Rekurencyjne dowody niewymierności

Mateusz Kwaśnicki
Politechnika Wrocławska

Wykład habilitacyjny
Warszawa, 25 października 2012

Plan wykładu:

- Dowód niewymierności π
- Uogólnienia
- Uwagi historyczne

Niewymierność π

Twierdzenie

Jeśli $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, to $\operatorname{tg} x \notin \mathbb{Q}$.

Dowód (1/2):

- Przypuśćmy, że $x \in \mathbb{Q} \setminus (\pi\mathbb{Z})$, $x = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{c}{d}$.
- Niech $\mathcal{I}_n = \dfrac{b^n d}{n! \sin x} \displaystyle\int_0^x s^n (x-s)^n \sin s \, ds.$
- **Lemat 1**: $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n = 0$.
- **Lemat 2**: $\mathcal{I}_0 = c$, $\qquad \mathcal{I}_1 = 2bc - ad$,
$$\mathcal{I}_n = (4n-2)b\,\mathcal{I}_{n-1} - a^2 \mathcal{I}_{n-2}.$$
- **Wniosek 1:** jeśli $\mathcal{I}_{n-2} \neq 0$ oraz $\mathcal{I}_{n-1} = 0$, to $\mathcal{I}_n \neq 0$.
- **Wniosek 2:** $\mathcal{I}_n \in \mathbb{Z}$, więc $\mathcal{I}_n = 0$ dla dużych n.
- Sprzeczność!

Niewymierność π

Twierdzenie

Jeśli $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, to $\operatorname{tg} x \notin \mathbb{Q}$.

Dowód (2/2):

- Wiemy już, że gdy $x \in \mathbb{Q} \setminus (\pi\mathbb{Z})$, to $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Stąd $\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Wobec tego $\mathbb{Q} \cap (\pi\mathbb{Z}) = \{0\}$.
- Zatem jeśli $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, to $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Niewymierność π

Lemat 1

Ciąg $\mathcal{I}_n = \dfrac{b^n d}{n! \sin x} \displaystyle\int_0^x s^n (x-s)^n \sin s \, ds$ dąży do 0.

Dowód:

- $|s^n(x-s)^n| \leq |x|^n |x|^n = |x|^{2n}$ dla $s \in [0, x]$.
- $\left| \int_0^x s^n (x-s)^n \sin s \, ds \right| \leq |x| \, |x|^{2n}$.
- $|\mathcal{I}_n| \leq \frac{|d| \, |x|}{|\sin x|} \frac{1}{n!} (|b| \, |x|^2)^n$.
- Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}_n = 0$. $\square$

Niewymierność π

Lemat 2

Ciąg $\mathcal{I}_n = \dfrac{b^n d}{n! \sin x} \displaystyle\int_0^x s^n (x-s)^n \sin s \, \mathrm{d}s$ spełnia:

$$\mathcal{I}_0 = c, \quad \mathcal{I}_1 = 2bc - ad, \quad \mathcal{I}_n = (4n-2)b\,\mathcal{I}_{n-1} - a^2 \mathcal{I}_{n-2}.$$

Dowód (1/3):

- $\mathcal{I}_0 = \frac{d}{\sin x}(1 - \cos x) = d \frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = d \operatorname{tg} \frac{x}{2} = c.$
- $$\begin{aligned} \int_0^x s(x-s)\sin s \, \mathrm{d}s &= \int_0^x (x-2s)\cos s \, \mathrm{d}s \\ &= \Big[(x-2s)\sin s\Big]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x 2\sin s \, \mathrm{d}s \\ &= -x\sin x + 2(1-\cos x). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{bd}{\sin x}\Big(-x\sin x + 2(1-\cos x)\Big) \\ &= -bdx + 2bd \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -ad + 2bc. \end{aligned}$$

Niewymierność π

Lemat 2

Ciąg $\mathcal{I}_n = \dfrac{b^n d}{n! \sin x} \displaystyle\int_0^x s^n (x-s)^n \sin s \, ds$ spełnia:

$$\mathcal{I}_0 = c, \quad \mathcal{I}_1 = 2bc - ad, \quad \mathcal{I}_n = (4n-2)b\,\mathcal{I}_{n-1} - a^2 \mathcal{I}_{n-2}.$$

Dowód (2/3):

- Niech $f_n(s) = \frac{s^n (x-s)^n}{n!}$.
- $$\begin{aligned} f_n''(s) &= \frac{s^{n-2}(x-s)^n + s^n (x-s)^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{2n s^{n-1}(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{s^{n-2}(x-s)^{n-2}(x^2-2xs+2s^2)}{(n-2)!} - 2n f_{n-1}(x) \\ &= x^2 f_{n-2}(s) - 2(n-1) f_{n-1}(s) - 2n f_{n-1}(s) \\ &= x^2 f_{n-2}(s) - (4n-2) f_{n-1}(s). \end{aligned}$$

Niewymierność π

Lemat 2

Ciąg $\mathcal{I}_n = \dfrac{b^n d}{n!\sin x}\displaystyle\int_0^x s^n(x-s)^n \sin s \,\mathrm{d}s$ spełnia:

$$\mathcal{I}_0 = c, \quad \mathcal{I}_1 = 2bc - ad, \quad \mathcal{I}_n = (4n-2)b\,\mathcal{I}_{n-1} - a^2\mathcal{I}_{n-2}.$$

Dowód (3/3):

- $$\begin{aligned}\mathcal{I}_n &= \frac{b^n d}{\sin x}\int_0^x f_n(s)(-\sin s)''\mathrm{d}s \\ &= \frac{b^n d}{\sin x}\int_0^x (x^2 f_{n-2}(s) - (4n-2)f_{n-1}(s))(-\sin s)\mathrm{d}s \\ &= -b^2x^2\mathcal{I}_{n-2} + (4n-2)b\,\mathcal{I}_{n-1} \\ &= -a^2\mathcal{I}_{n-2} + (4n-2)b\,\mathcal{I}_{n-1}.\end{aligned}$$

$\square$

Niewymierność π

Przypomnijmy dowód, że $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow \operatorname{tg} x \notin \mathbb{Q}$.

- Przypuśćmy, że $x \in \mathbb{Q} \setminus (\pi\mathbb{Z})$, $x = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{c}{d}$.
- Niech $\mathcal{I}_n = \dfrac{b^n \ d}{n! \sin x} \displaystyle\int_0^x s^n (x-s)^n \sin s \, ds$.
- **Lemat 1**: $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{I}_n = 0$.
- **Lemat 2**: $\mathcal{I}_0 = c, \qquad \mathcal{I}_1 = 2bc - ad,$
  $$\mathcal{I}_n = (4n-2)b \ \mathcal{I}_{n-1} - a^2 \ \mathcal{I}_{n-2}.$$
- **Wniosek 1:** jeśli $\mathcal{I}_{n-2} \neq 0$ oraz $\mathcal{I}_{n-1} = 0$, to $\mathcal{I}_n \neq 0$.
- **Wniosek 2:** $\mathcal{I}_n \in \mathbb{Z}$, więc $\mathcal{I}_n = 0$ dla dużych n.
- Sprzeczność!

Co dla $x = \pi$?

Niewymierność π

Otrzymujemy nieco inny dowód niewymierności π:

- Przypuśćmy, że $\pi = \frac{a}{b}$.
- Niech $\mathcal{I}_n = \dfrac{b^n}{n!} \displaystyle\int_0^{\pi} s^n(\pi - s)^n \sin s \, ds.$
- **Lemat 1**: $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n = 0.$
- **Lemat 2**: $\mathcal{I}_0 = 2$, $\mathcal{I}_1 = 4b$,

  $\mathcal{I}_n = (4n - 2)b \ \mathcal{I}_{n-1} - a^2 \ \mathcal{I}_{n-2}.$
- **Wniosek 1:** jeśli $\mathcal{I}_{n-2} \neq 0$ oraz $\mathcal{I}_{n-1} = 0$, to $\mathcal{I}_n \neq 0$.
- **Wniosek 2:** $\mathcal{I}_n \in \mathbb{Z}$, więc $\mathcal{I}_n = 0$ dla dużych n.
- Sprzeczność!

Niewymierność π

Możemy go odrobinę uprościć:

- Przypuśćmy, że $\pi = \frac{a}{b}$.
- Niech $\mathcal{I}_n = \dfrac{b^n}{n!} \displaystyle\int_0^\pi s^n(\pi - s)^n \sin s \, ds.$
- **Lemat 1**: $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n = 0.$
- **Lemat 2**: $\mathcal{I}_0 = 2,$ $\mathcal{I}_1 = 4b$,
  $\mathcal{I}_n = (4n-2)b \ \mathcal{I}_{n-1} - a^2 \ \mathcal{I}_{n-2}.$
- **Obserwacja:** $\mathcal{I}_n > 0$.
- **Wniosek 2:** $\mathcal{I}_n \in \mathbb{Z}$, więc $\mathcal{I}_n = 0$ dla dużych n.
- Sprzeczność!

Niewymierność π

Wprowadźmy drobną modyfikację:

- Przypuśćmy, że $\pi = \frac{a}{b}$.
- Niech $\mathcal{I}_n = \frac{b^{2n}}{n!} \int_0^\pi s^n(\pi - s)^n \sin s \, ds.$
- **Lemat 1**: $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n = 0.$
- **Lemat 2**: $\mathcal{I}_0 = 2,$ $\mathcal{I}_1 = 4b^2$,

  $\mathcal{I}_n = (4n-2)b^2\, \mathcal{I}_{n-1} - a^2 b^2 \mathcal{I}_{n-2}.$
- **Obserwacja:** $\mathcal{I}_n > 0.$
- **Wniosek 2:** $\mathcal{I}_n \in \mathbb{Z}$, więc $\mathcal{I}_n = 0$ dla dużych n.
- Sprzeczność!

Niewymierność π^2

Otrzymujemy dowód niewymierności π^2:

- Przypuśćmy, że $\pi = \sqrt{\frac{A}{B}}$.
- Niech $\mathcal{I}_n = \frac{B^n}{n!} \int_0^\pi s^n(\pi - s)^n \sin s \, ds.$
- **Lemat 1**: $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n = 0.$
- **Lemat 2**: $\mathcal{I}_0 = 2, \quad \mathcal{I}_1 = 4B$,

  $\mathcal{I}_n = (4n-2)B \; \mathcal{I}_{n-1} - A \; B \; \mathcal{I}_{n-2}.$
- **Obserwacja:** $\mathcal{I}_n > 0.$
- **Wniosek 2:** $\mathcal{I}_n \in \mathbb{Z}$, więc $\mathcal{I}_n = 0$ dla dużych n.
- Sprzeczność!

Niewymierność e^x

Twierdzenie

Jeśli $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, to $e^x \notin \mathbb{Q}$.

Dowód (1/2):

- Przypuśćmy, że $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $x = \frac{a}{b}$, $e^x = \frac{c}{d}$.
- Niech $\mathcal{I}_n = \dfrac{b^n d}{n!} \displaystyle\int_0^x s^n (x-s)^n e^s \, ds$.
- **Lemat 1**: $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n = 0$.
- **Lemat 2**: $\mathcal{I}_0 = c - d$, $\quad \mathcal{I}_1 = ac - 2bc + ad + 2bd$,
$$\mathcal{I}_n = -(4n-2)b\mathcal{I}_{n-1} + a^2\mathcal{I}_{n-2}.$$
- **Wniosek 1:** jeśli $\mathcal{I}_{n-2} \neq 0$ oraz $\mathcal{I}_{n-1} = 0$, to $\mathcal{I}_n \neq 0$.
- **Wniosek 2:** $\mathcal{I}_n \in \mathbb{Z}$, więc $\mathcal{I}_n = 0$ dla dużych n.
- Sprzeczność!

Historia

- 1761: **Johann Lambert**; rozwinięcie

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \dots}}}}.$$

- 1873: **Charles Hermite**; rekurencja dla całek

$$\int_{-1}^{1} (1 - z^2)^n \cos(xz) dz.$$

- ok. 1945: **Mary Cartwright**;
- 1947: **Ivan Niven**;
- 1997: **Miklós Laczkowich**;
- 2010: **Li Zhou**, **Lubomir Markov**;

uproszczenia.

Historia

Ciąg $\mathcal{I}_n = \dfrac{1}{n!\sin x}\displaystyle\int_0^x s^n (x-s)^n \sin s \, ds$ spełnia:

$$\mathcal{I}_0 = \operatorname{tg}\tfrac{x}{2}, \quad \mathcal{I}_1 = 2\operatorname{tg}\tfrac{x}{2} - x, \quad \mathcal{I}_n = (4n-2)\mathcal{I}_{n-1} - x^2\mathcal{I}_{n-2}.$$

- Wobec tego $\dfrac{\mathcal{I}_{n-1}}{2\mathcal{I}_{n-2}} = \dfrac{(\frac{x}{2})^2}{(2n-1) - \dfrac{\mathcal{I}_n}{2\mathcal{I}_{n-1}}}$.
- Zatem:

$$\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{(\frac{x}{2})^2}{1 - \frac{\mathcal{I}_1}{2\mathcal{I}_0}} = \frac{(\frac{x}{2})^2}{1 - \dfrac{(\frac{x}{2})^2}{3 - \frac{\mathcal{I}_2}{2\mathcal{I}_1}}} = \frac{(\frac{x}{2})^2}{1 - \dfrac{(\frac{x}{2})^2}{3 - \dfrac{(\frac{x}{2})^2}{5 - \frac{\mathcal{I}_3}{2\mathcal{I}_2}}}} = \ldots$$

Historia

- Okazuje się więc, że dowody Lamberta, Hermite’a oraz współczesne wszystkie bazują na rozwinięciu $\operatorname{tg} x$ w ułamek łańcuchowy.
- Przewaga współczesnych dowodów polega na:
  - analizie całki $\mathcal{I}_n$ bez odwoływania się do jej źródła,
  - niezależności od zbieżności przybliżeń $\operatorname{tg} x$ uzyskanych z rozwinięć w ułamek łańcuchowy.
- Dowody przestępności e (**Charles Hermite**, 1873) oraz π (**Ferdinand von Lindemann**, 1882) korzystają z bardzo podobnych metod.
- Łatwo zapomnieć o źródłach.

Korzystałem z:

- L. Zhou, L. Markov
  Recurrent Proofs of the Irrationality of Certain Trigonometric Values
  Amer. Math. Monthly **117**(4) (2010): 360–362
- L. Zhou
  On "Discovering and proving that π is irrational"
  arXiv:1011.0077