Teoria spektralna jednowymiarowych procesów Lévy'ego na półprostej i odcinku

Prezentacja wyników rozprawy habilitacyjnej

Mateusz Kwaśnicki

Warszawa

25 października 2012

[A] *Spectral properties of the Cauchy process on half-line and interval*
Proc. London Math. Soc., 2010
(współautorzy: T. Kulczycki, J. Małecki, A. Stós)

[B] *Spectral analysis of subordinate Brownian motions on the half-line*
Studia Math., 2011

[C] *Eigenvalues of the fractional Laplace operator in the interval*
J. Funct. Anal., 2012

Część 1

Wstęp: szeregi Fouriera

Opis rozważanej klasy operatorów

Sformułowanie problemu

Wzór asymptotyczny dla odcinka

Wstęp: szeregi Fouriera

Niech $D = (0, \pi)$.

Twierdzenie Riesza–Fischera

Jeśli $f \in L^2(D)$, to $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad$ (zbieżność w $L^2(D)$),

przy czym ciąg $\quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad$ należy do l^2.

Przez Δ oznaczamy **operator Laplace'a**, $\Delta f(x) = f''(x)$.

Obserwacja

Przy odpowiednich założeniach:

$$\text{jeśli} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad \text{to} \quad -\Delta f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin(nx).$$

Wstęp: szeregi Fouriera

Przypomnijmy: $D = (0, \pi)$. Oznaczmy przez $\Delta|_D$ operator Laplace'a na $L^2(D)$ z **warunkiem brzegowym Dirichleta**.

Wyniki z poprzedniej strony można podsumować następująco:

Wniosek

Funkcje $f_n(x) = \sin(nx)$ tworzą zupełny układ ortogonalny funkcji własnych $-\Delta|_D$, odpowiadających wartościom własnym $\lambda_n = n^2$.

Celem jest badanie analogicznych funkcji i wartości własnych dla operatorów $\psi(-\Delta)|_D$. Szczególnie ważnym przypadkiem jest **ułamkowy operator Laplace'a** $(-\Delta)^{\alpha/2}|_D$ dla $\alpha \in (0, 2)$.

Uwaga

Operator $\psi(-\Delta)|_D$ jest czym innym niż $\psi(-\Delta|_D)$. W przypadku tego drugiego problem się trywializuje.

Opis rozważanej klasy operatorów

Operator $\psi(-\Delta)$ to **nielokalny** operator na $L^2(\mathbb{R})$, który można zdefiniować za pomocą:

- transformaty Fouriera (teorii spektralnej $-\Delta$);
- procesów Lévy'ego;
- rozszerzeń harmonicznych;
- podporządkowania półgrup operatorów (w sensie Bochnera).

Omówimy krótko pierwsze trzy metody.

Opis rozważanej klasy operatorów

Definicja (przez transformatę Fouriera)

Określamy

$$(\psi(-\Delta)f)\hat{}(\xi) = \psi(\xi^2)\hat{f}(\xi)$$

dla $f \in L^2(\mathbb{R})$, dla których funkcja po prawej stronie jest w $L^2(\mathbb{R})$.

Ponadto zakładamy, że jest ψ jest **zupełną funkcją Bernsteina**, albo inaczej — **funkcją operatorowo monotoniczną**, tj.:

Dodatkowe założenie

Dla pewnego $b \geq 0$ i pewnej miary Radona μ na $(0, \infty)$ zachodzi

$$\psi(z) = bz + \int_{(0,\infty)} \frac{z}{z+s} \frac{\mu(ds)}{s} .$$

Dla $(-\Delta)^{\alpha/2}$: $b = 0$, $\mu(ds) = c_\alpha s^{\alpha/2}$.

Opis rozważanej klasy operatorów

Definicja (przez procesy Lévy'ego)

Operator $-\psi(-\Delta)$ jest generatorem procesu Lévy'ego X_t, którego wykładnik Lévy'ego-Chinczyna to $\psi(\xi^2)$. Innymi słowy,

$$-\psi(-\Delta)f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}f(x+X_t) - f(x)}{t}$$
$$= b\Delta f(x) + \mathrm{pv}\int_{-\infty}^{\infty} (f(x+z) - f(x))\nu(dz),$$

przy czym

$$\mathbb{E}\exp(i\xi X_t) = e^{-t\psi(\xi^2)}.$$

Dodatkowe założenie

Miara Lévy'ego ν (mierząca intensywność skoków X_t) ma gęstość, która jest funkcją **całkowicie monotoniczną** na $(0,\infty)$.

Dla $(-\Delta)^{\alpha/2}$: $\nu(dz) = \frac{c_\alpha dz}{|z|^{1+\alpha}}$, X_t — symetryczny proces α-stabilny.

Opis rozważanej klasy operatorów

Definicja (przez rozszerzenia harmoniczne)

Operator $\psi(-\Delta)$ jest związany z pewnym zagadnieniem rozszerzenia harmonicznego w górnej półpłaszczyźnie:

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a(y)\tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) h(x,y) &= 0 && (x \in \mathbb{R},\ y > 0); \\ h(x,0) &= f && (x \in \mathbb{R}); \\ -\psi(-\Delta) f(x) &= \tfrac{\partial}{\partial y} h(x,0) && (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Aby w ten sposób uzyskać wszystkie zupełne funkcje Bernsteina ψ, trzeba rozważać bardzo osobliwe $a(y)$ (**uogólnione dyfuzje** albo **spektralna teoria strun** Kreina).

Związek pomiędzy ψ oraz $a(y)$ zazwyczaj jest niejawny.

Dla $(-\Delta)^{\alpha/2}$: $a(y) = c_\alpha y^{2-2/\alpha}$.

Sformułowanie problemu

Niech D będzie odcinkiem (ogólniej: obszarem w $\mathbb{R}^d$).

Operator $\psi(-\Delta)|_D$ to operator $\psi(-\Delta)$ na $L^2(D)$ z **warunkiem zewnętrznym Dirichleta**.

Twierdzenie Hilberta–Schmidta

Funkcje własne f_n operatora $\psi(-\Delta)|_D$ tworzą zupełny układ ortogonalny na $L^2(D)$. Można je uszeregować tak, by odpowiadające im wartości własne spełniały $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$

Nieco nieformalnie,

$$\begin{aligned} \psi(-\Delta)f_n(x) &= \lambda_n f_n(x) & \qquad (x \in D); \\ f_n(x) &= 0 & \qquad (x \notin D). \end{aligned}$$

Problem

Zbadać własności λ_n oraz f_n.

Wzór asymptotyczny dla odcinka

Twierdzenie ([A], [C])

Dla $D = (0, \pi)$ oraz dla operatora $(-\Delta)^{\alpha/2}|_D$, $\alpha \in (0, 2)$:

$$\lambda_n = \left(n - \tfrac{2-\alpha}{4}\right)^\alpha + \mathcal{O}(\tfrac{1}{n}).$$

Gdy $\alpha \geq 1$, zachodzi $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$

W [A] rozważano $\alpha = 1$, [C] dotyczy $\alpha \in (0, 2)$.

Twierdzenie odpowiada $\psi(z) = z^{\alpha/2}$. Metoda jest dość ogólna: obecnie znane są bardzo dokładne wyniki dla $\psi(z) = \sqrt{z+1} - 1$, trwają prace nad ogólniejszymi funkcjami.

Wzór asymptotyczny dla odcinka

Dowód wykorzystuje funkcje własne F_μ na **półprostej**.
Funkcji F_μ odpowiada wartość własna $\psi(\mu^2) = \mu^\alpha$.

Bada się następujące przybliżenia funkcji własnych:

$$\tilde{f}_n(x) = F_{\mu_n}(x) \qquad (x \in (0, \tfrac{\pi}{3}));$$

$$\tilde{f}_n(x) \approx \sin\left((n - \tfrac{2-\alpha}{4})x + \tfrac{(2-\alpha)\pi}{8}\right) \qquad (x \in (\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{3}));$$

$$\tilde{f}_n(x) = (-1)^{n-1} F_{\mu_n}(\pi - x) \qquad (x \in (\tfrac{2\pi}{3}, \pi)).$$

Tu $\mu_n = n - \frac{2-\alpha}{4}$.

Wzory na $F_\mu(x)$ wyprowadzone są w [A] dla $\psi(z) = \sqrt{z}$ (tj. $\alpha = 1$) oraz w [B] dla ogólnych zupełnych funkcji Bernsteina ψ.

Część 2

Funkcje własne na półprostej

Twierdzenie spektralne

Funkcje własne na półprostej

Uwaga

Gdy D jest ograniczony, operatory $\exp(-t\psi(-\Delta)|_D)$ są zwarte i przez to $\psi(-\Delta)|_D$ ma funkcje własne (tw. Hilberta–Schmidta).

Dla $D = (0, \infty)$ widmo $\psi(-\Delta)|_D$ jest ciągłe.

Twierdzenie ([A], [B])

Dla $D = (0, \infty)$ oraz $\mu > 0$ istnieje funkcja $F_\mu \in L^\infty(D)$ taka, że

$$\psi(-\Delta)|_D F_\mu = \psi(\mu^2) F_\mu$$

przy odpowiednim rozszerzeniu definicji $\psi(-\Delta)|_D$. (cdn.)

Jak poprzednio, nieco nieformalnie,

$$\begin{aligned} \psi(-\Delta) F_\mu(x) &= \psi(\mu^2) F_\mu(x) && (x > 0); \\ F_\mu(x) &= 0 && (x \le 0). \end{aligned}$$

Funkcje własne na półprostej

Twierdzenie ([A], [B]; cd.)

Funkcja F_μ ma transformatę Laplace'a

$$\mathcal{L}F_\mu(\xi) = \frac{\mu}{\mu^2 + \xi^2} \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2 + \zeta^2} \log \frac{\psi'(\mu^2)(\mu^2 - \zeta^2)}{\psi(\mu^2) - \psi(\zeta^2)} \, d\zeta\right)$$

i ponadto

$$F_\mu(x) = \sin(\mu x + \vartheta_\mu) - G_\mu(x),$$

gdzie $\vartheta_\mu \in [0, \frac{\pi}{2})$, zaś G_μ jest całkowicie monotoniczna. (cdn.)

Zauważmy, że dla $\psi(z) = z$, tj. dla operatora $-\Delta|_D$,

$$F_\mu(x) = \sin(\mu x)$$

w istocie jest funkcją własną o wartości własnej $\psi(\mu^2) = \mu^2$.

Funkcje własne na półprostej

Przypomnijmy:

$$F_\mu(x) = \sin(\mu x + \vartheta_\mu) - G_\mu(x).$$

Twierdzenie ([A], [B]; cd.)

Zachodzi ponadto:

$$\vartheta_\mu = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu}{\mu^2 - \zeta^2} \log \frac{\psi'(\mu^2)(\mu^2 - \zeta^2)}{\psi(\mu^2) - \psi(\zeta^2)} \, d\zeta$$

oraz

$$G_\mu(x) = \int_0^\infty e^{-x\xi} \gamma_\mu(d\xi),$$

gdzie

$$\gamma_\mu(d\xi) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{Im} \frac{\mu \psi'(\mu^2)}{\psi(\mu^2) - \psi^+(-\xi^2)} \right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2 + \zeta^2} \log \frac{\psi'(\mu^2)(\mu^2 - \zeta^2)}{\psi(\mu^2) - \psi(\zeta^2)} \, d\zeta \right) d\xi.$$

Funkcje własne na półprostej

Elementy dowodu:

- transformaty Fouriera, Laplace'a i Stieltjesa;
- metoda Wienera–Hopfa;
- teoria zupełnych funkcji Bernsteina;
- twierdzenie Paley–Wienera;
- $\mathcal{S}$-sploty dystrybucji;
- operator charakterystyczny Dynkina.

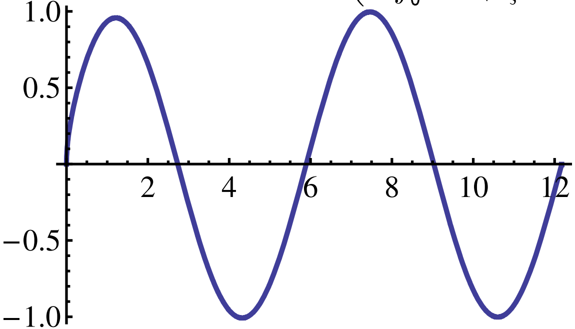
Funkcje własne na półprostej

Dla $(-\Delta)^{\alpha/2}|_D$:

$$F_\mu(x) = \sin(\mu x + \tfrac{(2-\alpha)\pi}{8}) - \int_0^\infty e^{-\mu s x}\gamma(s) ds,$$

$$\gamma(s) = \frac{\sqrt{2\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi}\,\frac{s^\alpha}{1+s^{2\alpha}-2s^\alpha\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\zeta^2}\log\frac{1-s^\alpha\zeta^\alpha}{1-s^2\zeta^2}\,d\zeta\right).$$



Wykres $F_1(x)$ dla $\alpha = 1$

Twierdzenie spektralne

Przypomnijmy: $D = (0, \infty)$, funkcje F_μ nie są w $L^2(D)$.

Twierdzenie ([A], [B], [$\star$])

Funkcje F_μ tworzą zupełny układ **uogólnionych** funkcji własnych operatora $\psi(-\Delta)|_D$, tj. jeśli

$$\Pi f(\mu) = \int_0^\infty f(x) F_\mu(x) dx,$$

$$\Pi^{-1} g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_\mu(x) g(\mu) d\mu,$$

to zachodzi

$$\Pi\big(\psi(-\Delta)|_D f\big)(\mu) = \psi(\mu^2) \Pi f(\mu).$$

Dla $\psi(z) = z$, tj. dla operatora $-\Delta|_D$, zachodzi $F_\mu(x) = \sin(\mu x)$. Zatem w tym przypadku Π jest transformatą sinusów.

Twierdzenie spektralne

W [A] rozważano $\psi(z) = \sqrt{z}$ (tj. $\alpha = 1$), [B] dotyczy $\psi(z) = z^{\alpha/2}$, $\psi(z) = \sqrt{z+1} - 1$ i niektórych innych ψ.

Dowód dla ogólnych zupełnych funkcji Bernsteina ψ jest zawarty w:

[$\star$] M. Kwaśnicki, J. Małecki, M. Ryznar
First passage times for subordinate Brownian motions
arXiv:1110.0401

Część 3

Funkcjonał supremum

Relatywistyczna mechanika kwantowa

Funkcjonał supremum

Niech X_t będzie procesem Lévy'ego o wykładniku Lévy'ego-Chinczyna $\psi(\xi^2)$. Oznaczmy

$$M_t = \sup_{s \in [0,t]} X_s.$$

Twierdzenie ([A], [B], [$\star$])

Przy odpowiednich założeniach na ψ,

$$\mathbb{P}_0(M_t < x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\psi'(\mu^2)}{\psi(\mu^2)}} \, e^{-t\psi(\mu^2)} F_\mu(x) d\mu.$$

W [A] rozważano $\psi(z) = \sqrt{z}$ (tj. $\alpha = 1$), [B] dotyczy $\psi(z) = z^{\alpha/2}$, $\psi(z) = \sqrt{z+1} - 1$ i niektórych innych ψ, w [$\star$] wymagana jest minimalna regularność zupełnej funkcji Bernsteina ψ w 0 i ∞.

Zastosowanie: oszacowania i rozwinięcia asymptotyczne.

Relatywistyczna mechanika kwantowa

Gdy $\psi(z) = \sqrt{z+1} - 1$, operator $\psi(-\Delta)$ jest **kwazirelatywistycznym Hamiltonianem** swobodnej masywnej cząstki.

Operator $\psi(-\Delta)|_D$ odpowiada cząstce, która zmuszona jest do pozostania w D przez (nieskończenie silne) pole elektryczne.

Wartości własne λ_n operatora $\psi(-\Delta)|_D$ odpowiadają poziomom energetycznym cząstki.

Twierdzenie ([†])

Jeśli D jest odcinkiem, to

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{|D|} - \frac{\pi}{8|D|} + \mathcal{O}(\tfrac{1}{n}).$$

[†] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, J. Małecki
One-dimensional quasi-relativistic particle in the box
arXiv:1110.5887