na D . Bez utraty ogólności zakłada się, że φ_1 jest dodatnia na D . Powyższe wyniki są znane od dawna nawet w bardziej ogólnym kontekście procesów Markowa (zob. [28]).

Pierwsze szczegółowe wyniki dotyczące λ_n uzyskano w latach 50. XX wieku. Blumenthal i Gettoor [9] podali wzory asymptotyczne postaci $\lambda_n \sim cn^\alpha$ gdy $n \rightarrow \infty$ (przez ten zapis rozumiemy $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \lambda_n = c$). W szczególności dla procesu α -stabilnego ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$) równość (3.6) w ich pracy można przepisać w postaci

$$(1.11) \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{|D|} \right)^\alpha + o(n^\alpha) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tutaj przez $|D|$ oznaczamy miarę Lebesgue'a zbioru D i stosujemy standardową notację asymptotyczną. Analogiczny wzór dla ruchu Browna nosi nazwę prawa Weyla. Jednym z głównych rezultatów rozprawy (punkt (B)) jest uzyskanie — w przypadku gdy D jest odcinkiem — drugiego wyrazu w rozwinięciu asymptotycznym (1.11) i dokładnego oszacowania błędu.

Teoria spektralna operatorów P_t^D wzbudziła po raz kolejny zainteresowanie w ostatniej dekadzie, przede wszystkim dla (wielowymiarowych izotropowych) procesów stabilnych. Wzór asymptotyczny (1.11) bez trudu uogólnia się na przypadek wielowymiarowy. Jego uzupełnieniem są oszacowania, które uzyskali Chen i Song [15]. Dla izotropowych procesów α -stabilnych w \mathbf{R}^d ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$) zabitych przy wyjściu z wypukłego zbioru D

przyjmują one postać

$$(1.12) \quad \frac{1}{2} \mu_n^{\alpha/2} \leq \lambda_n \leq \mu_n^\alpha \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gdzie μ_n jest odpowiednią wartością własną dla d -wymiarowego ruchu Browna (którego każda współrzędna ma wariancję $2t$). W szczególności gdy D jest odcinkiem, wzór (1.12) przyjmuje postać

$$(1.13) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{|D|} \right)^\alpha \leq \lambda_n \leq \left(\frac{n\pi}{|D|} \right)^\alpha \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Również dla bardziej ogólnych zbiorów D znanych jest wiele oszacowań μ_n . Wzór (1.12) jest udowodniony dla dowolnej zupełnej funkcji Bernsteina ψ , a jeśli stałą $\frac{1}{2}$ zastąpić przez c , to zachodzi dla dowolnego D spełniającego warunek stożka zewnętrznego (zob. [15]). Analogiczne oszacowania badał wcześniej DeBlassie [20]. W pracach [A] oraz [C] oszacowanie (1.13) jest istotnie poprawione dla wszystkich n , gdy $\alpha \geq 1$, oraz dla n dostatecznie dużych, gdy $\alpha < 1$.

Bañuelos i Kulczycki ze współautorami badali pierwszych kilka wartości własnych (w szczególności λ_1 i $\lambda_2 - \lambda_1$, wielkości ważnych z punktu widzenia fizyki matematycznej) oraz geometryczne własności pierwszej funkcji własnej φ_1 (tzw. stanu podstawowego) dla procesu Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{|\xi|}$), a także dla procesów α -stabilnych ($\psi(\xi) = |\xi|^{\alpha/2}$; zob. [1, 2, 3, 5, 23]).

W pracach [4, 6] ci sami autorzy uzyskali dwuczłonowe rozwinięcie asymptotyczne śladu operatorów P_t^D , tj. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n}$, gdy $t \rightarrow 0^+$. Wzór (1.11) został uzyskany w podobny sposób, wykorzystując pierwszy człon rozwinięcia asymptotycznego i teorię tauberowską. Niestety ta metoda nie jest przystosowana do dwuczłonowych rozwinięć, więc wyniki prac [4, 6] nie mogą zostać bezpośrednio wykorzystane do wzmocnienia (1.11). Podobna uwaga dotyczy niedawnej pracy Franka i Geisingera [25], w której wynik uzyskany w [4, 6] jest wzmocniony: autorzy dowodzą analogicznego dwuczłonowego wzoru asymptotycznego dla sum częściowych wartości własnych $\sum_{n=1}^k \lambda_n$.

Chen i Song [16] oraz DeBlassie i Méndez-Hernández [21] udowodnili ciągłość λ_n jako funkcji parametru stabilności $\alpha \in (0, 2]$. Warto też wspomnieć o zbliżonym zagadnieniu mocnej ultrakontraaktywności (ang. *intrinsic ultracontractivity*) półgrupy P_t^D , badanej m.in. w artykułach [14, 42, 45]. Jeśli zamiast procesu zabitego w chwili wyjścia ze zbioru rozważać podproces zadany przez odpowiedni funkcyjonał multiplikatywny (tzw. funkcyjonał Feynmana-Kaca), otrzymuje się pokrewne zagadnienie dla operatorów Schrödingera związanych z ułamkowym operatorem Laplace'a. Operatory przejścia takich procesów były badane m.in. w artykułach [11, 43, 35, 34, 37].

W przypadku nieograniczonych zbiorów D operatory P_t^D nie muszą być zwarte i mogą nie mieć funkcji własnych w $L^2(D)$. Klasyczna teoria dla $D = \mathbf{R}$ i $D = (0, \infty)$ została przedstawiona w przykł. 1.1 i 1.2. W tym przypadku funkcje własne (odpowiednio: $e^{i\xi x}$ i $\sin(\xi x)$) nie należą do $L^2(D)$ i jest ich nieprzeliczalnie wiele. Twierdzenie spektralne zapisane przy użyciu takich funkcji nosi nazwę rozwinięcia w układzie uogólnionych funkcji własnych.

Z powodów przedstawionych powyżej teoria spektralna operatorów P_t^D dla nieograniczonych zbiorów D jest bardziej skomplikowana. Wyłączając przypadek klasyczny, badania w tej dziedzinie były prowadzone tylko w abstrakcyjnym ujęciu. Gettoor w artykule [28] rozważał w tym kontekście ogólne półgrupy procesów Markowa. Jego wyniki stwierdzają tylko istnienie rozwinięcia w układzie uogólnionych funkcji własnych w dość

skomplikowanej postaci (szereg całek podobnych do tej w (1.3), lecz z $\sin(\lambda x)$ zastąpionym przez uogólnioną funkcję własną, a miarą $d\lambda$ — odpowiednią miarą z twierdzenia spektralnego). Z powodu dużej ogólności wynik ten nie zawiera jakiegokolwiek charakteryzacji uogólnionych funkcji własnych. W podobnym kontekście badane były też procesy dyfuzji z potencjałem Feynmana-Kaca (zob. [51, 58]), lecz również w tym przypadku opis jest tylko częściowo zadowalający i z tego powodu ma ograniczone zastosowania.

2. TEORIA SPEKTRALNA DLA PÓŁPROSTEJ

2.1. Związek z równaniami różniczkowymi ([A], rozdz. 3). Generator \mathcal{A} procesu Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi}$) jest równocześnie operatorem Dirichleta-Neumanna (ang. *Dirichlet to Neumann operator*) dla operatora Laplace'a w półpłaszczyźnie: jeśli $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ jest wartością brzegową ograniczonej funkcji $u(x, y)$ harmoniczej w półpłaszczyźnie $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$, to

$$(2.1) \quad \mathcal{A}f(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Analogiczny związek zachodzi w przypadku wielowymiarowym (zob. [1, 62]). Podobną konstrukcję można przeprowadzić dla procesów α -stabilnych ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$; zob. [20, 50]), a nawet dla dowolnych procesów X_t związanych z zupełną funkcją Bernsteina ψ (zob. [57]), rozważając funkcje $u(x, y)$ harmoniczne względem odpowiednich operatorów eliptycznych drugiego rzędu. Krótki opis tej konstrukcji znajduje się w rozdz. 4.3.

Równość (2.1) pozwala zapisać wiele zagadnień związanych z nielokalnym operatorem \mathcal{A} w języku równań różniczkowych cząstkowych. Ta metoda została wykorzystana w artykule [A] do badania operatorów przejścia procesu Cauchy'ego zabitego przy wyjściu z półprostej lub odcinka. Poniżej omówione są wyniki dotyczące półprostiej.

Funkcje własne operatorów $P_t^{(0, \infty)}$ i $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$ są znajdowane przez rozwiązanie zagadnienia własnego dla dwuwymiarowego operatora Laplace'a:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 & (x \in \mathbf{R}, y > 0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = -\lambda u(x, 0) & (x > 0), \\ u(x, 0) = 0 & (x \leq 0). \end{cases}$$

Parametr spektralny λ obecny jest w warunku brzegowym; tego typu układy równań noszą nazwę mieszanych zagadnień Stieglowa.

Choć $F(x) = u(x, 0)$ nie należy do dziedziny generatora \mathcal{A} , na podstawie (2.1) można przypuszczać, że równaniu $\mathcal{A}F(x) = -\lambda F(x)$ dla $x \in (0, \infty)$ można nadać odpowiedni sens. Mówiąc nieco ściślej, dowodzi się, że prawa strona wzoru (1.8) jest dobrze określona dla F i $x \in (0, \infty)$, a jej wartość wynosi $-\lambda F(x)$. Na podstawie tw. 1.8 wnioskuje się, że F należy do $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{(0, \infty)}; L^\infty)$, a stąd już łatwo $P_t^D F(x) = e^{-\lambda t} F(x)$ dla $t > 0$, $x \in (0, \infty)$. Powyższe nieco heurystyczne rozumowanie jest formalnie opisane w dowodzie [A], *Theorem 2* (bez odwoływania się do ogólnego tw. 1.8, udowodnionego dopiero później w [B]).

Wyprowadzenie wzoru na rozwiązanie zagadnienia (2.2) w pracy [A] jest dość skomplikowane. Bardziej bezpośrednia i przede wszystkim dużo ogólniejsza metoda rozwiązywania zagadnienia własnego dla $P_t^{(0, \infty)}$ i $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$ została opracowana w artykule [B], opisanym w rozdz. 2.2, dlatego konstrukcja z [A] przedstawiona jest poniżej bardzo skrótowo. Warto odnotować, że oznaczenia w [A] są nieco inne niż stosowana poniżej notacja z pracy [B]: funkcje F_λ i G_λ w [A] są oznaczane symbolami ψ_λ i r_λ .

Zamiast funkcji harmonicznej $u(x, y)$ szuka się funkcji $h(z)$ holomorficznej w górnej półpłaszczyźnie, której częścią urojoną jest $u(x, y)$, tj. $\text{Im } h(x + iy) = u(x, y)$. Zgodnie z (2.2), funkcja taka ma spełniać warunki $\text{Im } h(x) = 0$ dla $x \leq 0$ oraz $\text{Im}(ih'(x) + \lambda h(x)) = 0$ dla $x > 0$. Te własności ma z pewnością funkcja postaci

$$h(z) = \begin{cases} e^{i\lambda z + i\vartheta} - \int_{-\infty}^0 \varrho(t) e^{t\lambda z - \text{arctg } t} dt & (\text{Im } z \geq 0, \text{Re } z \geq 0), \\ \int_0^{\infty} \varrho(t) e^{t\lambda z} dt & (\text{Im } z \geq 0, \text{Re } z \leq 0), \end{cases}$$

gdzie $\vartheta \in \mathbf{R}$ oraz $\varrho \in L^2(\mathbf{R})$. Zauważmy, że tak określona funkcja h jest holomorficzna w obszarze $\text{Im } z > 0, \text{Re } z \neq 0$. Jeśli obie części definicji h są zgodne na półprostej $\text{Im } z > 0, \text{Re } z = 0$, to funkcja h jest także ciągła w obszarze $\text{Im } z > 0$. Wtedy h jest automatycznie holomorficzna w obszarze $\text{Im } z > 0$ (analogicznej własności nie mają funkcje harmoniczne; z tego powodu szukana jest funkcja h , a nie bezpośrednio funkcja $u = \text{Im } h$). Pozostaje zatem tak dobrać ϑ i ϱ , aby oba wzory definiowały tę samą wartość $h(z)$, gdy $\text{Im } z > 0, \text{Re } z = 0$.

Twierdzenie Paleya-Wienera pozwala — po krótkich rachunkach — wyrazić powyższy warunek w następującej postaci: funkcja

$$e^{i \text{arctg}(\max(0, -t))} \varrho(t) - \frac{e^{i\vartheta}}{2\pi} \frac{1}{1 + it}$$

jest wartością brzegową funkcji holomorficznej w górnej półpłaszczyźnie. To zagadnienie sprowadza się zaś do tzw. problemu Riemanna-Hilberta, którego rozwiązanie prowadzi do poniższego twierdzenia.

TWIERDZENIE 2.1 ([A], *Theorem 1*). Niech $\lambda > 0$. Rozwiązaniem zagadnienia (2.2) jest funkcja dana wzorem

$$u(x, y) = e^{-\lambda y} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{t \cos(t\lambda y) - \sin(t\lambda y)}{1 + t^2} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(t + s)}{1 + s^2} ds\right) e^{-t\lambda x} dt$$

dla $x \geq 0, y \geq 0$ oraz wzorem

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(t\lambda y)}{1 + t^2} \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(t + s)}{1 + s^2} ds\right) e^{t\lambda x} dt$$

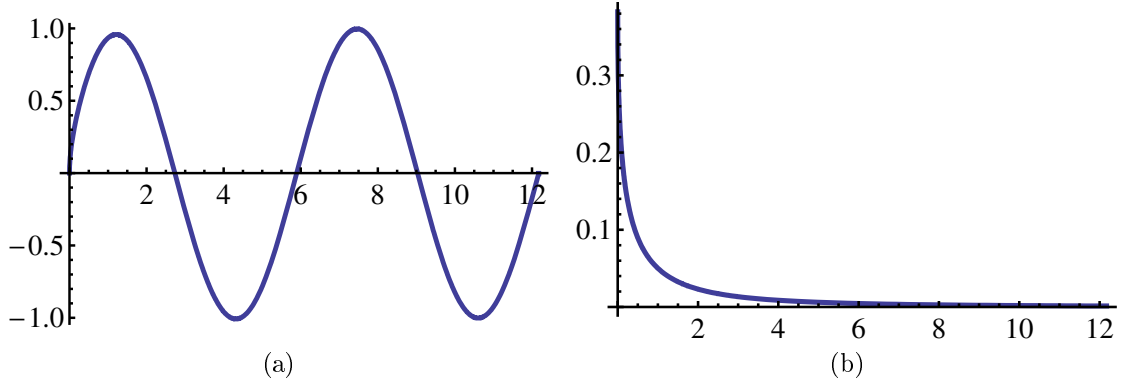
dla $x \leq 0, y \geq 0$.

Naszkirowany powyżej argument jest w dużej mierze wzorowany na dowodzie analogicznego twierdzenia w hydrodynamice. W 1947 Friedrichs i Lewy [26] (zob. również [31]) rozwiązali podobnymi metodami zagadnienie (2.2) z warunkiem Dirichleta: $u(x, 0) = 0$ dla $x < 0$ zastąpionym przez warunek Neumanna: $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$ dla $x < 0$.

Jak zostało powiedziane wcześniej, wartość brzegowa funkcji u jest funkcją własną operatorów $P_t^{(0, \infty)}$ i $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$.

TWIERDZENIE 2.2 ([A], *Theorem 2*). Załóżmy, że X_t jest procesem Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi}$). Niech $\lambda > 0$. Dla $x \in (0, \infty)$ określmy

$$F_\lambda(x) = \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{8}\right) - G_\lambda(x),$$



RYSUNEK 1. Wykres (a) funkcji własnej $F_1(x)$ oraz (b) funkcji $G_1(x)$ dla procesu Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{|\xi|}$) (źródło: [A])

gdzie

$$G_\lambda(x) = G_1(\lambda x) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{t}{1+t^2} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log(t+s)}{1+s^2} ds\right) e^{-t\lambda x} dt.$$

Wówczas $P_t^{(0,\infty)} F_\lambda(x) = e^{-\lambda t} F_\lambda(x)$ dla $t > 0$, $x \in (0, \infty)$. Ponadto $F_\lambda \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{(0,\infty)}; L^\infty)$ oraz $\mathcal{A}_{(0,\infty)} F_\lambda(x) = -\lambda F_\lambda(x)$ dla $x \in (0, \infty)$.

2.2. Metoda Wienera-Hopfa ([B], rozdz. 3–4). Metoda zastosowana w pracy [A] nie daje się w łatwy sposób zastosować dla innych procesów. Okazuje się jednak, że dostępna jest ogólniejsza technika, która pozwala uzyskać wzór na funkcje własne operatorów $P_t^{(0,\infty)}$ i $\mathcal{A}_{(0,\infty)}$ przy założeniach 1.5(a)–(c). Zaczniemy od jej nieformalnego opisu.

Niech $K > 0$ i niech F będzie funkcją własną operatora $\mathcal{A}_{(0,\infty)}$, odpowiadającą wartości własnej $-K$, tj. $F \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{(0,\infty)}; L^\infty)$ oraz $\mathcal{A}_{(0,\infty)} F = -KF$. Choć nie jest to prawdą, założmy na potrzeby tego opisu, że $F \in \mathcal{D}(\mathcal{A}; L^\infty)$. Wówczas $F(x) = 0$ dla $x \leq 0$ oraz $\mathcal{A}F(x) + KF(x) = 0$ dla $x > 0$ (por. tw. 1.8). Na mocy (1.8), $\mathcal{A}F(x)$ jest dane przez splot F z pewną dystrybucją. Otrzymujemy zatem równanie Wienera-Hopfa, tj. równanie postaci:

$$F(x) = F * a(x) + b(x) \quad (x > 0),$$

gdzie a i b są danymi dystrybucjami odpowiednio na \mathbf{R} i $(0, \infty)$, zaś F jest szukaną funkcją na $(0, \infty)$. Metoda rozwiązywania takiego równania została odkryta w [64] (zob. też [29, 41]). W klasycznych zastosowaniach metody Wienera-Hopfa a jest całkowaną funkcją. W rozważanym tutaj przypadku tak nie jest, dystrybucja a ma osobliwość w pobliżu 0. Powoduje to pewne techniczne trudności w zastosowaniu metody Wienera-Hopfa, które pominiemy w poniższym opisie.

Ponieważ $F(x) = 0$ dla $x < 0$ oraz $\mathcal{A}F(x) + KF(x) = 0$ dla $x > 0$, na mocy tw. Paleya-Wienera transformaty Fouriera F oraz $\mathcal{A}F + KF$ rozszerzają się do funkcji holomorficznym odpowiednio w górnej i w dolnej półpłaszczyźnie. Ponadto $\mathcal{F}\mathcal{A}F(\xi) = -\psi(\xi^2)\mathcal{F}F(\xi)$, zatem

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}F + KF)(\xi) = (K - \psi(\xi^2))\mathcal{F}F(\xi) \quad (\xi \in \mathbf{R}).$$

Wygodnie jest przyjąć, że $K = \psi(\lambda^2)$ dla pewnego $\lambda > 0$. Głównym składnikiem metody Wienera-Hopfa jest (opisana w dalszej części autoreferatu) faktoryzacja:

$$\psi(\lambda^2) - \psi(\xi^2) = (\lambda^2 - \xi^2)h_+(\xi)h_-(\xi) \quad (\xi \in \mathbf{R}),$$

gdzie h_+ i h_- są funkcjami holomorficznymi odpowiednio w górnej i dolnej półpłaszczyźnie zespolonej. Otrzymujemy stąd

$$h_-(\xi)\mathcal{F}(\mathcal{A}F + \psi(\lambda^2)F)(\xi) = (\lambda^2 - \xi^2)h_+(\xi)\mathcal{F}F(\xi) \quad (\xi \in \mathbf{R}).$$

Lewa strona rozszerza się do funkcji holomorficzej w dolnej półpłaszczyźnie, zaś prawa — w górnej półpłaszczyźnie. Ponieważ obie strony są równe na \mathbf{R} , określają one pewną funkcję całkowitą $h(\xi)$. Stąd

$$\mathcal{F}F(\xi) = \frac{h(\xi)}{(\lambda^2 - \xi^2)h_+(\xi)} \quad (\xi \in \mathbf{R}).$$

Aby funkcja F była możliwie najbardziej regularna, jej transformata Fouriera powinna zanikać w nieskończoności. Z tego powodu postuluje się wybór funkcji $h(\xi) = 1$. Dowodzi się, że funkcja $1/((\lambda^2 - \xi^2)h_+(\xi))$ jest dystrybucyjną transformatą Fouriera pewnej funkcji ograniczonej. W ten heurystyczny sposób otrzymuje się wzór na funkcję $F = F_\lambda$, zawarty w poniższym twierdzeniu. Formalny dowód jest bardziej skomplikowany, jego główne elementy przedstawione są w dalszej części tego rozdziału.

TWIERDZENIE 2.3 ([B], *Theorem 1.1*). Załóżmy, że spełnione są warunki 1.5(a)–(c), tj. wykładnik Lévy’ego-Chinczyna X_t ma postać $\psi(\xi^2)$ dla pewnej zupełnej funkcji Bernsteina ψ . Niech $\lambda > 0$. Wówczas istnieje ograniczona funkcja F_λ na $(0, \infty)$, która jest funkcją własną operatorów $P_t^{(0, \infty)}$ i $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$,

$$P_t^{(0, \infty)}F_\lambda(x) = e^{-t\psi(\lambda^2)}F_\lambda(x) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{A}_{(0, \infty)}F_\lambda(x) = -\psi(\lambda^2)F_\lambda(x)$$

dla wszystkich $t > 0$, $x \in (0, \infty)$. W szczególności $F_\lambda \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{(0, \infty)}; L^\infty)$.

Transformata Laplace’a funkcji F_λ dana jest wzorem

$$(2.3) \quad \mathcal{L}F_\lambda(\xi) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \xi^2} \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2 + \zeta^2} \log \frac{\psi'(\lambda^2)(\lambda^2 - \zeta^2)}{\psi(\lambda^2) - \psi(\zeta^2)} d\zeta\right)$$

dla $\xi \in \mathbf{C}$ takich, że $\operatorname{Re} \xi > 0$. Ponadto dla $x \in (0, \infty)$ zachodzi

$$(2.4) \quad F_\lambda(x) = \sin(\lambda x + \vartheta_\lambda) - G_\lambda(x),$$

gdzie $\vartheta_\lambda \in [0, \frac{\pi}{2})$, a $G_\lambda(x)$ jest ograniczoną, całkowicie monotoniczną funkcją na $(0, \infty)$. Co więcej,

$$(2.5) \quad \vartheta_\lambda = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 - \zeta^2} \log \frac{\psi'(\lambda^2)(\lambda^2 - \zeta^2)}{\psi(\lambda^2) - \psi(\zeta^2)} d\zeta,$$

zaś G_λ jest transformatą Laplace’a miary skończonej γ_λ na $(0, \infty)$. Jeśli rozszerzenie holomorficzne $\psi(\xi)$ na górną półpłaszczyznę $\{\xi \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} \xi > 0\}$ ma ciągle wartości brzegowe $\psi^+(\xi)$ ($\xi \in \mathbf{R}$) i ponadto $\psi^+(-\xi) \neq \psi(\lambda)$ dla wszystkich $\xi > 0$, to miara γ_λ jest absolutnie ciągła i ma gęstość

$$(2.6) \quad \gamma_\lambda(d\xi) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{Im} \frac{\lambda\psi'(\lambda^2)}{\psi(\lambda^2) - \psi^+(-\xi^2)} \right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2 + \zeta^2} \log \frac{\psi'(\lambda^2)(\lambda^2 - \zeta^2)}{\psi(\lambda^2) - \psi(\zeta^2)} d\zeta\right) d\xi$$

dla $\xi > 0$.

Powyższe twierdzenie jest centralnym wynikiem rozprawy habilitacyjnej. Jego dowód łączy elementy różnych dziedzin matematyki: analizy zespolonej (metoda Wienera-Hopfa, teoria funkcji Stieltjesa i zupełnych funkcji Bernsteina), teorii dystrybucji (\mathcal{S} -spłoty, transformaty Fouriera i Laplace'a) oraz teorii procesów Markowa (wzór Dynkina, operator charakterystyczny Dynkina; zob. tw. 1.8).

Główną cechą tw. 2.3 jest jawna postać funkcji własnych. W większości zastosowań wystarcza wzór (2.3) na $\mathcal{L}F_\lambda(\xi)$ oraz reprezentacja $F_\lambda(x) = \sin(\lambda x + \vartheta_\lambda) - G_\lambda(x)$, gdzie G_λ jest całkowicie monotoniczna. Wzór (2.6) jest pomocny, gdy potrzebne są dokładniejsze własności G_λ (np. jednostajne oszacowania G_λ i jej pochodnych; zob. np. [36]).

Poniżej przedstawione są główne kroki dowodu tw. 2.3. Pierwsze dwa wyniki to własności zupełnych funkcji Bernsteina: jedna z nich jest dobrze znana, druga została udowodniona dopiero niedawno.

FAKT 2.4. (np. [57], rozdz. 7) Jeśli $\lambda > 0$ i ψ jest (różną od stałej) zupełną funkcją Bernsteina, to jest nią również

$$\psi_\lambda(\xi) = \frac{1 - \xi/\lambda^2}{1 - \psi(\xi)/\psi(\lambda^2)} \quad (\xi > 0).$$

Powyższą definicję uzupełniamy w sposób ciągły w $\xi = \lambda^2$, $\psi_\lambda(\lambda^2) = \psi(\lambda^2)/(\lambda^2\psi'(\lambda^2))$.

LEMAT 2.5 ([B], *Lemma 3.8*). Jeśli ψ jest (niezerową) zupełną funkcją Bernsteina, to jest nią również

$$\psi^\dagger(\xi) = \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log \psi(\xi^2 \zeta^2)}{1 + \zeta^2} d\zeta\right) \quad (\xi > 0).$$

Ponadto rozszerzenie holomorficzne ψ^\dagger spełnia $\psi^\dagger(\xi)\psi^\dagger(-\xi) = \psi(-\xi^2)$ dla $\xi \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

Pierwsza część powyższego lematu została niezależnie udowodniona w [39]. Z kolei wzór $\psi^\dagger(\xi)\psi^\dagger(-\xi) = \psi(-\xi^2)$ dla $\xi \in i\mathbf{R}$ można sprowadzić do faktoryzacji Wienera-Hopfa wykładnika Lévy'ego-Chinczyna procesu X_t (zob. [8], wzór (VI.4)). W dowodzie tw. 2.3 kluczowe okazuje się połączenie tych dwóch wyników. Prowadzi to do następującego opisu wspomnianej na początku rozdziału faktoryzacji Wienera-Hopfa:

$$\psi(\lambda^2) - \psi(\xi^2) = \frac{\psi(\lambda^2)}{\lambda^2} (\lambda^2 - \xi^2) \frac{1}{\psi_\lambda^\dagger(-i\xi)} \frac{1}{\psi_\lambda^\dagger(i\xi)} \quad (\xi \in \mathbf{R}),$$

gdzie $\psi_\lambda^\dagger(\xi) = (\psi_\lambda)^\dagger(\xi)$. Wzory z tw. 2.3 można przedstawić w bardziej zwartej postaci

$$\mathcal{L}F_\lambda(\xi) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \xi^2} \frac{\psi_\lambda^\dagger(\xi)}{\sqrt{\psi_\lambda(\lambda^2)}} \quad (\lambda > 0, \xi > 0);$$

$$\vartheta_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 - \zeta^2} \log \frac{\psi_\lambda(\zeta^2)}{\psi_\lambda(\lambda^2)} d\zeta = \text{Arg } \psi_\lambda^\dagger(i\lambda) \quad (\lambda > 0);$$

$$\gamma_\lambda(d\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\psi_\lambda(\lambda^2)}}{\psi_\lambda^\dagger(\xi)} \text{Im} \frac{\lambda\psi'(\lambda^2)}{\psi(\lambda^2) - \psi^+(-\xi^2)} d\xi \quad (\lambda > 0, \xi > 0).$$

LEMAT 2.6 ([B], *Corollary 4.8*). Istnieje funkcja F_λ o transformacie Laplace'a zadanej wzorem (2.3). Funkcja ta ma postać podaną w (2.4), (2.5) i (2.6).

Powyższy lemat ma następujący dowód. Funkcja ψ_λ^\dagger jest zupełną funkcją Bernsteina. Korzystając z reprezentacji (1.9) dla funkcji ψ_λ^\dagger i znanych własności tzw. funkcji Stieltjesa dowodzi się (zob. [B], *Lemma 2.20*), że funkcja

$$\frac{1}{2i\lambda} \left(\frac{\psi_\lambda^\dagger(i\lambda)}{\xi - i\lambda} - \frac{\psi_\lambda^\dagger(-i\lambda)}{\xi + i\lambda} \right) - \frac{\psi_\lambda^\dagger(\xi)}{\lambda^2 + \xi^2}$$

jest funkcją Stieltjesa, a więc transformatą Laplace'a pewnej funkcji całkowiec monotonicznej $G(x)$. Z drugiej strony

$$\frac{1}{2i\lambda} \left(\frac{\psi_\lambda^\dagger(i\lambda)}{\xi - i\lambda} - \frac{\psi_\lambda^\dagger(-i\lambda)}{\xi + i\lambda} \right)$$

jest transformatą Laplace'a funkcji $c_\lambda^{-1} \sin(\lambda x + \vartheta_\lambda) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, gdzie $\vartheta_\lambda = \text{Arg } \psi_\lambda^\dagger(i\lambda)$ oraz $c_\lambda = \lambda/|\psi_\lambda^\dagger(i\lambda)| = (\lambda^2/\psi_\lambda(\lambda^2))^{1/2}$. Łącząc te wyniki, otrzymujemy (2.3) dla funkcji $F_\lambda(x) = \sin(\lambda x + \vartheta_\lambda) - c_\lambda G(x)$, a następnie (2.4) i (2.5). Wzór (2.6) wynika z własności zupełnych funkcji Bernsteina i lematu 2.5.

LEMAT 2.7 ([B], *Lemma 4.9*). Skonstruowana wyżej funkcja $F_\lambda(x)$ jest *dystrybucyjną* funkcją własną $\mathcal{A}_{(0,\infty)}$. Mówiąc nieformalnie, prawa strona wzoru (1.8) jest poprawnie określona dla F_λ i $x \in (0, \infty)$, a jej wartość wynosi $-\psi(\lambda^2)F_\lambda(x)$.

Dowód powyższego lematu jest dość techniczny. Na mocy faktoryzacji Wienera-Hopfa,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{A}F_\lambda + \psi(\lambda^2)F_\lambda)(\xi) &= (\psi(\lambda^2) - \psi(\xi^2))\mathcal{F}F_\lambda(\xi) \\ &= \frac{\psi(\lambda^2)}{\lambda^2} (\lambda^2 - \xi^2) \frac{1}{\psi_\lambda^\dagger(-i\xi)} \frac{1}{\psi_\lambda^\dagger(i\xi)} \mathcal{L}F_\lambda(-i\xi) \\ &= \frac{\psi(\lambda^2)}{\lambda} \frac{1}{\psi_\lambda^\dagger(i\xi)} \end{aligned}$$

(pomijamy tu kwestię istnienia i regularności dystrybucyjnej transformaty Fouriera funkcji F_λ). Wobec tego $\mathcal{F}(\mathcal{A}F_\lambda + \psi(\lambda^2)F_\lambda)$ rozszerza się do funkcji holomorficznnej w dolnej półpłaszczyźnie. Stąd, na mocy tw. Paleya-Wienera, $\mathcal{A}F_\lambda(x) + \psi(\lambda^2)F_\lambda(x) = 0$ dla $x \in (0, \infty)$, tak jak chcieliśmy. Powyższy rachunek byłby całkiem ścisły, gdyby F_λ należało np. do $C_c^\infty(\mathbf{R})$. Ponieważ tak nie jest, w dowodzie potrzebne jest użycie teorii dystrybucji i pojęcia \mathcal{S} -splotów.

Tw. 2.3 wynika stosunkowo łatwo z powyższych lematów. Jeśli X_t jest złożonym procesem Poissona (ψ jest ograniczona), to na mocy tw. 1.8(a) dystrybucyjne funkcje własne są automatycznie funkcjami własnymi. Załóżmy zatem, że ψ jest nieograniczona.

Łatwo sprawdzić ([B], *Lemma 4.11*), że $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_\lambda(x) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\xi \mathcal{L}F_\lambda(\xi)) = 0$. Wobec tego F_λ jest ciągła w zerze. Można zatem rozłożyć F_λ na sumę dwóch funkcji, jednej w $C_0((0, \infty))$, do której stosuje się tw. 1.8(b), drugiej w $C_b^\infty(\mathbf{R})$, do której można zastosować tw. 1.8(c) (szczegóły tego rozumowania zawiera [B], *Lemma 4.2*). W ten sposób dowodzi się, że $F_\lambda \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{(0,\infty)}; L^\infty)$ i ponadto $\mathcal{A}_{(0,\infty)}F_\lambda(x) = -\psi(\lambda^2)F_\lambda(x)$ dla $x \in (0, \infty)$. Z ogólnej teorii półgrup operatorów wynika teraz, że $P_t^{(0,\infty)}F_\lambda(x) = e^{-t\psi(\lambda^2)}F_\lambda(x)$ dla $t > 0, x \in (0, \infty)$. Twierdzenie zostało udowodnione.

Zauważmy, że tw. 2.3 zgadza się z tw. 2.1 dla procesu Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi}$) oraz z przykł. 1.2 dla ruchu Browna ($\psi(\xi) = \xi$).

2.3. Własności funkcji własnych ([B], rozdz. 4.4). Ze wzorów podanych w tw. 2.3 można wywnioskować wiele własności funkcji własnych F_λ . W zastosowaniach funkcje te występują najczęściej we wzorach całkowych, dlatego istotne są oszacowania $F_\lambda(x)$, przede wszystkim dla małych $x > 0$. Szczególnie ważne są oszacowania ϑ_λ , m.in. dlatego, że $F_\lambda(x) = \sin(\lambda x + \vartheta_\lambda) - G_\lambda(x)$ jest funkcją rosnącą na przedziale $[0, \frac{\pi}{2} - \vartheta_\lambda]$. Poniżej podajemy niektóre wyniki z artykułu [B]. Analogiczne wyniki dla procesu Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi}$) zostały udowodnione w [A], rozdz. 5. Dużo dokładniejsze oszacowania F_λ można znaleźć w nowszej pracy [49].

LEMAT 2.8. (a) Wartość ϑ_λ zależy w sposób różniczkowalny od $\lambda > 0$. Ponadto

$$\vartheta_\lambda \leq \frac{\pi}{2} \sup_{\xi > 0} \frac{\xi^2 \psi'_\lambda(\xi^2)}{\psi_\lambda(\xi^2)} = \frac{\pi}{2} \sup_{\xi > 0} \left(\frac{\xi^2 \psi'(\xi^2)}{\psi(\lambda^2) - \psi(\xi^2)} - \frac{\xi^2}{\lambda^2 - \xi^2} \right) \quad (\lambda > 0)$$

(zob. [B], *Proposition 4.17* i *4.18*).

(b) Zachodzi $0 \leq G_\lambda(x) \leq G_\lambda(0) = \sin \vartheta_\lambda$ oraz

$$\int_0^\infty G_\lambda(x) dx = \frac{1}{\lambda} \left(\cos \vartheta_\lambda - \sqrt{\frac{\lambda^2 \psi'(\lambda^2)}{\psi(\lambda^2)}} \right) \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

(zob. [B], *Lemma 4.21*).

(c) Zachodzi

$$\mathcal{L}F_\lambda(\xi) \leq \frac{|\lambda + \xi|}{|\lambda^2 + \xi^2|} \quad (\lambda > 0, \xi > 0).$$

Jeśli istnieją $C, \alpha > 0$ takie, że $\psi'(\xi) \geq C\xi^{\alpha/2-1}$ dla $\xi \geq 1$, to dla każdego $\varepsilon \in (0, \alpha/2)$ zachodzi

$$\frac{|F_\lambda(x_1) - F_\lambda(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\varepsilon} \leq \frac{c\lambda^\varepsilon}{\alpha - \varepsilon} \sqrt{\sup_{\zeta > \lambda} \frac{\lambda^{2-2\alpha}\psi'(\lambda^2)}{\zeta^{2-2\alpha}\psi'(\zeta^2)}} \quad (\lambda > 0, x_1, x_2 > 0)$$

(zob. [B], *Lemma 4.22* i *4.24*).

W wielu interesujących przypadkach funkcja ψ zachowuje się jak funkcja potęgowa zmiennej ξ w otoczeniu 0 i ∞ , tj. $\psi(\xi) \sim c_\infty \xi^{\alpha_\infty/2}$ dla $\xi \rightarrow \infty$, $\psi(\xi) \sim c_0 \xi^{\alpha_0/2}$ dla $\xi \rightarrow 0^+$. W takim wypadku możliwe jest uzyskanie wielu szczegółowych własności funkcji własnych F_λ ; na przykład $F_\lambda(x)$ także zachowuje się jak funkcja potęgowa, gdy $x \rightarrow 0^+$. Uogólnienie tego typu rezultatów jest możliwe dzięki teorii wolno zmieniających się funkcji, rozwiniętej głównie przez Karamatę. Mówimy, że ψ jest regularnie zmieniającą się funkcją w 0^+ oraz w ∞ , z wykładnikami $\alpha_0, \alpha_\infty \in [0, 2]$, jeśli zachodzi

$$(2.7) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\psi(k\xi)}{\psi(\xi)} = k^{\alpha_\infty/2} \quad \text{oraz} \quad \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\psi(k\xi)}{\psi(\xi)} = k^{\alpha_0/2}$$

dla wszystkich $k > 0$. Powyższy warunek jest dość typowym założeniem w teorii podporządkowanych ruchów Browna (zob. np. [13, 38, 59]). Gdy X_t nie ma części gaussowskiej, na mocy twierdzeń tauberowskich Karamaty, regularna zmienność ψ w ∞ lub w 0^+ jest równoważna regularnej zmienności gęstości miary Lévy'ego ν odpowiednio w 0 i w $\pm\infty$.

LEMAT 2.9. (a) Jeśli zachodzi (2.7) i $\alpha_0, \alpha_\infty > 0$, to funkcje $F_\lambda(x/\lambda)$ spełniają warunek Höldera na \mathbf{R} z każdym wykładnikiem $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2} \min(\alpha_0, \alpha_\infty))$, jednostajnie względem $\lambda > 0$ (zob. [B], *Corollary 4.26*).

(b) Jeśli zachodzi pierwsza część (2.7) i $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi(\xi) = \infty$, to

$$F_\lambda(x) \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha_\infty/2)} \sqrt{\frac{\lambda^2 \psi'(\lambda^2)}{\psi(1/x^2)}} \quad (\lambda > 0, x \rightarrow 0^+)$$

(zob. [B], *Lemma 4.27*).

2.4. Rozwinięcie w układzie uogólnionych funkcji własnych ([A], **rozdz. 6** oraz [B], **rozdz. 5**). Jak zostało to opisane w przykł. 1.2, w przypadku ruchu Browna operator całkowy z jądrem danym przez funkcje własne $F_\lambda(x) = \sin(\lambda x)$ rozszerza się do operatora unitarnego (z dokładnością do stałego czynnika) \mathcal{F}_{\sin} na $L^2((0, \infty))$, który diagonalizuje działanie $P_t^{(0, \infty)}$ i $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$. Podobnie jest w ogólnym przypadku: praca [A] zawiera dowód tego faktu dla procesu Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi}$), który w pracy [B] zostaje uogólniony dla wszystkich procesów α -stabilnych ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$).

Dowód w [B] obejmuje wszystkie procesy spełniające warunki 1.5(a)–(c) przy dodatkowym założeniu: zdefiniowany poniżej operator Π jest różnowartościowy. W późniejszym artykule [49] udowodniono, że warunek ten jest zawsze spełniony. Warto dodać, że w pierwotnej wersji artykułu [B] (dostępnej w bazie arXiv) podany był prosty do sprawdzenia warunek wystarczający na to, by Π był różnowartościowy. Ze względu na uzupełnienie w [49], warunek ten ostatecznie został z pracy usunięty. Poniżej, podobnie jak w [B], podajemy pełne sformułowanie twierdzenia.

Twierdzenie 2.10 ([A], *Theorem 3* i [B], *Theorem 1.3*). Załóżmy, że spełnione są warunki 1.5(a)–(c). Niech F_λ ($\lambda > 0$) będzie funkcją własną z tw. 2.3. Określmy

$$\Pi f(\lambda) = \int_0^\infty f(x) F_\lambda(x) dx \quad (\lambda > 0, f \in C_c((0, \infty))).$$

Wówczas $\sqrt{2/\pi} \Pi$ rozszerza się do operatora unitarnego na $L^2((0, \infty))$ oraz

$$\Pi P_t^{(0, \infty)} f(\lambda) = e^{-t\psi(\lambda^2)} \Pi f(\lambda) \quad (\lambda > 0, f \in L^2((0, \infty))).$$

Ponadto $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{(0, \infty)}; L^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi(\lambda^2) \Pi f(\lambda)$ należy do $L^2((0, \infty))$ i w tym przypadku

$$\Pi \mathcal{A}_{(0, \infty)} f(\lambda) = -\psi(\lambda^2) \Pi f(\lambda) \quad (\lambda > 0).$$

Gdyby operator $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$ miał dyskretne widmo (tak jak \mathcal{A}_D dla ograniczonych zbiorów D), miałyby on przeliczalnie wiele funkcji własnych. Wówczas odpowiednik tw. 2.3 podawałby wzór na te funkcje własne, zaś wynik analogiczny do tw. 2.10 sprowadzałby się do stwierdzenia, że znalezione funkcje własne tworzą zupełny układ ortonormalny. Ponieważ jednak widmo $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$ jest ciągłe, dowód tw. 2.10 jest trudniejszy.

Dodatkowy warunek różnowartościowości operatora Π można interpretować jako zupełność układu uogólnionych funkcji własnych F_λ . W istocie, gdyby istniały inne (uogólnione lub nie) funkcje własne $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$, w rozpiętej przez nie przestrzeni znajdowałyby się funkcje f , które byłyby ortogonalne do przestrzeni rozpiętej przez F_λ . Dla takich funkcji f mielibyśmy $\Pi f = 0$, czyli Π nie byłby różnowartościowy.

Przy założeniu różnowartościowości operatora Π wynik zawarty w tw. 2.10 nie jest szokujący. Możliwe wydaje się skorzystanie z ogólnej teorii (ściślej: z wyników Gårdinga dotyczących tzw. operatorów Carlemana, podobnie jak w [28]), choć i w tym przypadku

nie uda się ominąć najbardziej technicznego rachunku. W artykułach [A] i [B] zastosowano więc bardziej bezpośrednie podejście.

Przed opisaniem głównych kroków dowodu tw. 2.10 warto podkreślić, że mimo pozornych podobieństw między operatorem Π w ogólnym przypadku i transformatą sinusową \mathcal{F}_{\sin} (odpowiadającą ruchowi Browna, $\psi(\xi) = \xi$), większość klasycznych dowodów tw. Plancherela dla \mathcal{F}_{\sin} nie daje się łatwo uogólnić dla Π . Dotyczy to m.in. jednego z łatwiejszych dowodów tw. Plancherela, wykorzystującego funkcje Hermite'a, oraz wszystkich dowodów opartych na algebraicznej strukturze funkcji $e^{i\xi x} = \cos(\xi x) + i \sin(\xi x)$, której w ogólności nie mają funkcje F_λ . W [49] wykorzystuje się jawną postać $\Pi f(\lambda) = \mathcal{L}F_\lambda(\xi)$ z tw. 2.3 dla $f(x) = e^{-\xi x}$ oraz liniową gęstość układu takich funkcji f .

LEMAT 2.11 ([B], *Lemma 5.1*). Operator formalnie sprzężony do Π ,

$$\Pi^* f(x) = \int_0^\infty F_\lambda(x) f(\lambda) d\lambda \quad (x > 0, f \in C_c((0, \infty))),$$

rozszerza się do operatora ograniczonego na $L^2((0, \infty))$.

Dowód wykorzystuje wzór $F_\lambda(x) = \sin(\lambda x + \vartheta_\lambda) - G_\lambda(x)$. Operator całkowy z jądrem $\sin(\lambda x + \vartheta_\lambda)$ można zapisać w postaci $f(\lambda) \mapsto \text{Im} \mathcal{F}(e^{i\vartheta_\lambda} f(\lambda))$, rozszerza się on więc do operatora ograniczonego na $L^2((0, \infty))$. Ograniczenie operatora z jądrem $G_\lambda(x)$ wynika z lematu 2.8(b) i nierówności Hardy'ego-Hilberta.

LEMAT 2.12 ([B], *Lemma 5.2*). Operator $\sqrt{2/\pi} \Pi^*$ rozszerza się do izometrii na $L^2((0, \infty))$ oraz $P_t^{(0, \infty)} \Pi^* f = \Pi^*(e^{-t\psi(\lambda^2)} f(\lambda))$ dla $f \in L^2((0, \infty))$.

W powyższym sformułowaniu przez izometrię rozumiemy operator zachowujący iloczyn skalarny (tj. unitarny na obraz). Wzór $P_t^{(0, \infty)} \Pi^* f = \Pi^*(e^{-t\psi(\lambda^2)} f(\lambda))$ dla $f \in C_c((0, \infty))$ wynika wprost z tw. Fubniego i tw. 2.3. Dowód pozostałej części polega na wykazaniu odpowiednika ortonormalności uogólnionych funkcji własnych. W tym celu najpierw dowodzi się, że $\Pi^* f$ jest ortogonalne do $\Pi^* g$, jeśli nośniki f i g są zawarte w rozłącznych przedziałach. Stąd wynika, że

$$\langle \Pi^* f, \Pi^* g \rangle_{L^2((0, \infty))} = \int_0^\infty f(\lambda) g(\lambda) m(d\lambda) \quad (f, g \in C_c((0, \infty)))$$

dla pewnej miary Radona m na $(0, \infty)$, danej wzorem $m(E) = \|\Pi^* \mathbf{1}_E\|_{L^2((0, \infty))}^2$. Następnie pozostaje wykazać, że $m(d\lambda) = \frac{\pi}{2} d\lambda$. Wymaga to stosunkowo żmudnego obustronnego szacowania normy $\Pi^* \mathbf{1}_E$ dla $E = (\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$, gdzie $\lambda_0 > 0$ jest ustalone, a $\delta \rightarrow 0^+$.

Przy założeniu, że Π jest różnowartościowy, tw. 2.10 wynika łatwo z powyższych lematów. W istocie, wówczas Π^* jest surjekcją. Ponieważ Π^* jest też izometrią, operator ten jest unitarny. Pozostaje zastosować wzór z lematu 2.12.

Gdy X_t jest procesem α -stabilnym ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$), to $F_\lambda(x) = F_1(\lambda x)$ jest symetrycznym jądrem całkowym (zob. rozdz. 2.5 poniżej). Wynika stąd, że $\Pi = \Pi^*$ jest izometrią, a więc z pewnością jest różnowartościowy. Wobec tego teza tw. 2.10 zachodzi. W ogólnym przypadku w [49] udowodniono, wykorzystując wzór (2.3) i metody zmiennej zespolonej, tożsamość

$$\int_0^\infty \mathcal{L}F_\lambda(\xi) \mathcal{L}F_\lambda(\eta) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\xi + \eta} \quad (\xi, \eta > 0).$$

Wynika z niej, że dla $f(x) = e^{-\xi x}$ i $g(x) = e^{-\eta x}$ zachodzi

$$\langle \Pi f, \Pi g \rangle_{L^2((0, \infty))} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\xi + \eta} = \frac{\pi}{2} \langle f, g \rangle_{L^2((0, \infty))}.$$

Ponieważ układ funkcji $e^{-\xi x}$ jest liniowo gęsty w $L^2((0, \infty))$, operator $\sqrt{2/\pi} \Pi$ jest izometrią.

2.5. Przykłady ([B], rozdz. 6). Najważniejsze procesy w rozważanej klasie to procesy α -stabilne ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0, 2]$). Mają one własność skalowania: procesy X_{kt} i $k^{1/\alpha} X_t$ mają te same rozkłady skończenie wymiarowe. Zarówno z tej własności, jak i wprost ze wzoru (2.3) można wywnioskować, że $F_\lambda(x) = F_1(\lambda x)$. Stąd też $\vartheta_\lambda = \vartheta_1$ nie zależy od $\lambda > 0$. Co więcej, ze wzoru (2.5) wynika, że w istocie $\vartheta_\lambda = (2 - \alpha)\frac{\pi}{8}$. Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$F_\lambda(x) = \sin\left(\lambda x + \frac{(2-\alpha)\pi}{8}\right) - \int_0^\infty e^{-\lambda x s} \gamma(s) ds \quad (\lambda, x > 0),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma(s) = & \frac{\sqrt{2\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi} \frac{s^\alpha}{1 + s^{2\alpha} - 2s^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}} \times \\ & \times \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \zeta^2} \log \frac{1 - s^\alpha \zeta^\alpha}{1 - s^2 \zeta^2} d\zeta\right) \quad (s > 0). \end{aligned}$$

W szczególności dla $\alpha = 1$ otrzymujemy (zob. rys. 1)

$$F_\lambda(x) = \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{s}{1 + s^2} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log(1 + s\zeta)}{1 + \zeta^2} d\zeta\right) e^{-\lambda x s} ds$$

dla $\lambda, x > 0$. Z kolei dla $\alpha = 2$ mamy po prostu $F_\lambda(x) = \sin(\lambda x)$, jak w przykł. 1.2.

Ciekawym przykładem jest złożony proces Poissona ze skokami mającymi rozkład Laplace'a $\frac{1}{2}e^{-|z|} dz$. Odpowiada mu zupełna funkcja Bernsteina $\psi(\xi) = \xi/(1 + \xi)$. W tym przypadku $\vartheta_\lambda = \arctg \lambda$ oraz $G_\lambda(x) = 0$, a więc

$$F_\lambda(x) = \sin(\lambda x + \arctg \lambda) \quad (\lambda, x > 0).$$

W szczególności F_λ nie jest ciągła w 0: $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_\lambda(x) = \lambda/\sqrt{1 + \lambda^2} \neq 0$. Można udowodnić, że $G_\lambda(x) = 0$ dla wszystkich $\lambda > 0$ i $x > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi(\xi) = a\xi$ (ruch Browna) lub $\psi(\xi) = a\xi/(b + \xi)$ (proces rozważany powyżej, z dokładnością do zmiany skali czasu i przestrzeni).

W pozostałych przykładach spotykanych w literaturze wzory z tw. 2.3 upraszczają się jedynie nieznacznie. Mimo to można je stosować w teorii fluktuacji (np. [49]) oraz teorii spektralnej procesów zabitych przy wyjściu z odcinka (np. [C] i [36]) i wielowymiarowych obszarów ([25]). Przypadki procesów relatywistycznych ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi^2 + m^2} - m$), mieszanek procesów stabilnych ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2} + c\xi^{\beta/2}$), procesu wariancji gamma ($\psi(\xi) = \log(1 + \xi)$) są analizowane w [B], rozdz. 6. Osobliwy przykład, w którym zbiór granic częściowych ϑ_λ gdy $\lambda \rightarrow 0^+$ tworzy odcinek $[0, \frac{\pi}{2}]$, można znaleźć w pracy [49].

3. TEORIA SPEKTRALNA DLA ODCINKA

W poniższym rozdziale omówione jest zastosowanie jawnego wzoru na funkcje własne operatorów $P_t^{(0,\infty)}$ i $\mathcal{A}_{(0,\infty)}$ do badania operatorów P_t^D i \mathcal{A}_D , gdy D jest odcinkiem, a X_t jest procesem α -stabilnym ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$). Możliwe uogólnienia i wyniki dotyczące procesów relatywistycznych ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi + m^2} - m$) są krótko opisane w rozdziale 4.

3.1. Wzór asymptotyczny na wartości własne. Dla operatora Laplace'a funkcje własne w D można otrzymać przez zawężenie do D tych funkcji własnych na \mathbf{R} , które spełniają warunek brzegowy Dirichleta. W ogólnym przypadku operator \mathcal{A} nie jest operatorem lokalnym (z wyjątkiem $\psi(\xi) = a\xi$), więc metoda zawężania dziedziny nie działa. Można jednak przypuszczać, że wpływ warunku zewnętrznego (czyli odpowiednika warunku brzegowego dla operatorów nielokalnych) maleje w miarę oddalania się od brzegu. Widać to dobrze w przypadku funkcji własnych na półprostej. Mamy bowiem $F_\lambda(x) = \sin(\lambda x + \vartheta_\lambda) - G_\lambda(x)$, gdzie $\sin(\lambda x + \vartheta_\lambda)$ jest funkcją własną na \mathbf{R} , a $G_\lambda(x)$ maleje gdy $x \rightarrow \infty$.

Powyższa argumentacja sugeruje, że funkcje własne φ_n operatorów P_t^D i \mathcal{A}_D dla odcinka $D = (a, b)$ powinny być bliskie funkcji $c_1 F_\mu(x - a)$ w pobliżu a , funkcji $c_2 F_\mu(b - x)$ w pobliżu b oraz funkcji $c_3 \sin(\mu x + c_4)$ w pobliżu środka odcinka, gdzie c_1, c_2, c_3, c_4 i μ są odpowiednimi stałymi. W pracy [A] dla procesu Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi}$), a w pracy [C] dla wszystkich procesów α -stabilnych ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$) wykazano, że tak właśnie jest, i wykorzystano ten wynik do uzyskania dobrych przybliżeń wartości własnych λ_n . Główny rezultat zawarty jest w poniższym twierdzeniu. Przypomnijmy, że φ_n jest układem ortonormalnym funkcji własnych operatora $-\mathcal{A}_D$, a λ_n niemalejącym ciągiem odpowiednich wartości własnych.

TWIERDZENIE 3.1 ([A], *Theorem 6* i [C], *Theorem 1*). Niech D będzie odcinkiem i $\alpha \in (0, 2)$. Wówczas

$$(3.1) \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{|D|} - \frac{(2-\alpha)\pi}{4|D|} \right)^\alpha + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Sformułowania w [A] i [C] dotyczą odcinka $D = (-1, 1)$, ale dzięki niezmienniczości na przesunięcia i własnościom skalowania przenoszą się one na dowolny odcinek. Dla $\alpha = 1$ stała w notacji asymptotycznej (3.1) wynosi $1/|D|$, tj.

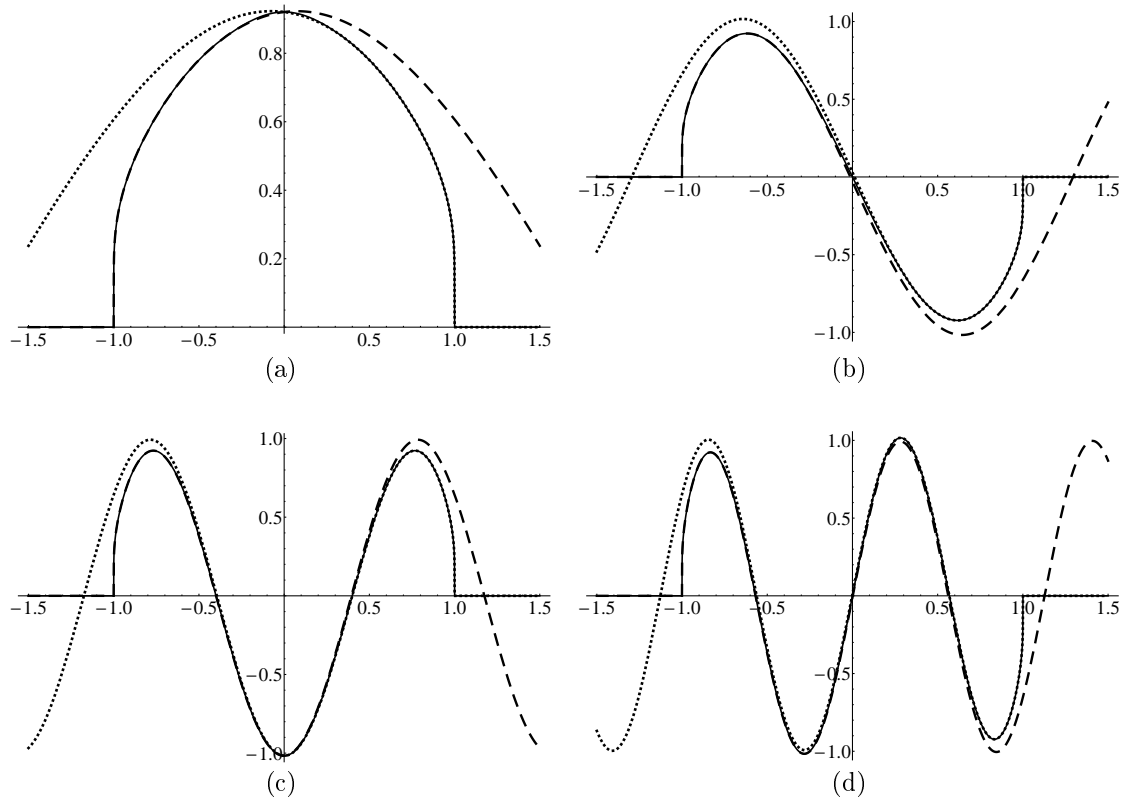
$$\left| \lambda_n - \left(\frac{n\pi}{|D|} - \frac{\pi}{4|D|} \right) \right| \leq \frac{1}{n|D|} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Stąd automatycznie wynika jednokrotność wartości własnych. Dla ogólnych $\alpha \in (0, 2)$ stała też jest jawna, lecz dużo gorsza. Ścisłej, dla $n \geq (4000/\alpha)^{3/(2\alpha)}$ zachodzi

$$\left| \lambda_n - \left(\frac{n\pi}{|D|} - \frac{(2-\alpha)\pi}{4|D|} \right)^\alpha \right| \leq 30\,000 \frac{(2-\alpha)}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{n|D|^\alpha}.$$

Zauważmy, że choć $\alpha = 2$ nie jest uwzględnione w twierdzeniu, powyższy wzór jest prawdziwy, bowiem $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{|D|}\right)^2$ i obie strony nierówności są równe 0.

Rozwinięcie asymptotyczne (3.1) jest oczywiście wzmocnieniem wzoru (1.11). Ten drugi wzór jest jednak prawdziwy dla dowolnych zbiorów otwartych; istnieje też wersja wielowymiarowa. Ciekawym problemem jest uzyskanie drugiego członu w rozwinięciu



RYСУNEK 2. Wykres przybliżenia $\tilde{\varphi}_n(x)$ (linia ciągła) oraz przesuniętych funkcji własnych $F_{\mu_n}(1+x)$ (linia przerywana) i $F_{\mu_n}(1-x)$ (linia kropkowana) dla $\psi(\xi) = \xi^{1/10}$ (tj. $\alpha = \frac{1}{5}$) oraz (a) $n = 1$; (b) $n = 2$; (c) $n = 3$; (d) $n = 4$ (źródło: [C])

asymptotycznym λ_n dla obszarów wielowymiarowych. Istotne kroki w tym kierunku poczyniono w artykułach [4, 6, 25]. Ostatnia z tych prac, choć dotyczy wielowymiarowych procesów stabilnych, wykorzystuje przedstawione w poprzednim rozdziale wyniki dotyczące półprostej dla jednowymiarowego procesu relatywistycznego.

Warto wspomnieć, że wyraz $(2 - \alpha) \frac{\pi}{4|D|}$ w (3.1) został przewidziany i poparty symulacjami numerycznymi w artykule [65].

Jak wspomniano wyżej, dla $\alpha = 1$ stała w oszacowaniu (3.1) jest dostatecznie mała, by uzyskać jednokrotność wartości własnych. Zagadnienie to badane było już w artykule [1], a w [46] udowodniono, że krotność wartości własnych nie przekracza 2. Stosując własności wartości własnych z prac [15, 21] oraz oszacowania dla $\alpha = 1$ i $\alpha = 2$, można twierdzenie o jednokrotności uogólnić dla $\alpha \in (1, 2)$. Naturalną hipotezą, wspartą symulacjami numerycznymi, jest analogiczny rezultat dla $\alpha < 1$. W jego uzyskaniu być może pomogą wyniki pracy [22].

TWIERDZENIE 3.2 ([A], *Theorem 6* i [C], *Proposition 3*). Niech D będzie odcinkiem. Jeśli $\alpha \geq 1$, to wartości własne P_t^D i \mathcal{A}_D mają krotność 1, tj. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

Poniżej omówiony jest dowód tw. 3.1, którego głównym elementem jest wspomniana we wstępnej części tego rozdziału konstrukcja przybliżeń funkcji własnych φ_n operatorów P_t^D i \mathcal{A}_D . Następnie omówionych jest kilka wniosków płynących z tej konstrukcji.

3.2. Aproksymacja funkcji własnych ([A], rozdz. 8–9 i [C], rozdz. 4–5). Ze względu na skalowanie, bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $D = (-1, 1)$. Ustalmy

gładką funkcję $q(x)$, która spełnia warunek $q(x) = 0$ dla $x \leq -\frac{1}{3}$ oraz $q(x) = 1$ dla $x \geq \frac{1}{3}$. Niech ponadto

$$\mu_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{(2-\alpha)\pi}{8} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Wielkość μ_n jest określona tak, aby

$$\sin(\mu_n(1+x) + \frac{(2-\alpha)\pi}{8}) = (-1)^{n-1} \sin(\mu_n(1-x) + \frac{(2-\alpha)\pi}{8}),$$

dzięki czemu funkcje $F_{\mu_n}(1+x)$ oraz $(-1)^n F_{\mu_n}(1-x)$ są niemal równe w pobliżu środka D . Określamy

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n(x) &= (1-q(x))F_{\mu_n}(1+x) - (-1)^n q(x)F_{\mu_n}(1-x) \\ &= \sin(\mu_n(1+x) + \frac{(2-\alpha)\pi}{8}) - (1-q(x))G_{\mu_n}(1+x) + (-1)^n q(x)G_{\mu_n}(1-x). \end{aligned}$$

Widzimy więc, że $\tilde{\varphi}_n(x) = F_{\mu_n}(1+x)$ dla x bliskich -1 ; $\tilde{\varphi}_n(x) = (-1)^{n-1} F_{\mu_n}(1-x)$ dla x bliskich 1 ; z kolei dla $x \in (-1, 1)$ dalekich od -1 i 1 mamy $\tilde{\varphi}_n(x) \approx \pm \sin(\mu_n x)$ lub $\tilde{\varphi}_n(x) \approx \pm \cos(\mu_n x)$ (znak i wybór funkcji trygonometrycznej zależą od n , zob. rys. 2). Kluczowym wynikiem jest następujące oszacowanie:

LEMAT 3.3 ([A], *Lemma 1* i [C], *Lemma 1*). Zachodzi

$$(3.2) \quad \|\mathcal{A}_D \tilde{\varphi}_n + \mu_n^\alpha \tilde{\varphi}_n\|_{L^2(D)} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dowód jest dość techniczny (zwłaszcza w przypadku ogólnych α , rozważanym w [C]) i wykorzystuje oszacowania funkcji G_λ oraz wzór (1.8). Przedstawiając $\tilde{\varphi}_n$ w (3.2) w bazie funkcji własnych φ_n , otrzymujemy następujący wynik.

WNIOSEK 3.4 ([A], *Lemma 2* i [C], wzór (24)). Istnieje wartość własna $\lambda_{k(n)}$, taka że

$$(3.3) \quad |\lambda_{k(n)} - \mu_n^\alpha| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aby udowodnić tw 3.1, wystarczy wykazać, że $k(n) = n$ dla dostatecznie dużych n . W tym celu wykorzystuje się oszacowanie śladu operatorów P_t^D (ten pomysł pochodzi od T. Kulczyckiego). Z jednej strony zachodzi

$$\operatorname{tr} P_t^D = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} = \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-t\lambda_{k(n)}} + \sum_{j \in J} e^{-t\lambda_j} \quad (t > 0),$$

gdzie n_0 jest ustaloną liczbą i $J = \{j : j \neq k(n) \text{ dla } n \geq n_0\}$. Z drugiej — mamy

$$\operatorname{tr} P_t^D = \int_D p_t^D(x, x) dx \leq \int_D p_t(x, x) dx = |D| p_t(0, 0) = c|D| t^{-1/\alpha} \quad (t > 0).$$

Porównując prawe strony powyższych wzorów, otrzymujemy oszacowanie z góry sumy $\sum_{j \in J} e^{-t\lambda_j}$, które w granicy $t \rightarrow 0^+$ prowadzi do nierówności $|J| < n_0$ (pomijamy tu wiele szczegółów technicznych).

Jeśli n_0 jest dostatecznie duże, z oszacowania (3.3) wynika, że $k(n)$ są parami różne dla $n \geq n_0$. Łącząc to z nierównością $|J| \leq n_0 - 1$, otrzymujemy $k(n) = n$ dla $n > \max J$. To kończy dowód twierdzenia.

3.3. Oszacowania funkcji własnych ([A], rozdz. 10 i [C], rozdz. 6). Z konstrukcji przybliżeń funkcji własnych można wywnioskować dodatkowe informacje o funkcjach φ_n . Poniżej podajemy dwa przykłady takich własności.

WNIOSEK 3.5 ([A], *Corollary 4* i [C], *Proposition 1*). Niech $D = (-1, 1)$. Jeśli $f_n(x) = \sin(\mu_n(1+x) + \frac{(2-\alpha)\pi}{8})$, to (po ewentualnej zmianie znaku funkcji φ_n)

$$\|\varphi_n - f_n\|_{L^2(D)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

WNIOSEK 3.6 ([A], *Corollary 5* i [C], *Proposition 2*). Jeśli $D = (-1, 1)$ i $\alpha \geq 1/2$, to funkcje własne $\varphi_n(x)$ są jednostajnie ograniczone względem $x \in D$ oraz $n = 1, 2, \dots$

Dowody polegają na kilkukrotnym wykorzystaniu wzorów (3.2) i (3.3), definicji przybliżeń $\tilde{\varphi}_n$ i funkcji F_λ oraz znanych własności jądra $p_t^D(x, y)$.

3.4. Metody numeryczne ([A], rozdz. 11 i [C], rozdz. 7). Znane są metody obliczania przybliżeń wartości własnych λ_n operatora $-\mathcal{A}_D$, gdy D jest odcinkiem, a X_t jest procesem α -stabilnym ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$; zob. np. [65]). Mają one jednak dwie wady: tempo zbieżności jest niezadowalające, a brak kontroli nad błędem przybliżenia uniemożliwia znajdowanie matematycznie ścisłych oszacowań numerycznych. W [A], rozdz. 11, podana jest metoda pozbawiona obu tych wad dla $\alpha = 1$; głównymi autorami tego rozdziału są J. Małecki i A. Stós. Z kolei w [C] można znaleźć opis mniej wydajnej metody znajdowania numerycznych oszacowań dolnych wartości własnych λ_n i oszacowania górnego pierwszej wartości własnej λ_1 dla wszystkich $\alpha \in (0, 2)$. Poniżej krótko opisujemy zastosowane metody. Dla uproszczenia, bez utraty ogólności, załóżmy, że $D = (-1, 1)$.

Oszacowania górne dla $\alpha = 1$ są wyznaczone za pomocą metody Rayleigha-Ritza (zob. np. [63]). Niech $G_D = -\mathcal{A}_D^{-1}$; G_D to tzw. operator Greena. Wartościami własnymi G_D są $1/\lambda_n$. Zasada wariacyjna mówi, że

$$(3.4) \quad \frac{1}{\lambda_n} = \max \left\{ \min_{f \in E} R(f) : E \text{ jest } n\text{-wymiarową podprzestrzenią } L^2(D) \right\},$$

gdzie $R(f)$ jest ilorazem Rayleigha,

$$R(f) = \frac{\int_D f(x)G_D f(x)dx}{\|f\|_{L^2(D)}^2} \quad (f \in L^2(D)).$$

Jeśli zamiast wszystkich podprzestrzeni E w (3.4) rozważy się tylko pewną ich klasę, otrzyma się ograniczenie z dołu na $1/\lambda_n$, a więc oszacowanie z góry λ_n . Należy tak dobrać klasę dopuszczalnych podprzestrzeni, by iloraz Rayleigha $R(f)$ można było wyznaczyć analitycznie.

Wzór na jądro G_D (tzw. funkcję Greena) podał M. Riesz w 1938 w artykule [53]. Dzięki temu możliwe jest obliczenie $G_D f$ dla $f(x) = x^n$: w [A], rozdz. 11 udowodniono, że $(1-x^2)^{-1/2}G_D f(x)$ jest wielomianem, którego współczynniki są dane jawnym wzorem za pomocą funkcji gamma. Autorem tego rachunku jest J. Małecki; analogiczny wynik dla wszystkich procesów α -stabilnych ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$) uzyskano później w [22].

Rozważmy przestrzeń E_N wielomianów stopnia mniejszego niż N (jako podprzestrzeń $L^2(D)$). Bazę ortonormalną E_N stanowią wielomiany Legendre'a. Wykorzystując jawną postać $G_D f$, gdy f jest wielomianem, można wyznaczyć macierz A_N formy kwadratowej

$\langle f, G_D f \rangle_{L^2(D)}$ na E_N w bazie wielomianów Legendre'a (zob. [A], wzory (11.3)–(11.5)). Stąd łatwo wynika, że $1/\lambda_n$ jest ograniczone z dołu przez n -tą największą wartość własną macierzy A_N .

Aby uzyskać oszacowania dolne (dla $\alpha = 1$), w pracy [A] zastosowano metodę wykorzystaną w artykule [24] dla zbliżonego zagadnienia w hydrodynamice, tzw. metodę zagadnień pośrednich Weinsteina-Aronszajna. Zagadnienie własne dla \mathcal{A}_D ma równoważne sformułowanie w postaci podobnej do (2.2),

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 & (x \in \mathbf{R}, y > 0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = -\lambda u(x, 0) & (x \in D), \\ u(x, 0) = 0 & (x \notin D). \end{cases}$$

Przez odpowiednie odwzorowanie konforemne (zadane przez zespoloną funkcję $\sin(x+iy)$) zagadnienie to przekształca się do postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0 & (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y > 0), \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) = -\lambda \cos x u(x, 0) & (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})), \\ v(\pm\frac{\pi}{2}, y) = 0 & (y > 0). \end{cases}$$

Jeśli w powyższym zagadnieniu usunąć mnożenie przez $\cos x$, otrzymuje się łatwe do rozwiązania zagadnienie o rozdzielonych zmiennych. Metoda Weinsteina-Aronszajna polega na rozwiązaniu zagadnień pośrednich, w których mnożenie przez $\cos x$ zastąpione jest innym operatorem (ściślej: operatorem $I - TP_N T$, gdzie I to operator identycznościowy, T to operator mnożenia przez $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} = \text{sign } x \sqrt{1 - \cos x}$, zaś P_N to operator rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń rozpiętą przez $f_n(x) = \sqrt{1 + \cos x} \sin(n(x + \frac{\pi}{2}))$ dla $n = 1, 2, \dots, N$). W prosty sposób rozwiązywanie zagadnienia pośredniego można sprowadzić do problemu znajdowania wartości własnych pewnej macierzy. Ponadto dowodzi się (korzystając z zasady wariacyjnej), że wartości własne zagadnienia pośredniego są mniejsze niż odpowiednie wartości własne zagadnienia wyjściowego. To daje oszacowania dolne λ_n .

Pewną nadzieję na zastosowanie metody Rayleigha-Ritza (a być może również metody Weinsteina-Aronszajna) dla wszystkich $\alpha \in (0, 2)$ dają dopiero wspomniane wyżej wyniki niedawnej pracy [22]. We wcześniejszym artykule [C] konieczne było zatem opracowanie innej techniki: zastosowano odpowiednio przystosowaną metodę elementów skończonych. Polega ona na podzieleniu prostej \mathbf{R} na jednakowe odcinki I_n , $n \in \mathbf{Z}$. Proces X_t przybliża się za pomocą procesu Markowa o wartościach w \mathbf{R} i o intensywności skoków z punktów odcinka I_i do punktów odcinka I_j danej przez $\inf_{x \in I_i, y \in I_j} \nu(y - x)$. Taki proces nie jest procesem Lévy'ego, ale ma skończoną liczbę skoków w każdym ograniczonym przedziale czasu. W artykule [C] udowodniono, że jeśli D jest sumą kilku spośród odcinków I_n , to wartości własne λ_n operatora $-\mathcal{A}_D$ są ograniczone z dołu przez analogiczne wartości własne dla przybliżonego procesu. Te ostatnie zaś można wyrazić jako wartości własne odpowiedniej macierzy. Dowód tej własności jest elementarny i bardzo ogólny, można go zastosować również do wielowymiarowych procesów Markowa. Należy jednak podkreślić, że w przypadku procesów o dużej liczbie małych skoków, zwłaszcza wielowymiarowych, zbieżność metody jest zdecydowanie niesatysfakcjonująca.

Górne ograniczenie pierwszej wartości własnej otrzymuje się, postępując analogicznie z operatorem Greena i funkcją Greena zamiast generatora i miary Lévy'ego. Ponieważ jednak operator Greena ma nieco inną postać niż generator, tylko dla λ_1 metoda daje

ograniczenie z góry (uzyskane tak przybliżenia dalszych wartości własnych mogą być mniejsze niż faktyczne wartości własne).

Ograniczenia uzyskane za pomocą ogólnych metod z pracy [C] nie są tak dokładne, jak w przypadku $\alpha = 1$ w artykule [A]. Wykonując obliczenia dla macierzy rozmiaru 900×900 , w [A] otrzymano następujące oszacowania pierwszych trzech wartości własnych (dla $\alpha = 1$):

$$\lambda_1 = 1,157773883697_{58}^{92}, \quad \lambda_2 = 2,75475474221_{510}^{695}, \quad \lambda_3 = 4,31680106659_{303}^{758}$$

(ograniczenie dolne podane jest w indeksie dolnym, górne — w górnym). Dla porównania omówione wyżej metody z pracy [C] zastosowane do $\alpha = 1$ dają wynik

$$1,1516 \leq \lambda_1 \leq 1,1608, \quad 2,7343 \leq \lambda_2, \quad 4,2756 \leq \lambda_3$$

przy obliczeniach wykorzystujących macierze 5000×5000 .

4. ZASTOSOWANIA I ROZSZERZENIA

4.1. Rozkład funkcjonału supremum. Na mocy wzoru (1.5) (zastosowanego do funkcji stale równej 1), rozkład czasu wyjścia τ_D ze zbioru D jest dany przez całkę z prawdopodobieństwa przejścia,

$$\mathbf{P}_x(\tau_D > t) = P_t^D 1(x) = \int_D p_t^D(x, y) dy \quad (t > 0, x \in D).$$

Wobec tego z rozwinięcia w układzie uogólnionych funkcji własnych operatora P_t^D danego w tw. 2.10 wynika wzór na dystrybuantę czasu wyjścia z półprostej $\tau_{(0, \infty)}$. Przed sformułowaniem odpowiedniego twierdzenia zauważmy, że ze względu na symetrię procesu X_t zachodzi

$$\mathbf{P}_x(\tau_{(0, \infty)} > t) = \mathbf{P}_{-x}(\tau_{(-\infty, 0)} > t) = \mathbf{P}_0(\tau_{(-\infty, x)} > t) \quad (t > 0, x > 0).$$

Zmienną $\tau_x = \tau_{(-\infty, x)}$ nazywa się czasem przejścia przez barierę na poziomie x . Jest ona ściśle związana z rozkładem funkcjonału supremum procesu X_t , tj.

$$M_t = \sup_{s \in [0, t]} X_s \quad (t > 0).$$

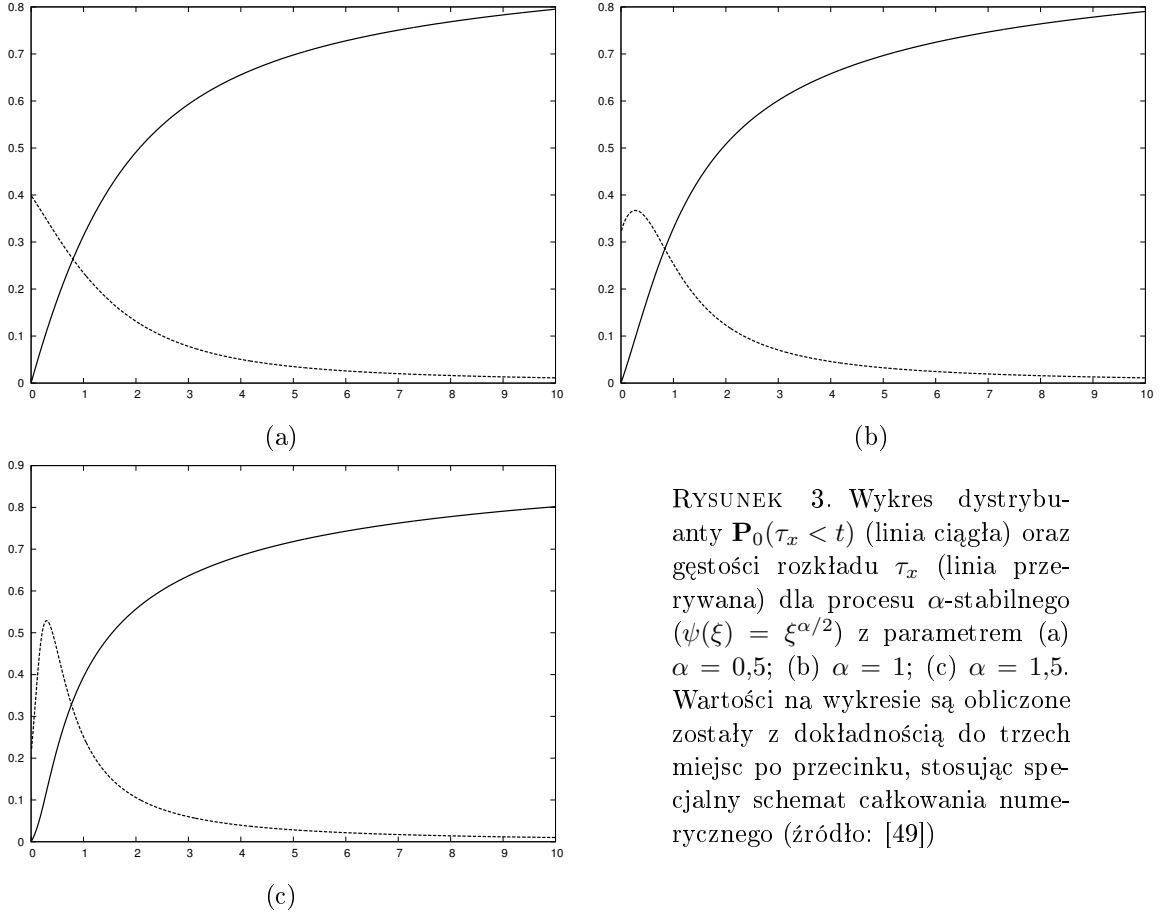
Mamy bowiem

$$\mathbf{P}_0(M_t < x) = \mathbf{P}_0(\tau_x > t) = \mathbf{P}_x(\tau_{(0, \infty)} > t) \quad (t > 0, x > 0).$$

Czasy przejścia przez barierę i funkcjonały supremum są jednymi z najważniejszych pojęć w teorii fluktuacji procesów Lévy'ego, dziedziny rozpoczętej badaniami Baxtera, Donskera, Darlinga, Spitzera i in. w latach 50. (zob. [7, 18, 61]). Teoria spektralna operatorów $P_t^{(0, \infty)}$ prowadzi do następującej charakteryzacji M_t , τ_x i $\tau_{(0, \infty)}$.

TWIERDZENIE 4.1 ([B], *Theorem 1.8*). Niech $t > 0$. Załóżmy, że spełnione są warunki 1.5(a)–(c) i ponadto

$$(4.1) \quad \sup_{\xi > 0} \frac{\xi |\psi''(\xi)|}{\psi'(\xi)} < 2 \quad \text{oraz} \quad \int_1^\infty \sqrt{\frac{\psi'(\xi^2)}{\psi(\xi^2)}} e^{-t\psi(\xi^2)} d\xi < \infty.$$



RYSUNEK 3. Wykres dystrybuanty $\mathbf{P}_0(\tau_x < t)$ (linia ciągła) oraz gęstości rozkładu τ_x (linia przerywana) dla procesu α -stabilnego ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$) z parametrem (a) $\alpha = 0,5$; (b) $\alpha = 1$; (c) $\alpha = 1,5$. Wartości na wykresie są obliczone z dokładnością do trzech miejsc po przecinku, stosując specjalny schemat całkowania numerycznego (źródło: [49])

Wówczas

$$(4.2) \quad \mathbf{P}_0(\tau_x > t) = \mathbf{P}_x(M_t < x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\psi'(\lambda^2)}{\psi(\lambda^2)}} e^{-t\psi(\lambda^2)} F_\lambda(x) d\lambda \quad (x > 0),$$

gdzie F_λ są funkcjami własnymi z tw. 2.3. Co więcej, równość (4.2) może być różniczkowana względem t pod znakiem całki.

Pierwsza część warunku (4.1) jest dość ogólnym założeniem o regularności ψ , potrzebnym wyłącznie do nierówności $\sup_{\lambda>0} \vartheta_\lambda < \frac{\pi}{2}$, dla dowolnej zupełnej funkcji Bernsteina ψ zachodzi bowiem $\xi|\psi''(\xi)|/\psi'(\xi) \leq 2$ oraz $\vartheta_\lambda < \frac{\pi}{2}$. Drugi warunek w (4.1) jest potrzebny do bezwzględnej zbieżności całki w (4.2). Warunek (4.1) jest zatem spełniony dla wszystkich procesów stabilnych ($\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$), procesów relatywistycznych ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi + m^2} - m$, a także $\psi(\xi) = \sqrt[\alpha]{\xi + m^\alpha} - m$), mieszanek procesów stabilnych ($\psi(\xi) = \xi^\alpha + c\xi^\beta$), procesu wariancji gamma ($\psi(\xi) = \log(1+\xi)$), geometrycznych procesów α -stabilnych ($\psi(\xi) = \log(1 + \xi^{\alpha/2})$) oraz wielu innych procesów rozważanych w literaturze. Procesy niespełniające (4.1) to m.in. nieregularny przykład wspomniany w rozdz. 2.5 (dla którego supremum w (4.1) jest równe 2), podporządkowane ruchy Browna związane z iterowanymi subordinatorami gamma ($\psi(\xi) = \log(1 + \log(1 + \xi))$), dla którego całka w (4.1) jest niezbieżna) oraz złożone procesy Poissona.

W artykule [B] podano dowód tw. 4.1 przy nieco bardziej ograniczającym warunku

$$(4.3) \quad \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi|\psi''(\xi)|}{\psi'(\xi)} < 1 \quad \text{oraz} \quad \limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\xi|\psi''(\xi)|}{\psi'(\xi)} < 1.$$

zamiast (4.1). Zauważmy, że warunek (4.3) spełniony jest dla wszystkich podanych wyżej przykładów procesów spełniających (4.1) z wyjątkiem geometrycznych procesów α -stabilnych ($\psi(\xi) = \log(1 + \xi^{\alpha/2})$). Warunek (4.3) można interpretować jako wymaganie co najmniej potęgowego wzrostu ψ w nieskończoności i co najmniej potęgowego zaniku w 0, przy założeniu np. regularnej zmienności ψ w ∞ i 0.

Dowód przedstawiony w [B] wykorzystuje bezpośrednio tw. 2.10. Na mocy tw. Fubini, dla $f(x) = e^{-\varepsilon x}$ ($\varepsilon > 0$) zachodzi

$$\begin{aligned} P_t^{(0,\infty)} f(x) &= \frac{2}{\pi} \Pi^* \left(e^{-t\psi(\lambda^2)} \Pi f(\lambda) \right) (x) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\psi(\lambda^2)} \left(\int_0^\infty f(x) F_\lambda(x) dx \right) F_\lambda(x) d\lambda. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$(4.4) \quad \int_0^\infty p_t^{(0,\infty)}(x, y) e^{-\varepsilon y} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\psi(\lambda^2)} \mathcal{L}F_\lambda(\varepsilon) F_\lambda(x) d\lambda.$$

Przy założeniu (4.3) $F_\lambda(x/\lambda)$ spełnia warunek Höldera na \mathbf{R} , jednostajnie względem $\lambda > 0$ (zob. lemat 2.9(a)), przez co istnieją stałe $C, \beta > 0$ takie, że $F_\lambda(x) \leq C(\lambda x)^\beta$ dla $\lambda, x > 0$. Dzięki temu można skorzystać z tw. o zbieżności zmajoryzowanej przy przejściu granicznym $\varepsilon \rightarrow 0^+$ w (4.4). Stąd otrzymuje się (4.2).

Dowód tw. 4.1 w pełnej ogólności zawarty jest w pracy [49] i wykorzystuje nieco inną technikę. Odwołuje się ona do wzoru Baxtera-Donskera ([7], *Theorem 1*), który w przypadku procesu symetrycznego o wykładniku Lévy'ego-Chinczyna $\psi(\xi^2)$ ma postać

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi x - \eta t} \mathbf{P}_0(M_t \in dx) dt = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \exp \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \log(\eta + \psi(\zeta^2))}{\xi^2 + \zeta^2} d\zeta \right)$$

dla $\xi, \eta > 0$.

Wzór (4.2) przedstawia rozkład funkcjonału supremum za pomocą skomplikowanej, lecz jawnej całki. Dzięki temu jest on użyteczny w obliczeniach numerycznych i uzyskiwaniu numerycznych oszacowań dystrybuanty i gęstości rozkładu τ_x (zob. rys. 3 oraz [49]).

Jawne reprezentacje rozkładu funkcjonału supremum były wcześniej znane tylko dla szczególnych procesów Lévy'ego. W przypadku ruchu Browna ($\psi(\xi) = \xi$) z zasady odbicia wiadomo, że $\mathbf{P}_0(M_t \geq x) = 2\mathbf{P}_0(X_t > x)$. Dla procesu Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi}$) wzór na rozkład M_t znalazł Darling w 1956 [18] (w artykule [A] wzór Darlinga jest wyprowadzony z reprezentacji (4.2)). Obustronny proces Poissona (o skokach ± 1) był rozważany przez Baxtera i Donskera [7]. Jednostronny proces Poissona (o skokach 1 albo o skokach -1) z dryfem rozważali Pyke [52] oraz Gani i Prabhu [27]. Przez ponad 50 kolejnych lat teoria fluktuacji była intensywnie rozwijana, lecz uzyskane wtedy jawne wzory dotyczyły jedynie transformaty Laplace'a (często względem obu zmiennych t, x) funkcji $\mathbf{P}_0(M_t \geq x)$. Dopiero rok temu Hubalek i Kuznetsov otrzymali w artykule [32] reprezentację szeregową dystrybuanty M_t dla niesymetrycznych procesów α -stabilnych (por. [30, 44]). Tw. 2.10 jest pierwszym wynikiem w tej serii, który obejmuje tak szeroką klasę (symetrycznych) procesów Lévy'ego.

Warto podkreślić, że niektóre wnioski z tw. 2.10 udało się później udowodnić innymi, dużo ogólniejszymi metodami, które objęły szerszą klasę symetrycznych, a czasem również niesymetrycznych procesów Lévy'ego. Znalaziono m.in. wzór na $\mathbf{E}_0 e^{-\xi M_t}$ dla symetrycznych procesów oraz oszacowania $\mathbf{P}_0(M_t < x)$ dla ogólnych procesów Lévy'ego. Te wyniki zostały zebrane w artykule [48].

4.2. Prawdopodobieństwo przejścia na półprostej. Innym wnioskiem z tw. 2.10 jest wzór na prawdopodobieństwo przejścia na półprostej. Gdy P_t^D są operatorami zwartymi, np. gdy D jest odcinkiem, to z klasycznej teorii spektralnej wynika wzór

$$p_t^D(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(y),$$

gdzie jak zwykle λ_n i φ_n to wartości i (unormowane w $L^2(D)$) funkcje własne operatora $-\mathcal{A}_D$. Analogiczny wynik prawdziwy jest dla $p_t^{(0, \infty)}(x, y)$, jeśli sumę zastąpić całką. Dowód poniższego twierdzenia polega na zastosowaniu tw. Fubiniego do rozwinięcia w układzie uogólnionych funkcji własnych operatora $P_t^{(0, \infty)}$.

TWIERDZENIE 4.2 ([B], *Theorem 1.7*). Niech $t > 0$. Załóżmy, że spełnione są warunki 1.5(a)–(c) i ponadto $e^{-t\psi(\xi^2)}$ jest całkowaną funkcją $\xi > 0$. Wówczas

$$(4.5) \quad p_t^{(0, \infty)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t\psi(\lambda^2)} F_\lambda(x) F_\lambda(y) d\lambda \quad (x, y > 0),$$

gdzie F_λ są funkcjami własnymi z tw. 2.3. Co więcej, równość (4.5) może być różniczkowana względem t pod znakiem całki.

Gdy X_t jest ruchem Browna, powyższy wynik można zredukować do dobrze znanego wzoru na $p_t^{(0, \infty)}(x, y)$ (zob. przykł. 1.2). Również w przypadku procesu Cauchy'ego wzór (4.5) można istotnie uprościć. Wykorzystuje się w tym celu własności transformacji $\psi \mapsto \psi^\dagger$. Głównym autorem dowodu poniższego twierdzenia jest T. Kulczycki.

TWIERDZENIE 4.3 ([A], *Theorem 4*). Dla procesu Cauchy'ego ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi}$) zachodzi

$$(4.6) \quad p_t^{(0, \infty)}(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + (x - y)^2} - \frac{1}{xy} \int_0^t \frac{f(\frac{s}{x}) f(\frac{t-s}{y})}{\frac{s}{x} + \frac{t-s}{y}} ds \quad (t, x, y > 0),$$

gdzie

$$f(s) = \frac{1}{\pi} \frac{s}{1 + s^2} \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(s + w)}{1 + w^2} dw\right) \quad (s > 0).$$

Dla ogólniejszych procesów, nawet dla procesów α -stabilnych, podobne uproszczenie wzoru (4.5) wydaje się niemożliwe. Mimo to (4.5) oraz (4.6) są pierwszymi jawnymi wzorami na prawdopodobieństwo przejścia skokowego procesu Lévy'ego zabitego przy wyjściu ze zbioru otwartego i możliwe wydają się obliczenia numeryczne wykorzystujące te reprezentacje.

4.3. Równania różniczkowe cząstkowe ([B], **rozdz. 7**). W artykule [A] związek zagadnienia własnego dla operatorów $P_t^{(0, \infty)}$ i $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$ z dwuwymiarowym zagadnieniem własnym dla operatora Laplace'a został wykorzystany do wyprowadzenia wzoru na funkcje własne F_λ . Podobny związek istnieje w ogólnym przypadku, rozważanym w [B], jeśli operator Laplace'a zastąpi się odpowiednim operatorem eliptycznym. Fakt ten nie jest jednak wykorzystany w dowodzie tw. 2.10 w artykule [B]. Zatem inaczej niż w [A], wyniki dotyczące dwuwymiarowych operatorów różniczkowych są tutaj wnioskiem z teorii spektralnej operatorów $P_t^{(0, \infty)}$ i $\mathcal{A}_{(0, \infty)}$.

Twierdzenie 4.4 ([B], *Theorem 7.1*). Niech $a(y)$ będzie dodatnią funkcją ciągłą na $(0, \infty)$, taką że $1/a$ jest funkcją całkowalną na $(0, 1)$, lecz nie na $(1, \infty)$. Dla $\lambda \geq 0$ niech $g_\lambda(y) = g(\lambda, y)$ będzie (jedynym) nieujemnym, niemalejącym i ciągłym rozwiązaniem równania $a(y)g_\lambda''(y) = \lambda g_\lambda(y)$ ($y > 0$), które spełnia warunek początkowy $g_\lambda(0) = 1$. Określmy $\psi(\lambda) = g_\lambda'(0)$ i niech F_λ będzie funkcją z tw. 2.3 dla zupełnej funkcji Bernsteina ψ . Niech wreszcie

$$(4.7) \quad u_\lambda(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(g(\xi^2, y)\mathcal{F}F_\lambda(\xi))(x) \quad (x \in \mathbf{R}, y \geq 0),$$

gdzie odwrotna transformata Fouriera \mathcal{F}^{-1} dotyczy zmiennej ξ . Wówczas u_λ jest ciągłą i ograniczoną funkcją zmiennych $x \in \mathbf{R}$ i $y \geq 0$, dwukrotnie różniczkowalną względem $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$, i ponadto

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2}(x, y) + a(y) \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2}(x, y) = 0 & (x \in \mathbf{R}, y > 0); \\ u_\lambda(x, 0) = 0 & (x < 0); \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial y}(x, 0) = -\psi(\lambda^2)u_\lambda(x, 0) & (x > 0). \end{cases}$$

Funkcja ψ określona w twierdzeniu zawsze jest zupełną funkcją Bernsteina. Co więcej, jeśli odpowiednio osłabić założenia dotyczące a , w ten sposób można uzyskać dowolną zupełną funkcję Bernsteina. Jest to tzw. odpowiedniość Kreĭna (zob. [40, 57]).

Niewiele jest znanych jawnie par wzajemnie sobie odpowiadających funkcji a i ψ . Dla $a(y) = (1 + 2my)^{-1}$ otrzymuje się $\psi(\xi) = \sqrt{\xi + m^2} - m$, zupełną funkcję Bernsteina odpowiadającą procesowi relatywistycznemu (zob. poniżej). Zupełną funkcją Bernsteina odpowiadającą $a(y) = cy^{2-2/\alpha}$ ($\alpha \in (0, 2)$) dla odpowiedniego $c > 0$ jest $\psi(\xi) = \xi^{\alpha/2}$, związana z procesem α -stabilnym. Kilka innych przykładów można znaleźć w [57].

4.4. Proces relatywistyczny na odcinku. Opracowany w artykułach [A] i [C] schemat znajdowania dwuczłonowego wzoru asymptotycznego na wartości własne operatorów P_t^D i \mathcal{A}_D dla odcinka D wydaje się dość ogólny. Jego wykorzystanie do ustalonego procesu spełniającego warunki 1.5(a)–(c) sprowadza się do kilku (czasem bardzo technicznych) oszacowań funkcji G_λ i jej pochodnych oraz gęstości miary Lévy'ego. Przykładem zastosowania, potwierdzającym ogólność tej metody, jest nowa praca [36], w której badany jest proces relatywistyczny ($\psi(\xi) = \sqrt{\xi + m^2} - m$). Dodatkowo znalezione w [36] oszacowania są jednostajne względem rozmiaru odcinka D i parametru m (dzięki skalowaniu wystarcza jednostajność względem jednej z tych zmiennych). Są one też dostatecznie dokładne, by udowodnić jednokrotność wartości własnych.

Operator \mathcal{A}_D ma związek z interesującym zagadnieniem quasi-relatywistycznej cząstki w pudełku. Mianowicie w jednym z modeli relatywistycznej mechaniki kwantowej operator $-\mathcal{A}_D$ jest hamiltonianem cząstki o masie m w polu elektrostatycznym zadanym przez potencjał równy 0 w D i nieskończony w dopełnieniu D .

4.5. Wielowymiarowy proces α -stabilny. Jak niedawno wykazali Frank i Geisinger [25], jednowymiarowa teoria spektralna dla półprostej ma zastosowanie również do d -wymiarowych procesów α -stabilnych. Przed opisem tego rezultatu, przypomnijmy niektóre wcześniejsze wyniki. Wzór Blumenthala i Getoora (1.11) dla procesów α -stabilnych w \mathbf{R}^d przyjmuje postać

$$\lambda_n = c_{d,\alpha} \left(\frac{n}{|D|} \right)^{\alpha/d} + o(n^{\alpha/d}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

gdzie $c_{d,\alpha}$ jest odpowiednią stałą. Naturalne jest pytanie o dwuczłonowy wzór na λ_n , podobny do (3.1). Dla ruchu Browna ($\psi(\xi) = \xi$) odpowiedzi udzielił Ivrii w 1980: jeśli D jest dostatecznie regularny, to (zob. [33])

$$(4.8) \quad \lambda_n = c_d \left(\frac{n}{|D|} \right)^{2/d} + \tilde{c}_d \frac{|\partial D|}{|D|^{(d-1)/d}} \left(\frac{n}{|D|} \right)^{2/d-1} + o(n^{2/d-1}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

gdzie c_d, \tilde{c}_d są pewnymi stałymi, a $|\partial D|$ oznacza $(d-1)$ -wymiarową miarę powierzchniową brzegu zbioru D . Nie jest znany dowód dokładnego odpowiednika wzoru Ivrii dla procesów α -stabilnych z parametrem $\alpha \in (0, 2)$, niedawno jednak otrzymano wyniki częściowe. W artykułach [4, 6] Bañuelos, Kulczycki i Siudeja uzyskali wzór asymptotyczny podobny do (4.8), w którym po lewej stronie znajduje się ślad operatora P_t^D , tj. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n}$. Później Frank i Geisinger [25] poprawili ten wynik, dowodząc, że dla procesu α -stabilnego w \mathbf{R}^d zabitego w chwili wyjścia z odpowiednio regularnego zbioru D zachodzi

$$(4.9) \quad \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} = \frac{d}{d+\alpha} c_{d,\alpha} \left(\frac{n}{|D|} \right)^{\alpha/d} + \frac{d-\alpha}{d} \tilde{c}_{d,\alpha} \frac{|\partial D|}{|D|^{(d-1)/d}} \left(\frac{n}{|D|} \right)^{\alpha/d-1} + o(n^{\alpha/d-1})$$

gdy $n \rightarrow \infty$, dla odpowiedniej stałej $\tilde{c}_{d,\alpha}$.

Dowód wzoru (4.9) w pracy [25] polega na zredukowaniu wyjściowego problemu do odpowiedniego zagadnienia dla jednowymiarowego relatywistycznego procesu α -stabilnego ($\psi(\xi) = (\xi + 1)^{\alpha/2} - 1$) zabitego w chwili wyjścia z półprostej. Wykorzystując wyniki artykułu [B] dotyczące operatorów przejścia takich procesów, autorzy [25] dowodzą potrzebnych im oszacowań. Jednym z wniosków jest jawny opis stałej $\tilde{c}_{d,\alpha}$ przy pomocy funkcji F_λ .

4.6. Teoria spektralna dla dopełnienia punktu. K. Bogdan i K. Yano zasugerowali badanie teorii spektralnej operatorów przejścia procesu X_t zabitego w chwili trafienia w ustalony punkt, np. w 0. Możliwe okazało się uzyskanie wyników analogicznych do teorii dla półprostej, omówionej w rozdziale 2 (zob. [47]). Metody są bardzo podobne do tych z artykułu [B], lecz nie wymagają zastosowania metody Wienera-Hopfa. Dzięki temu dowody są przeważnie istotnie krótsze, a sformułowania twierdzeń ogólniejsze. Wyjątkiem jest twierdzenia o rozwinięciu w układzie uogólnionych funkcji własnych, którego dowód wymaga istotnie nowych elementów. Podobnie jak teoria spektralna na półprostej pozwala opisać rozkład czasu przejścia przez barierę, za pomocą funkcji własnych w $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ można wyrazić rozkład czasu trafienia procesu w punkt.

Literatura

- [1] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *The Cauchy process and the Steklov problem*. J. Funct. Anal. 211(2) (2004): 355–423.
- [2] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *Eigenvalue gaps for the Cauchy process and a Poincaré inequality*. J. Funct. Anal. 234 (2006): 199–225.
- [3] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *Spectral gap for the Cauchy process on convex symmetric domains*. Comm. Partial Diff. Equations 31 (2006): 1841–1878.
- [4] R. Bañuelos, T. Kulczycki, *Trace estimates for stable processes*. Probab. Theory Relat. Fields 142(3-4) (2009): 313–338.

- [5] R. Bañuelos, T. Kulczycki, P. Méndez-Hernández, *On the shape of the ground state eigenfunction for stable processes*. Potential Anal. 24 (2006): 205–221.
- [6] R. Bañuelos, T. Kulczycki, B. Siudeja, *On the trace of symmetric stable processes on Lipschitz domains*. J. Funct. Anal. 257(10) (2009): 3329–3352.
- [7] G. Baxter, M. D. Donsker, *On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments*. Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957): 73–87.
- [8] J. Bertoin, *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Melbourne-New York, 1998.
- [9] R. M. Blumenthal, R. K. Gettoor, *The asymptotic distribution of the eigenvalues for a class of Markov operators*. Pacific J. Math. 9(2) (1959): 399–408.
- [10] R. M. Blumenthal, R. K. Gettoor, *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, Reading, MA, 1968.
- [11] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Potential theory for the α -stable Schrödinger operator on bounded Lipschitz domains*. Studia Math. 133(1) (1999): 53–92.
- [12] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Potential theory of Schrödinger operator based on fractional Laplacian*. Probab. Math. Statist. 20(2) (2000): 293–335.
- [13] K. Bogdan, T. Byczkowski, T. Kulczycki, M. Ryznar, R. Song, Z. Vondracek, *Potential Analysis of Stable Processes and its Extensions*. Lecture Notes in Mathematics 1980, Springer, 2009.
- [14] Z. Q. Chen, R. Song, *Intrinsic ultracontractivity and conditional gauge for symmetric stable processes*. J. Funct. Anal. 150(1) (1997): 204–239.
- [15] Z. Q. Chen, R. Song, *Two sided eigenvalue estimates for subordinate Brownian motion in bounded domains*. J. Funct. Anal. 226 (2005): 90–113.
- [16] Z. Q. Chen, R. Song, *Continuity of eigenvalues of subordinate processes in domains*. Math. Z. 252 (2006): 71–89.
- [17] K. L. Chung, J. B. Walsh, *Markov processes, Brownian motion, and time symmetry*. Second edition, Springer, 2005.
- [18] D. A. Darling, *The maximum of sums of stable random variables*. Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956): 164–169.
- [19] E. B. Davies, *Heat Kernels and Spectral Theory*. Cambridge Tracts in Mathematics 92, Cambridge University Press, 1989.
- [20] R. D. DeBlassie, *Higher order PDE's and symmetric stable processes*. Probab. Theory Related Fields 129 (2004): 495–536.
- [21] R. D. DeBlassie, P. J. Méndez-Hernández, *α -continuity properties of the symmetric α -stable process*. Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007): 2343–2359.
- [22] B. Dyda, *Fractional calculus for power functions*. Preprint, 2011, arXiv:1103.3387v2.
- [23] B. Dyda, T. Kulczycki, *Spectral gap for stable process on convex double symmetric domains*. Potential Anal. 27 (2007): 101–132.
- [24] D. W. Fox, J. R. Kuttler, *Sloshing frequencies*. Z. Angew. Math. Phys. 34 (1983): 668–696.
- [25] R. L. Frank, L. Geisinger, *Refined semiclassical asymptotics for fractional powers of the Laplace operator*. Preprint, 2011, arXiv:1105.5181v1.
- [26] K. O. Friedrichs, H. Lewy, *The dock problem*. Commun. Pure Appl. Math. 1 (1948): 135–148.
- [27] J. Gani, N. J. Prabhu, *The time-dependent solution for a storage model with Poisson input*. J. Math. Mech. 8 (1959): 653–664.

- [28] R. K. Gettoor, *Markov operators and their associated semi-groups*. Pacific J. Math. 9(2) (1959): 449–472.
- [29] I. C. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of linear operators. Vol. 1*. Birkhäuser, 1990.
- [30] P. Graczyk, T. Jakubowski, *On exit time of stable processes*. Stochastic Process. Appl. 122(1) (2012): 31–41.
- [31] R. L. Holford, *Short surface waves in the presence of a finite dock. I, II*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964): 957–983, 985–1011.
- [32] F. Hubalek, A. Kuznetsov, *A convergent series representation for the density of the supremum of a stable process*. Elect. Comm. Probab. 16 (2011): 84–95.
- [33] V. Ja. Ivrii, *The second term of the spectral asymptotics for the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary and for elliptic operators acting in vector bundles*. Soviet Math. Dokl. 20(1) (1980): 1300–1302.
- [34] K. Kaleta, T. Kulczycki, *Intrinsic ultracontractivity for Schrödinger operators based on fractional Laplacians*. Potential Anal. 33(4) (2010): 313–339.
- [35] K. Kaleta, *Spectral gap lower bound for the one-dimensional fractional Schrödinger operator in the interval*. Preprint, 2011, arXiv:1104.3502v2.
- [36] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, J. Małecki, *One-dimensional quasi-relativistic particle in the box*. Preprint, 2011, arXiv:1110.5887v1.
- [37] K. Kaleta, J. Lőrinczi, *Fractional $P(\phi)_1$ -processes and Gibbs measures*. Preprint, 2011, arXiv:1011.2713v2.
- [38] P. Kim, R. Song, Z. Vondraček, *Potential theory of subordinate Brownian motions revisited*. W: T. Zhang, X. Zhou (Eds.), *Stochastic Analysis and Applications to Finance, Essays in Honour of Jia-an Yan*, Interdisciplinary Mathematical Sciences 13, World Scientific, Singapore, 2012, w druku.
- [39] P. Kim, R. Song, Z. Vondraček, *Two-sided Green function estimates for killed subordinate Brownian motions*. Proc. London Math. Soc. (2012), w druku.
- [40] S. Kotani, S. Watanabe, *Krein's spectral theory of strings and generalized diffusion processes*. W: *Functional analysis in Markov processes* (Katata/Kyoto, 1981): 235–259, Lecture Notes in Math. 923, Springer, Berlin, 1982.
- [41] M. G. Kreĭn, *Integral equations on a half-line with kernel depending upon the difference of the arguments*. Transl. Amer. Math. Soc. (2) 22 (1962): 163–288. (Translated from Uspekhi Mat. Nauk 13(5) (1958): 3–120.)
- [42] T. Kulczycki, *Intrinsic ultracontractivity for symmetric stable processes*. Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46(3) (1998): 325–334.
- [43] T. Kulczycki, B. Siudeja, *Intrinsic ultracontractivity of Feynman-Kac semigroup for relativistic stable processes*. Trans. Amer. Math. Soc. 358(11) (2006): 5025–5057.
- [44] A. Kuznetsov, *On extrema of stable processes*. Ann. Probab. 39(3) (2011): 1027–1060.
- [45] M. Kwaśnicki, *Intrinsic ultracontractivity for stable semigroups on unbounded open sets*. Potential Anal. 31(1) (2009): 57–77.
- [46] M. Kwaśnicki, *Eigenvalues of the Cauchy process on an interval have at most double multiplicity*. Semigroup Forum 79(1) (2009): 183–192.
- [47] M. Kwaśnicki, *Spectral theory for one-dimensional symmetric Lévy processes killed upon hitting the origin*. Preprint, 2011, arXiv:1110.5894v2.
- [48] M. Kwaśnicki, J. Małecki, M. Ryznar, *Suprema of Lévy processes*. Ann. Probab., w druku.

- [49] M. Kwaśnicki, J. Małecki, M. Ryznar, *First passage times for subordinate Brownian motions*. Preprint, 2011, arXiv:1110:0401v2.
- [50] S. A. Molchanov, E. Ostrowskiĭ, *Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes*. Theor. Prob. Appl. 14(1) (1969): 128–131.
- [51] T. Poerschke, G. Stolz, J. Weidmann, *Expansions in generalized eigenfunctions of selfadjoint operators*. Math. Z. 202(3) (1989): 397–408.
- [52] R. Pyke, *The supremum and infimum of the Poisson Process*. Ann. Math. Stat. 30(2) (1959): 568–576.
- [53] M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*. Acta Sci. Math. Szeged, 1938.
- [54] L. C. G. Rogers, *Wiener-Hopf Factorization of Diffusions and Lévy Processes*. Proc. London Math. Soc. 47 (1983): 177–191.
- [55] K. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [56] R. Schilling, *Subordination in the sense of Bochner and a related functional calculus*. J. Austral. Math. Soc. (Series A) 64 (1998): 368–396.
- [57] R. Schilling, R. Song, Z. Vondraček, *Bernstein Functions: Theory and Applications*. De Gruyter, Studies in Math. 37, Berlin, 2010.
- [58] B. Simon, *Schrödinger semigroups*. Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. 7(3) (1982): 447–526.
- [59] R. Song, Z. Vondraček, *Potential theory of special subordinators and subordinate killed stable processes*. J. Theoret. Probab. 19(4) (2006): 817–847.
- [60] R. Song, Z. Vondraček, *On the relationship between subordinate killed and killed subordinate process*. Electron. Comm. Probab. 13 (2008): 325–336.
- [61] F. Spitzer, *A combinatorial lemma and its application to probability theory*. Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956): 323–339.
- [62] F. Spitzer, *Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion*. Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958): 187–197.
- [63] M. M. Vainberg, *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*. Wiley, New York, 1973.
- [64] N. Wiener, E. Hopf, *Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen*. Sitzungber. Akad. Wiss. Berlin (1931): 696–706. (Reprinted in *Norbert Wiener: Collected Works*, Vol. 3, MIT Press, Cambridge, Mass., 1981.)
- [65] A. Zoia, A. Rosso, M. Kardar, *Fractional Laplacian in bounded domains*. Phys. Rev. E 76 (2007) 061121.