Zadanie o mnożeniu i dzieleniu

Mateusz Kwaśnicki
Politechnika Wrocławska

Wykład habilitacyjny
Warszawa, 25 października 2012

Plan wykładu:

- Sformułowanie zadania MD
- Sylwetka autora, prof. Clarka Kimberlinga
- Szkic rozwiązania

Sformułowanie

Zadanie MD

Ciąg mnożenia-dzielelnia (MD) dany jest wzorami:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor & \text{jeśli } \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor \notin \{0, a_1, \ldots, a_n\}, \\ 3a_n & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Pierwsze wyrazy tego ciągu to 1, 3, 9, 4, 2, 6, 18, 54, 27, 13, 39, 19, 57, 28, 14, 7, 21.

Czy ciąg MD jest permutacją zbioru liczb naturalnych?

Powyższe zadanie postawił prof. Clark Kimberling w *Crux Mathematicorum* **26** (2000), zad. 2248.

Uogólnienie

Uogólnione zadanie MD

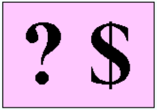
Niech m, d będą liczbami naturalnymi. Określmy:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a_n}{d} \right\rfloor & \text{jeśli } \left\lfloor \frac{a_n}{d} \right\rfloor \notin \{0, a_1, \ldots, a_n\}, \\ m a_n & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla jakich liczb m oraz d ciąg (a_n) jest permutacją zbioru liczb naturalnych?

Rozwiązanie zostało opublikowane 4 lata później w *Crux Mathematicorum* **30** (2004), s. 245–239.

Unsolved Problems and Rewards



Stated below are a few challenging problems. If you are first to publish a solution, let me know, and collect your reward! Or, if you find a short solution and you are *quite sure* it is correct and complete, send it to ck6@evansville.edu. If accepted, your proof will be published on this site - see, for example, Problem 8.

---

5. The MD Problem (M=Multiply, D=Divide)

Reward: $100.00 (Paid).

SOLVED by Mateusz Kwasnicki, January 2004

Let $a_1 = 1$, and for $n > 1$, define $a_n = [a_{n-1}/2]$ if this number is not in the set $\{0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, and $a_n = 3a_{n-1}$ otherwise.

Does every positive integer occur exactly once in this sequence?

The problem originates in

C. Kimberling, Problem 2248, *Crux Mathematicorum* 26 (2000) 238; [no solutions received: 27 (2001) 345].

In the statement of the problem, the notation [x] means "the greatest integer that is <= x". Thus, the sequence (a_n) is generated by repeatedly multiplying by 3 and dividing by 2.

The MD sequence defined above begins like this: 1, 3, 9, 4, 2, 6, 18, 54, 27, 13, 39, 19, 57, 28, 14, 7, . . .

You can obtain another MD sequence by using 2 as multiplier and 3 as divisor:

1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 32, 64, 21, 7, 14, 28, 9, 18, 36, . . .

Or, let m and d be *any* two relatively prime integers greater than 1. Does the resulting MD sequence contain every positive integer exactly once?

Mateusz Kwasnicki of Wroclaw University of Technology solved the MD problem in general and in the affirmative. See *Crux Mathematicorum* 30 (2004) 235-239.

Sylwetka

Clark Kimberling
University of Evansville
Indiana, USA

Zainteresowania naukowe:

- geometria elementarna, przede wszystkim własności trójkątów
  - twórca definicji *punktu środkowego trójkąta*
  - autor książki *Triangle Centers and Central Triangles* (1998)
  - twórca *Encyklopedii punktów środkowych trójkątów*
- elementarna teoria liczb
  - własności ciągów i tablic liczb
  - autor wielu nietypowych elementarnych problemów
  - fundator nagród za wiele z nich

Sylwetka

Clark Kimberling
University of Evansville
Indiana, USA

Zainteresowania pozanaukowe:

- muzyka
  - studiował kompozycję muzyki
  - był organistą w Baton Rouge (Luizjana) i w Denton (Teksas)
  - autor wielu nut na flet prosty i poprzeczny
- studia biograficzne (matematycy, nauczyciele, pisarze, artyści)

Twierdzenie

Uogólniony ciąg MD:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a_n}{d} \right\rfloor & \text{jeśli } \left\lfloor \frac{a_n}{d} \right\rfloor \notin \{0, a_1, \ldots, a_n\}, \\ m a_n & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

jest permutacją zbioru liczb naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy $\log_d m = \frac{\ln m}{\ln d}$ jest niewymierny, tj. $m^a \neq d^b$ dla wszystkich a, b naturalnych.

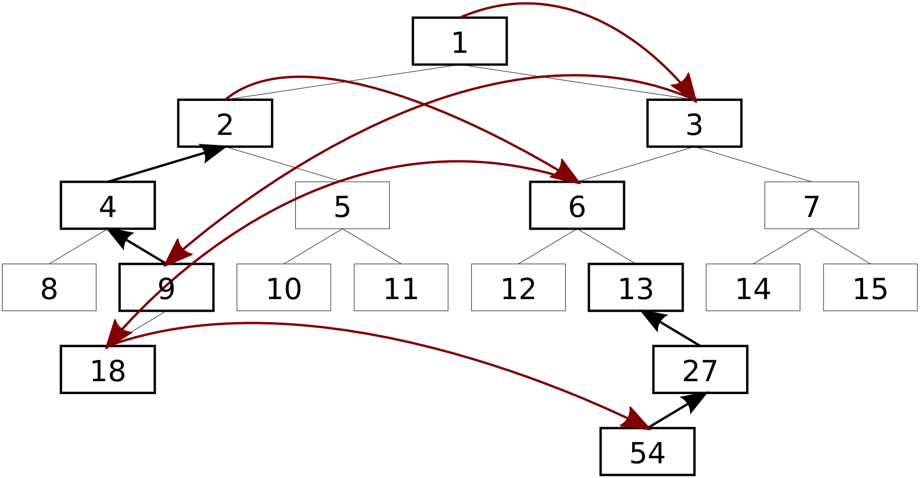
Dowód składa się z dwóch części:

(I) **ciąg (a_n) jest różnowartościowy**;

(II) ciąg (a_n) wyczerpuje zbiór liczb naturalnych.

Dla uproszczenia rozważamy $m = 3$, $d = 2$.

Część I



Część I

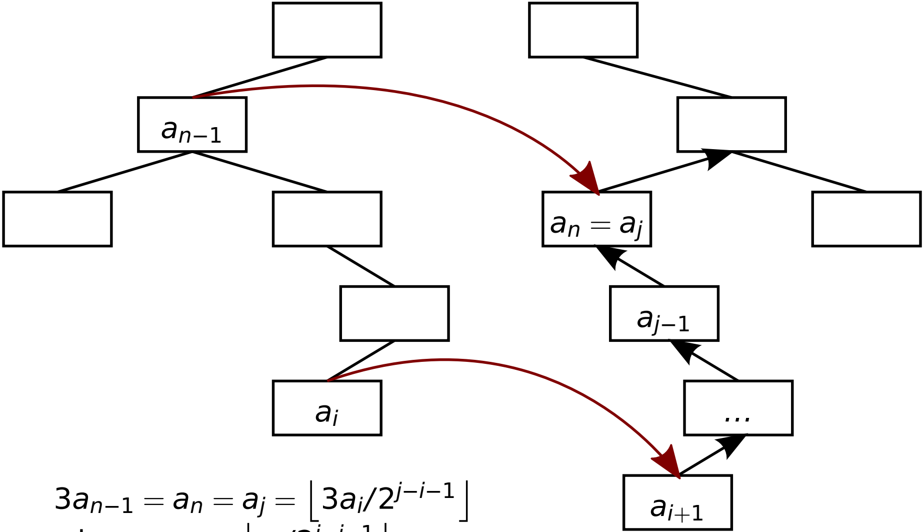
Przypomnienie

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor & \text{jeśli } \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor \notin \{0, a_1, \ldots, a_n\} \\ 3a_n & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- Przypuśćmy, że $a_n = a_j$ dla pewnych $j < n$.
- Niech n będzie najmniejszą liczbą o tej własności.
- Wobec minimalności n zachodzi $a_n = 3a_{n-1}$
- Niech $i < j$ będzie takie, że

$$a_{i+1} = 3a_i, \quad a_{i+2} = \left\lfloor \frac{a_{i+1}}{2} \right\rfloor, \ldots, a_j = \left\lfloor \frac{a_{j-1}}{2} \right\rfloor.$$

Część I



$3a_{n-1} = a_n = a_j = \left\lfloor 3a_i / 2^{j-i-1} \right\rfloor$

więc: $a_{n-1} = \left\lfloor a_i / 2^{j-i-1} \right\rfloor$

Część I

Przypomnienie

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor & \text{jeśli } \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor \notin \{0, a_1, \ldots, a_n\} \\ 3a_n & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- Podsumujmy: $a_{n-1} = \left\lfloor a_i/2^{j-i-1} \right\rfloor$ oraz $i < n-1$.
- Ponieważ $a_{i+1} = 3a_i$, więc $\left\lfloor \frac{a_i}{2} \right\rfloor \in \{0, a_1, \ldots, a_i\}$.
- $\left\lfloor \frac{a_i}{4} \right\rfloor$ albo następuje bezpośrednio po $\left\lfloor \frac{a_i}{2} \right\rfloor$, albo wystąpiło wcześniej, albo jest równe zero.
- Tak czy inaczej, $\left\lfloor \frac{a_i}{4} \right\rfloor \in \{0, a_1, \ldots, a_i\}$.
- Indukcyjnie: $\left\lfloor \frac{a_i}{2^k} \right\rfloor \in \{0, a_1, \ldots, a_i\}$ $(k \geq 0)$.
- Zatem a_{n-1} wystąpiło wcześniej w ciągu.
- Sprzeczność z minimalnością n.

Twierdzenie

Uogólniony ciąg MD:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a_n}{d} \right\rfloor & \text{jeśli } \left\lfloor \frac{a_n}{d} \right\rfloor \notin \{0, a_1, \ldots, a_n\}, \\ m a_n & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

jest permutacją zbioru liczb naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy $\log_d m = \frac{\ln m}{\ln d}$ jest niewymierny, tj. $m^a \neq d^b$ dla wszystkich a, b naturalnych.

Dowód składa się z dwóch części:

(I) ciąg (a_n) jest różnowartościowy;

(II) **ciąg (a_n) wyczerpuje zbiór liczb naturalnych**.

Dla uproszczenia rozważamy $m = 3$, $d = 2$.

Część II

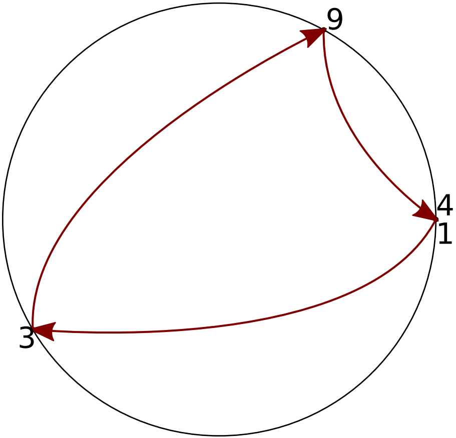
Przypomnienie

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor & \text{jeśli } \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor \notin \{0, a_1, \ldots, a_n\} \\ 3a_n & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

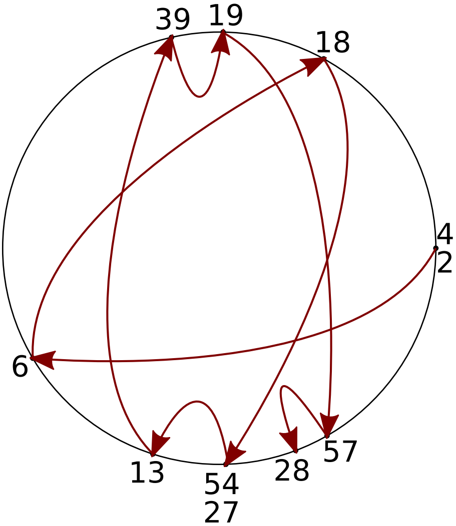
- Niech $x_n = \log_2 a_n$.
- Oznaczmy $\langle x \rangle = e^{2\pi i x}$.
- Jeśli $a_{n+1} = 3a_n$, to $\langle x_{n+1} \rangle = \langle x_n + \alpha \rangle$, gdzie $\alpha = \log_2 3$.
- Jeśli zaś $a_{n+1} = \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor$, to $\langle x_{n+1} \rangle = \langle x_n \rangle$ lub

$$\langle x_{n+1} \rangle = \left\langle x_n + \log_2\left(1 - \frac{1}{a_n}\right) \right\rangle.$$

Część II



Część II



Część II

Przypomnienie

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor & \text{jeśli } \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor \notin \{0, a_1, \ldots, a_n\} \\ 3a_n & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$x_n = \log_2 a_n$$

- Niech n_k będzie rosnącym ciągiem wszystkich n, dla których $a_{n+1} = 3a_n$.
- Wówczas $a_{n_{k+1}} = \left\lfloor \dfrac{3a_{n_k}}{2^{n_{k+1}-n_k-1}} \right\rfloor$.
- Wobec tego $\langle x_{n_{k+1}} \rangle = \langle x_{n_k} + \alpha + \varepsilon_k \rangle$, gdzie

$$0 \geq \varepsilon_k > \log_2 \left(1 - \frac{1}{a_{n_{k+1}}} \right).$$

Część II

Przypomnienie

$$x_n = \log_2 a_n$$

$$\langle x_{n_{k+1}} \rangle = \langle x_{n_k} + \alpha + \varepsilon_k \rangle$$

$$0 \geq \varepsilon_k \geq \log_2 \left(1 - \frac{1}{a_{n_{k+1}}} \right)$$

- Ustalmy A. Dowiedziemy, że $a_n = A$ dla pewnego n.
- Niech $J = \left(\langle \log_2(A + \frac{1}{2}) \rangle, \langle \log_2(A + 1) \rangle \right)$ – łuk okręgu.
- Dla pewnego N suma łuków J obróconych o kąty $0, -\alpha, \ldots, -N\alpha$ pokrywa cały okrąg.
- Zatem dla wszystkich x:

$$\left\{ \langle x \rangle, \langle x + \alpha \rangle, \ldots, \langle x + N\alpha \rangle \right\} \cap J \neq \varnothing.$$

Część II

Przypomnienie

$$x_n = \log_2 a_n$$

$$\langle x_{n_{k+1}} \rangle = \langle x_{n_k} + \alpha + \varepsilon_k \rangle$$

$$0 \geq \varepsilon_k \geq \log_2 \left(1 - \frac{1}{a_{n_{k+1}}} \right)$$

$$J = \left(\langle \log_2 (A + \tfrac{1}{2}) \rangle , \langle \log_2 (A+1) \rangle \right)$$

$$\Big\{ \langle x \rangle , \langle x + \alpha \rangle , \ldots , \langle x + N\alpha \rangle \Big\} \cap J \neq \varnothing$$

- Wiemy już, że $a_n \to \infty$, a więc $\varepsilon_k \to 0$.
- Wybierzmy k tak, by $0 \geq \varepsilon_i > \frac{1}{N} \log_2 \frac{A}{A+1/2}$ dla $i \geq k$.
- Dla pewnego $j \in \{0, \ldots, N\}$ zachodzi $\langle x_{n_k} + j\alpha \rangle \in J$.
- Ponadto $0 \geq \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \ldots + \varepsilon_{k+j-1} \geq \log_2 \frac{A}{A+1/2}$.

Część II

Przypomnienie

$$x_n = \log_2 a_n$$

$$\langle x_{n_{k+1}} \rangle = \langle x_{n_k} + \alpha + \varepsilon_k \rangle$$

$$0 \geq \varepsilon_k \geq \log_2 \left(1 - \frac{1}{a_{n_{k+1}}} \right)$$

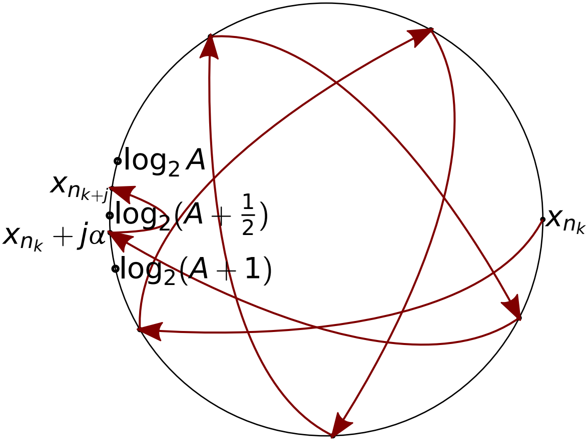
$$J = \left(\langle \log_2(A + \tfrac{1}{2}) \rangle, \langle \log_2(A+1) \rangle \right)$$

$$\langle x_{n_k} + j\alpha \rangle \in J$$

$$0 \geq \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \ldots + \varepsilon_{k+j-1} \geq \log_2 \tfrac{A}{A+1/2}$$

- Otrzymujemy $\langle x_{n_{k+j}} \rangle \in \left[\log_2 A, \log_2(A+1) \right)$.

Część II



Część II

Przypomnienie

$$x_n = \log_2 a_n$$

Wniosek

Dla każdego A istnieje n takie, że

$$\langle x_n \rangle \in \left[\log_2 A, \log_2(A+1)\right).$$

- Otrzymujemy więc $A = \left\lfloor \frac{a_n}{2^k} \right\rfloor$ dla pewnego k.
- Jak w części I: $\left\lfloor \frac{a_n}{2^k} \right\rfloor$ na pewno wystąpi w ciągu: albo jako a_{n+k}, albo wśród $\{0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Korzystałem z:

- *Crux Mathematicorum* **26** (2000) oraz **30** (2004)
- Strona internetowa University of Evansville
  `http://faculty.evansville.edu/ck6/`
- Strona internetowa Mel Bay Publications Inc.
  `http://www.melbay.com/Author/Default.aspx?AuthorId=32571`
- Strona internetowa Kendall Hunt
  `http://math.kendallhunt.com/x6186.html`