POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH
PROBLEMÓW TECHNIKI

KIERUNEK: Matematyka
SPECJALNOŚĆ: Matematyka teoretyczna

PRACA DYPLOMOWA

Własności jąder Martina dla funkcji α-harmonicznych

Mateusz Kwaśnicki

PROMOTOR: **dr Tadeusz Kulczycki**

WROCŁAW, czerwiec 2006

Spis treści

Wstęp

W niniejszej pracy dowodzi się istnienia i jednoznaczności jądra Martina dla funkcji α-harmonicznych ($0 < \alpha < 2$) na dowolnym otwartym i ograniczonym podzbiorze $\mathbf{R}^d$ w każdym punkcie jego brzegu topologicznego. Oznacza to twierdzącą odpowiedź na nierozstrzygnięte dotąd pytanie, czy tzw. brzeg Martina dowolnego zbioru otwartego można utożsamić z pewnym podzbiorem brzegu topologicznego.

W 2000 roku K. Michalik i K. Samotij ([20]) udowodnili, że wszystkie nieujemne funkcje singularnie α-harmoniczne na zbiorze otwartym $D \subset \mathbf{R}^d$ posiadają jednoznaczną reprezentację Martina, tj. każdą taką funkcję można przedstawić jako całkę względem skończonej i nieujemnej miary z tzw. jądra Martina M_D. Miara reprezentująca jest określona na brzegu Martina $\partial_M D$ zbioru D, który został zdefiniowany w sposób abstrakcyjny. W klasycznej teorii funkcji harmonicznych zachodzi analogiczne twierdzenie i w ogólności $\partial_M D$ może być dużo obszerniejszym zbiorem, niż brzeg topologiczny ∂D zbioru D. Udowodnione poniżej Twierdzenie 1 stanowi, że w przypadku brzegu Martina dla funkcji α-harmonicznych sytuacja jest odmienna, $\partial_M D$ jest po prostu podzbiorem ∂D.

Powyższy problem został już wcześniej rozstrzygnięty dla zbiorów o odpowiednio regularnych brzegach. Z.-Q. Chen i R. Song ([10]) oraz K. Bogdan ([7]) niezależnie wykazali równość brzegów Martina i topologicznego dla zbiorów Lipschitza. R. Song i J.-M. Wu ([23]) rozszerzyli ten wynik na tzw. κ-grube zbiory. Twierdzenia wspomnianych autorów mają swoje odpowiedniki w klasycznej teorii funkcji harmonicznych. Przypadek dowolnego otwartego podzbioru był dotąd niezbadany i jak już wspomnieliśmy, prowadzi do wyników różniących się od rezultatów klasycznej teorii.

Kluczową rolę w dowodach twierdzeń o jądrze i reprezentacji Martina odgrywała zawsze brzegowa zasada Harnacka (ang. BHP). Tak jest również w tej pracy, główną trudność stanowiło uzyskanie wersji BHP ze stałą niezależną od geometrii brzegu zbioru.

Teoria funkcji α-harmonicznych powstała poprzez analogię do klasycznej teorii funkcji harmonicznych i ich reprezentacji Martina. Wyniki zawarte w tej pracy ukazują istotną różnicę między tymi teoriami, bowiem w klasycznym przypadku brzeg Martina nie zawsze może być utożsamiony z podzbiorem brzegu topologicznego, a brzegowa zasada Harnacka nie zachodzi na pewnych nietypowych zbiorach.

W pierwszym rozdziale wprowadzone są pojęcia wykorzystywane w dalszej części pracy. Zawiera on możliwie liczne odnośniki do literatury na temat teorii potencjału symetrycznych procesów α-stabilnych.

Główne wyniki niniejszej pracy sformułowane są w rozdziale drugim. Znajduje się tam również porównanie z dawniejszymi wynikami w tym zakresie oraz z rezultatami klasycznej teorii.

Ostatni, trzeci rozdział zawiera dowody głównych twierdzeń i lematów pomocniczych.

Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi, dr. Tadeuszowi Kulczyckiemu, za zainteresowanie mnie tematyką funkcji α-harmonicznych i ogromną cierpliwość, jaką wykazał podczas wprowadzania mnie w tę dziedzinę. Jestem szczególnie wdzięczny za liczne pomysły i wskazówki, bez których otrzymanie opisanych poniżej wyników nie byłoby możliwe.

Dziękuję prof. Tomaszowi Byczkowskiemu za pomoc i dbałość o poszerzanie i pogłębianie mojej wiedzy matematycznej oraz prof. Krzysztofowi Bogdanowi za częste konsultacje, które umożliwiły mi lepsze zrozumienie badanych przeze mnie problemów.

Rozdział 1

Definicje i oznaczenia

W tym rozdziale wprowadzamy pojęcie symetrycznego procesu α-stabilnego oraz obiektów z nim związanych, w tym jądra potencjału, miary α-harmonicznej, funkcji Greena oraz ułamkowego laplasjanu. Dobrym wprowadzeniem do teorii potencjału procesów Markowa jest monografia R. M. Blumenthala i R. K. Getoora [4]. Ciekawym źródłem informacji są również książki J. Bliedtnera i W. Hansena [3] oraz N. S. Landkoffa [18]. Szczegółowe wyniki dotyczące procesów stabilnych znajdują się we współczesnych publikacjach ([6], [7], [8], [9], [10], [23] i wiele innych).

1.1 Symetryczny proces α-stabilny

Przez $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ będziemy oznaczali *symetryczny proces α-stabilny* w przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^d$, gdzie $d \geq 1$ oraz $0 < \alpha < 2$. Oznacza to, że X jest skokowym procesem Lévy'ego o mierze Lévy'ego absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a z gęstością

$$\nu(x) = \mathcal{A}_{d,-\alpha}|x|^{-d-\alpha},$$

gdzie $\mathcal{A}_{d,\gamma} = 2^\gamma\,\Gamma((d-\gamma)/2)/(\pi^{d/2}|\Gamma(\gamma/2)|)$ gdy $d = 1, 2, ...$ oraz $0 < |\gamma| < 2$. Przez $\mathbf{P}_x$ oznaczamy miarę prawdopodobieństwa związaną z procesem startującym z punktu $x \in \mathbf{R}^d$, zaś przez $\mathbf{E}_x$ — wartość oczekiwaną względem $\mathbf{P}_x$.

Proces X ma przyrosty niezależne i jednorodne oraz prawostronnie ciągłe trajektorie, posiadające lewostronne granice w każdym punkcie. Jest procesem Markowa, a nawet procesem Hunta (w rozumieniu np. [4]). Jeśli U jest operatorem ortogonalnym na $\mathbf{R}^d$, to obrócony proces UX ma ten sam rozkład, co X — to tłumaczy użycie słowa „symetryczny”[1]. Z kolei α-stabilność oznacza, że rozkłady jednowymiarowe X_t są α-stabilne: funkcja charakterystyczna zmiennej $X(t)$ to $\mathbf{E}_0 \exp(i \langle X(t), z\rangle) = \exp(-t\,|z|^\alpha)$.

Gdy α rośnie do 2, proces X ma coraz mniejsze skoki. W granicznym przypadku otrzymujemy ruch Browna $B = \{B(t) : t \geq 0\}$, symetryczny proces 2-stabilny o ciągłych trajektoriach. Nasze rozważania dotyczyć będą jedynie procesów α-stabilnych dla $\alpha \in (0, 2)$, a klasyczna teoria dla ruchu Browna będzie dla nas punktem odniesienia. Procesy X i B mają wiele cech wspólnych, zaś podstawową różnicą między nimi jest to, że trajektorie ruchu Browna są funkcjami ciągłymi, podczas gdy prawie wszystkie trajektorie X mają gęsty zbiór punktów nieciągłości — skoków.

1.2 Miara α-harmoniczna

Niech D będzie ograniczonym zbiorem otwartym w $\mathbf{R}^d$. Określmy pierwszy czas wyjścia z D wzorem $\tau_D = \inf\{t > 0 : X(t) \in D^c\}$. Wówczas τ_D jest prawie na pewno skończonym czasem Markowa. Przez ω_D^x oznaczamy $\mathbf{P}_x$-rozkład $X(\tau_D)$, tj. $\omega_D^x(E) = \mathbf{P}_x(X(\tau_D) \in E)$ dla borelowskich $E \subset \mathbf{R}^d$. Miarę ω_D^x nazywamy *miarą α-harmoniczną* zbioru D. Jest to oczywiście miara probabilistyczna skupiona na D^c.

Jeśli $x \in (\overline{D})^c$, to $\tau_D = 0$ $\mathbf{P}_x$-p.n., przez co $X(\tau_D) = x$ $\mathbf{P}_x$-p.n., czyli ω_D^x jest miarą Diraca ε_x skupioną w x. Dla pewnych punktów x z brzegu D zdarzenie $\{\tau_D > 0\}$ może mieć dodatnie prawdopodobieństwo i wówczas $\omega_D^x \neq \varepsilon_x$. Takie punkty x są nazywane *nieregularnymi* dla D. Wiadomo, że miara α-harmoniczna ω_D^x zbioru punktów nieregularnych jest równa zero dla każdego $x \in D$, co oznacza, że w pewnym sensie większość punktów brzegu D jest regularna.

Jeśli na przykład $D = (-1, 0) \cup (0, 1) \subset \mathbf{R}$, to punkt 0 jest regularny dla D gdy $\alpha > 1$ i nieregularny w przeciwnym przypadku. Punkty (-1) i 1 są zawsze regularne (por. [3], VI.5.4.4 oraz VII.3).

[1] Spotyka się także określenie „izotropowy” proces α-stabilny

Jeśli D jest kulą, $D = B(x_0, r)$, oraz $x \in D$, to ω_D^x jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a i ma gęstość $P_r(x - x_0, \cdot - x_0)$ daną wzorem:

$$P_r(x,y) = c_1 \left(\frac{r^2 - |x|^2}{|y|^2 - r^2} \right)^{\alpha/2} \frac{1}{|x-y|^d}, \quad |x| < r\,, \ |y| > r\,, \tag{1.1}$$

gdzie $c_1(d,\alpha) = 2\Gamma(d/2)/(\alpha\,\pi^{d/2}\Gamma(\alpha/2)|\Gamma(-\alpha/2)|)$. Przyjmujemy ponadto, że $P_r(x,y) = \infty$ gdy $|y| = r$ oraz $P_r(x,y) = 0$ gdy $|y| < r$. Powyższy fakt został dowiedziony w [5]. Autorzy tej pracy stosują metody rozwinięte przez przez M. Riesza, opisane w [21] i [22]. Bardzo precyzyjne wyprowadzenie tej formuły można znaleźć także w [12], gdzie dowiedzionych jest również wiele innych wykorzystywanych poniżej własności.

Niech D będzie dowolnym ograniczonym zbiorem otwartym i niech B będzie jego otwartym podzbiorem. Wówczas gdy $x \in B$, $E \subset D^c$, to:

$$\omega_D^x(E) = \int \omega_D^y(E)\omega_B^x(dy) = \omega_B^x(E) + \int_{D\setminus B} \omega_D^y(E)\omega_B^x(dy)\,. \tag{1.2}$$

Powyższa równość jest nietrudną konsekwencją mocnej własności Markowa dla procesu X oraz zerowej miary α-harmonicznej zbioru punktów nieregularnych.

Niech D_n będzie wstępującym ciągiem zbiorów otwartych, takim że zbiór $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ jest ograniczony. Wówczas τ_{D_n} jest rosnącym ciągiem czasów Markowa. Niech $\tau = \lim \tau_{D_n}$. Oczywiście $\tau \le \tau_D$. Wobec kwazi-lewostronnej ciągłości procesu X, zmienne losowe $X(\tau_{D_n})$ zbiegają do $X(\tau)$ $\mathbf{P}_x$-p.n. dla każdego $x \in \mathbf{R}^d$. Wobec tego $X(\tau) \in D^c$, czyli $\tau \ge \tau_D$. Ostatecznie $\tau = \tau_D$ i $X(\tau_{D_n}) \to X(\tau_D)$ $\mathbf{P}_x$-p.n. W szczególności miary $\omega_{D_n}^x$ słabo zbiegają do miary ω_D^x.

Zauważmy, że $X(\tau_{D_n})$ może dążyć do $X(\tau_D)$ na dwa sposoby. Jeśli dla pewnego m zachodzi $X(\tau_{D_m}) \in D^c$, to ciągi τ_{D_n} i $X(\tau_{D_n})$ są stałe dla $n \ge m$ i $X(\tau_{D_n}) = X(\tau_D)$. Wówczas $X(\tau_D-) \in D_m$,[2] a więc $X(\tau_D-) \ne X(\tau_D)$. Intuicyjnie oznacza to, że proces X „wyskoczył" ze zbioru D do jego dopełnienia.

W pewnych sytuacjach możliwe jest również to, że $X(\tau_{D_n}) \in D$ dla każdego n i wtedy $X(\tau_{D_n}) \to X(\tau_D) \in \partial D$ oraz $X(\tau_D-) = X(\tau_D)$. Innymi słowy mimo skokowego charakteru X osiągnął brzeg D w sposób ciągły. Powrócimy do tego tematu, gdy wprowadzimy pojęcie jądra Poissona.

[2] Przez $X(t-)$ oznaczamy granicę lewostronną procesu w chwili t, $\lim_{s\nearrow t} X(s)$

Pojęcie miary harmonicznej pierwotnie zostało wprowadzone w przypadku ruchu Browna B. Ponieważ trajektorie B są ciągłe (a nie tylko prawostronnie ciągłe, jak w przypadku X), więc klasyczna miara harmoniczna zbioru D jest skupiona na ∂D. Ze względu na skoki procesu X, dla wszystkich $x \in D$ miara α-harmoniczna ω_D^x jest dodatnia na każdym otwartym podzbiorze D^c, a więc w szczególności nie jest niesiona przez brzeg zbioru D.

1.3 Jądro potencjału i funkcja Greena

Oznaczmy przez $p(t, \cdot)$ gęstość $\mathbf{P}_0$-rozkładu zmiennej $X(t)$. Jeśli $\alpha < d$, to funkcja $u(x) = \int_0^\infty p(t,x)dt$, nazywana *jądrem potencjału* procesu X, jest dobrze określona oraz ([3], V.4; [4], ćw. II.1.7):

$$u(x) = \mathcal{A}_{d,\alpha} |x|^{\alpha-d} .$$

Funkcja u nazywana jest jądrem potencjału Riesza. Wprost z definicji u wynika, że $\int u(x-y)f(y)dy = \mathbf{E}_x \int_0^\infty f(X_t)dt$ dla dowolnej ograniczonej funkcji f o zwartym nośniku.

W przypadku $\alpha \geq d = 1$ całka z $p(\cdot, x)$ jest nieskończona. Można jednak określić tzw. kompensowane jądro potencjału wzorem $u(x) = \int_0^\infty (p(t,x) - p(t,x_0))dt$, gdzie $x_0 = 1$ gdy $\alpha = d = 1$ oraz $x_0 = 0$ gdy $\alpha > d = 1$. W pierwszym przypadku:

$$u(x) = -\pi^{-1} \log |x| ,$$

zaś w drugim:

$$u(x) = -\mathcal{A}_{d,\alpha} |x|^{\alpha-d}$$

([12], Lemat 2.7). Z podobną sytuacją mamy do czynienia w klasycznym przypadku ruchu Browna: dla $d \geq 3$ jądro potencjału jest dobrze określone (jest to tzw. jądro potencjału Newtona), dla $d = 2$ mamy jądro logarytmiczne, a w banalnym przypadku $d = 1$ — kompensowane jądro postaci $x \mapsto -|x|/2$.

Jeśli $D \subset \mathbf{R}^d$ jest otwarty i ograniczony, to *funkcja Greena* G_D zbioru D zdefiniowana jest wzorem:

$$G_D(x,y) = u(x-y) - \int u(z-y)\omega_D^x(dz) , \quad x, y \in \mathbf{R}^d .$$

Funkcja G_D przyjmuje wartości w $[0,\infty]$, jest symetryczna (tj. $G_D(x,y) = G_D(y,x)$) i ciągła na $D \times D$ (zob. [17]) oraz zeruje się, jeśli choć jeden z argumentów należy do D^c i jest punktem regularnym dla D. Ponadto $G_D(x,y) < \infty$ gdy $x \neq y$ oraz $G_D(x,x) = \infty$ gdy $x \in D$ oraz $\alpha \leq d$.

Nietrudno dowieść, że $\int G_D(x,y)f(y)dy = \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_D} f(X_t)dt$ dla wszystkich f mierzalnych i ograniczonych. Wynika stąd, że $\int G_D(x,y)dy = \mathbf{E}_x\tau_D$.

Jeśli $D_1 \subset D_2$, to na mocy (1.2):

$$G_{D_2}(x,y) = G_{D_1}(x,y) + \int G_{D_2}(z,y)\omega_{D_1}^x(dz)\,, \quad x,y \in \mathbf{R}^d\,. \tag{1.3}$$

Całkując (1.3), uzyskamy analogiczną własność wartości oczekiwanych czasu wyjścia:

$$\mathbf{E}_x\tau_{D_2} = \mathbf{E}_x\tau_{D_1} + \int \mathbf{E}_z\tau_{D_2}\omega_{D_1}^x(dz)\,, \quad x \in \mathbf{R}^d\,. \tag{1.4}$$

Na koniec zauważmy, że jeśli jeśli D_n jest wstępującym ciągiem zbiorów otwartych i $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ jest ograniczony, to wobec zbieżności τ_{D_n} do τ_D zachodzi $G_{D_n}(x,y) \nearrow G_D(x,y)$ dla wszystkich $x, y \in D$.

1.4 Ułamkowy laplasjan i jądro Poissona

Generatorem ruchu Browna jest operator Laplace'a Δ. Generator symetrycznego procesu α-stabilnego oznaczamy $((-\Delta)^{\alpha/2})$. Jest to operator zdefiniowany wzorem:

$$((-\Delta)^{\alpha/2})f(x) = \lim_{t\searrow 0} \frac{\mathbf{E}_x f(X_t) - f(x)}{t}$$

dla tych wszystkich $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$, dla których granica istnieje jednostajnie. Zbiór tych f nazywamy dziedziną generatora. Trudno precyzyjnie opisać dziedzinę $((-\Delta)^{\alpha/2})$, za chwilę uzasadnimy ograniczenie na $((-\Delta)^{\alpha/2})f$ dla f klasy $C_c^2(\mathbf{R}^d)$. W szczególności oznacza to, że dziedzina zawiera wszystkie funkcje klasy $C_c^2(\mathbf{R}^d)$.

Oznaczenie $((-\Delta)^{\alpha/2})$ sugeruje, że ujemny generator procesu X jest ułamkową potęgą $(-\Delta)$. Tak jest w istocie, jeśli $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ oraz $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$, to $(-\Delta)^{\alpha_1/2}(-\Delta)^{\alpha_2/2}f = (-\Delta)^{(\alpha_1+\alpha_2)/2}f$ ([18], (1.1.12)). Ponadto $((-\Delta)^{\alpha/2}f)\hat{}(x) = |x|^\alpha \hat{f}(x)$ oraz $(-\Delta f)\hat{}(x) = |x|^2\hat{f}(x)$.

Ponieważ X jest procesem Levy'ego, więc jego generator można wyrazić jawnym wzorem za pomocą miary Lévy'ego:

$$(-(-\Delta)^{\alpha/2})f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{B(x,\varepsilon)^c} (f(y) - f(x))\nu(y-x)dy \tag{1.5}$$

dla $f \in C_c^2(\mathbf{R}^d)$. Zauważmy, że $(-(-\Delta)^{\alpha/2})f(x)$ zależy od wartości funkcji f na całym $\mathbf{R}^d$, w przeciwieństwie do $\Delta f(x)$, który jest wyznaczony przez wartości f w dowolnie małym otoczeniu x. Dlatego mówimy, że Δ jest operatorem lokalnym, zaś $(-(-\Delta)^{\alpha/2})$ nie.

Niech $f \in C_c^2(\mathbf{R}^d)$. Wobec wzoru Taylora, dla takich f mamy:

$$\begin{aligned}\left| \int\limits_{B(x,\varepsilon)^c} \frac{f(y)-f(x)}{|y-x|^{d+\alpha}} dy \right| &\le \left| \int\limits_{B(x,1)^c} \frac{f(y)-f(x)}{|y-x|^{d+\alpha}} dy \right| \\ &+ \left| \int\limits_{B(x,1)\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{\langle f'(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(\theta_{x,y})(y-x), y-x\rangle}{|y-x|^{d+\alpha}} dy \right| \\ &\le 2 \sup|f| \int\limits_{B(0,1)^c} |z|^{-d-\alpha} dz + \frac{1}{2} \sup|f''| \int\limits_{B(0,1)} |z|^{2-d-\alpha} dz\,.\end{aligned}$$

Tutaj $f'(x)$ jest gradientem f w punkcie x, $f''(x)$ jest macierzą drugich pochodnych cząstkowych f, zaś $\sup|f''|$ oznacza supremum drugich norm macierzy $f''(x)$ dla $x \in \mathbf{R}^d$. Otrzymujemy zatem:

$$\left|(-(-\Delta)^{\alpha/2})f(x)\right| \le c_2 \left(\sup|f| + \sup|f''|\right) \tag{1.6}$$

dla pewnej stałej $c_2(d, \alpha)$.

Dla funkcji $f \in C_c^2(\mathbf{R}^d)$ zachodzi $(-\Delta)^{\alpha/2}(u * f) = f = u * (-\Delta)^{\alpha/2} f$, tzn. splot z jądrem potencjału[3] u jest operatorem odwrotnym do $(-\Delta)^{\alpha/2}$ ([18], (1.1.12'); zob. także [12]). Stąd, z definicji G_D i z twierdzenia Fubiniego wynika analogiczny wynik dla funkcji Greena ograniczonego zbioru otwartego D ([6], s. 67, dowód Lematu 12):

$$f(x) = \int f(y)\omega_D^x(dy) + \int G_D(x,y)(-\Delta)^{\alpha/2} f(y)dy\,, \quad x \in \mathbf{R}^d\,. \tag{1.7}$$

[3]Lub kompensowanym jądrem potencjału, gdy $\alpha \ge d$

W szczególności możemy rozważać funkcje f o nośniku rozłącznym z $\overline{D}$, które przybliżają indykator zbioru otwartego. Otrzymamy:

$$\omega_D^x(E) = \int_E \int G_D(x,y)\nu(y-z)dydz\,, \quad x \in D\,,\ E \subset \overline{D}^c \tag{1.8}$$

dla E otwartych, a następnie (dowodząc, że rodzina zbiorów E o powyższej własności jest σ-algebrą) dla wszystkich E borelowskich. Zatem dla $x \in D$ miara α-harmoniczna ω_D^x posiada na $\overline{D}^c$ gęstość $P_D(x,\cdot)$ względem miary Lebesgue'a. Funkcję P_D będziemy nazywali *jądrem Poissona*; określamy $P_D(x,z) = \int G_D(x,y)\nu(y-z)dy$ dla wszystkich $x \in D$ i $z \in D^c$ oraz $P_D(x,z) = 0$ gdy $z \in D$. Wzór (1.8) został po raz pierwszy udowodniony w pracy [13] w dużo ogólniejszym kontekście.

Podkreślmy, że w (1.8) zbiór E nie może być dowolnym podzbiorem D^c, bowiem w ogólności miara α-harmoniczna D może zawierać część singularną względem miary Lebesgue'a. Przykładem jest wspomniany już przykład $D = (-1,0) \cup (0,1) \subset \mathbf{R}$ dla $\alpha > 1$ — wtedy $\omega_D^x(\{0\}) > 0$ dla $x \in D$.

Niech D_n będzie wstępującym ciągiem otwartych podzbiorów D takich, że $\overline{D}_n \subset D$, D — ograniczony. Wówczas na mocy (1.8) dla dowolnego $E \subset D^c$:

$$\mathbf{P}_x(X(\tau_{D_n}) \in E) = \int_E P_{D_n}(x,z)dz\,.$$

Gdy n dąży do nieskończoności, G_{D_n} rośnie do G_D, a więc P_{D_n} rośnie do P_D. Prawa strona dąży zatem do $\int_E P_D(x,z)dz$. Zdarzenia występujące po lewej stronie tworzą wstępujący ciąg, którego sumą jest zdarzenie polegające na „wyskoczeniu" procesu X ze zbioru D do E. Stąd:[4]

$$\mathbf{P}_x(X(\tau_D) \in E, X(\tau_D) \neq X(\tau_D-)) = \int_E P_D(x,z)dz\,.$$

Powyższa równość stwierdza, że miara $P_D(x,z)dz$ opisuje rozkład zmiennej $X(\tau_D)$, gdy proces „wyskoczył" ze zbioru D.

Ze względu na (1.3) otrzymujemy:

$$P_{D_2}(x,z) = P_{D_1}(x,z) + \int P_{D_2}(y,z)\omega_{D_1}^x(dy) \tag{1.9}$$

[4]Tutaj $X(\tau_D-) = \lim_{s \nearrow \tau_D} X(s)$

jeśli tylko $D_1 \subset D_2$, $x \in D_1$, $z \in D_2^c$.

Klasyczna teoria jądra potencjału Newtona i funkcji Greena, odpowiadająca ruchowi Browna, została rozwinięta na długo przed powstaniem teorii procesów stochastycznych. Motywacje do badań nad funkcjami harmonicznymi pochodziły z fizyki. Prace George'a Greena na temat zastosowania metod analizy matematycznej do teorii pola elektrycznego powstawały w pierwszej połowie XIX wieku. Związek między ruchem Browna i funkcjami harmonicznymi został dostrzeżony dopiero w latach 40. ubiegłego wieku przez Kakutaniego (np. [15]).

1.5 Funkcje α-harmoniczne

Funkcja ciągła $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^d$, nazywana jest harmoniczną, gdy posiada drugie pochodne cząstkowe i $\Delta f = 0$. Równoważnym warunkiem jest równość $f(x) = \mathbf{E}_x f(B(\tau_U))$ dla dowolnego otwartego U prezwartego[5] w D oraz $x \in U$; jeszcze inaczej można zażądać, by ta równość zachodziła dla kul $U \subset\subset D$. Analogiczną definicję wprowadzamy dla symetrycznego procesu α-stabilnego i ułamkowego laplasjanu.

Definicja 1 *Niech $D \subset \mathbf{R}^d$ będzie otwarty i ograniczony. Nieujemną i skończoną p.w. funkcję borelowską f na $\mathbf{R}^d$ nazywamy* α-harmoniczną *na D, jeśli zachodzi jeden z trzech równoważnych warunków:*

- *Dla wszystkich otwartych $B \subset\subset D$ i $x \in B$ zachodzi $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_B)) = \int f(y) \omega_B^x(dy)$.*
- *Dla wszystkich kul $B \subset\subset D$ i $x \in B$ zachodzi $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_B))$.*
- *Dla wszystkich $x \in D$, f jest ciągła w x i $(-(-\Delta)^{\alpha/2}) f(x) = 0$.*

Funkcję f α-harmoniczną na D nazywamy singularnie α-harmoniczną, *jeśli f przyjmuje wartości niezerowe wyłącznie w D. Zbiór funkcji α-harmonicznych oznaczamy $\mathcal{H}(D)$, a zbiór funkcji singularnie α-harmonicznych — $\mathcal{H}_0(D)$.*

[5] Mówimy, że A jest prezwartym podzbiorem B, co zapisujemy $A \subset\subset B$, jeśli A jest ograniczony i $\overline{A} \subset B$

Równoważność wymienionych wyżej trzech warunków jest udowodniona np. w [9].

Miara α-harmoniczna ω_D^x nie jest skupiona na brzegu D, lecz na dopełnieniu D. Podobnie generator $(-(-\Delta)^{\alpha/2})$ procesu X jest operatorem nielokalnym. Dlatego funkcja α-harmoniczna na D musi być określona na całym $\mathbf{R}^d$, a nie tylko na D, jak w klasycznym przypadku.

Przykładów funkcji α-harmonicznych dostarczają wprowadzone we wcześniejszych rozdziałach obiekty. Wobec (1.2), funkcja $x \mapsto \omega_D^x(E)$ jest (niesingularnie) α-harmoniczna w D. Ogólniej, jeśli f_0 jest nieujemną funkcją na D^c, to funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \int f_0(z)\omega_D^x(dz) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_D))$$

dla $x \in D$, $f(x) = f_0(x)$ dla $x \in D^c$, jest bądź stale nieskończona na D, bądź α-harmoniczna na D. W drugim przypadku f nazywamy *regularnie α-harmoniczną*. W pewnym sensie odpowiednikiem takich funkcji w klasycznej teorii są funkcje harmoniczne na D i ciągłe na $\overline{D}$.

Podobnie wobec (1.9) funkcja $x \mapsto \int P_D(x,z)f_0(z)dz + f_0(x)$ jest α-harmoniczna, o ile jest skończona na D. Z kolei (1.3) stwierdza, że $G_D(\cdot, y)$ jest funkcją singularnie α-harmoniczną w $D\backslash\{y\}$. Jest to też funkcja regularnie α-harmoniczna na dowolnym otwartym $U \subset D$, którego domknięcie nie zawiera y.

Rozdział 2

Główne twierdzenia i ich tło historyczne

2.1 Najważniejsze wyniki

Niech D będzie otwartym i ograniczonym podzbiorem $\mathbf{R}^d$. Wybierzmy dowolny punkt odniesienia $x_0 \in D$ i określmy jądro Martina M_D wzorem:

$$M_D(x,y) = \lim_{D \ni z \to y} \frac{G_D(x,z)}{G_D(x_0,z)}\,. \tag{2.1}$$

Celem tej pracy jest udowodnienie, że powyższa granica istnieje dla wszystkich $y \in \partial D$, a więc uzasadnienie poprawności definicji.

K. Michalik i K. Samotij w pracy [20] określili brzeg Martina zbioru D jako podzbiór zbioru wszystkich możliwych granic $\frac{G_D(x,z)}{G_D(x_0,z)}$ gdy z dąży do brzegu, złożony z funkcji (singularnie) α-harmonicznych w D. Nie wiedząc, że granica (2.1) istnieje w każdym punkcie ∂D, autorzy [20] zmuszeni byli stosować abstrakcyjne metody, takie jak uzwarcenie Constantinescu-Cornea zbioru względem rodziny funkcji. Twierdzenie 1 poniżej, główny wynik tej pracy, bardzo upraszcza konstrukcję zawartą w [20].

Jądro Martina wykorzystywane jest do tzw. reprezentacji Martina funkcji singularnie α-harmonicznych na D. Każda taka funkcja jest bowiem postaci $\int M(\cdot,y)\mu(dy)$ dla pewnej wyznaczonej jednoznacznie nieujemnej, skończonej miary borelowskiej μ na brzegu Martina zbioru D. Przeciwnie, każda taka całka jest funkcją singularnie α-harmoniczną na D.

Twierdzenie 1 *Niech D będzie ograniczonym i otwartym podzbiorem $\mathbf{R}^d$. Wybierzmy dowolny punkt $x_0 \in D$. Wówczas dla dowolnego punktu brzegowego $y \in \partial D$ granica (2.1) istnieje dla wszystkich $x \in D$. Funkcja $M_D(x, y)$ jest ściśle dodatnia i jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych $x \in D$ i $y \in \partial D$.*

Jak wspomnieliśmy we wstępie, kluczowym krokiem w dowodzie twierdzenia 1 jest BHP ze stałą niezależną od geometrii dziedziny α-harmoniczności. Sformułujemy i udowodnimy osobno wersję dla kul i dla dowolnych zbiorów, obie będące istotnymi uogólnieniami znanych wcześniej wyników.

Twierdzenie 2 *(Jednostajna brzegowa zasada Harnacka dla kul) Niech D będzie dowolnym otwartym podzbiorem kuli jednostkowej $B(0,1)$. Niech f i g będą nieujemnymi funkcjami regularnie α-harmonicznymi na D, tj. $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_D))$ oraz $g(x) = \mathbf{E}_x g(X(\tau_D))$ dla $x \in D$. Załóżmy, że $f(x) = g(x) = 0$ dla $x \in B(0,1) \setminus D$. Wówczas*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c_3 \frac{f(y)}{g(y)} \tag{2.2}$$

dla wszystkich $x, y \in D \cap B(0, 1/2)$. Stała c_3 zależy wyłącznie od wymiaru d i parametru stabilności α.

Twierdzenie 3 *(Jednostajna brzegowa zasada Harnacka) Niech G będzie dowolnym zbiorem otwartym, zaś F jego zwartym podzbiorem. Niech D będzie dowolnym otwartym i ograniczonym podzbiorem G. Niech wreszcie f i g będą nieujemnymi funkcjami regularnie α-harmonicznymi na D, które zerują się na $G \setminus D$. Wówczas:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c_4 \frac{f(y)}{g(y)}$$

dla wszystkich $x, y \in D \cap F$. Stała c_4 zależy wyłącznie od d, α, G i F.

Drugim, równie trudnym etapem jest dowód twierdzenia o istnieniu granic ilorazów funkcji α-harmonicznych. Poniższa wersja twierdzenie zawiera dodatkową informację o tym, że tempo zbieżności nie zależy od geometrii brzegu. To wzmocnienie tezy wydaje się być dość istotne dla teorii potencjału procesów α-stabilnych (np. do bardziej elementarnego dowodu twierdzenia o reprezentacji Martina, niż ten z [20]), a tylko nieznacznie komplikuje dowód.

Twierdzenie 4 *Niech $\eta > 1$. Wówczas istnieje $r > 0$ o następującej własności. Niech D będzie otwartym podzbiorem $\mathbf{R}^d$, który niepusto przecina się z $B(0,r)$. Załóżmy, że f i g są nieujemnymi funkcjami regularnie α-harmonicznymi na D i równymi zero na $B(0,1) \setminus D$. Wówczas:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \eta \frac{f(y)}{g(y)} \tag{2.3}$$

dla wszystkich $x, y \in D \cap B(0,r)$.

Wniosek 1 *Jeśli D jest ograniczonym, otwartym podzbiorem $\mathbf{R}^d$, $y \in \partial D$, a f i g są nieujemnymi funkcjami regularnie α-harmonicznymi na D, które zerują się na $B(y,r) \setminus D$ dla pewnego $r > 0$, to granica:*

$$\lim_{D \ni z \to y} \frac{f(z)}{g(z)} \quad \textit{istnieje}\,.$$

Dowody powyższych twierdzeń zawarte są w rozdziale trzecim. Poniżej pokrótce przypomnimy wcześniejsze wyniki w tej dziedzinie.

2.2 Wcześniejsze wyniki dotyczące BHP i brzegu Martina dla funkcji α-harmonicznych

Brzegowa zasada Harnacka dla funkcji α-harmonicznych została po raz pierwszy udowodniona w 1997 roku przez K. Bogdana ([6], Twierdzenie 1) dla zbiorów Lipschitza. Mówimy, że $D \subset \mathbf{R}^d$ jest zbiorem Lipschitza ze stałą Lipschitza λ i promieniem lokalizacji R_0, jeśli D jest ograniczony i spełnia następujący warunek. Dla każdego punktu $y \in \partial D$ zbiór $D \cap B(y, R_0)$, po przesunięciu o $(-y)$ i przekształceniu przez pewne przekształcenie ortogonalne $\mathbf{R}^d$, jest postaci:

$$\big\{(x_1, ..., x_d) \in \mathbf{R}^d : x_d > f_y(x_1, ..., x_{d-1})\big\} \cap B(0, R_0)\,,$$

gdzie f_y jest pewną funkcją spełniającą warunek Lipschitza ze stałą λ.

Wynik pracy [6] jest analogiczny do Twierdzenia 3 przy dodatkowym założeniu, że D jest zbiorem Lipschitza i ze stałą c_4 zależną od d, α, D, F, G.

Ponadto w [6] dowiedziono hölderowskiej ciągłości[1] ilorazu f/g na $D \cap F$. Odpowiada to Twierdzeniu 4 dla zbiorów Lipschitza D z dodatkową informacją, że $r = C(\eta - 1)^{1/\gamma}$ dla pewnych $C > 0$ i $\gamma \in (0, 1)$ zależących od d, α, D.

Dowód w [6] jest bardzo analityczny. Bardziej probabilistyczne podejście zostało zaprezentowane przez K. Bogdana i T. Byczkowskiego w [8]. Z.-Q. Chen i R. Song w pracy [10] oraz K. Bogdan w [7] udowodnili niezależnie od siebie twierdzenie o reprezentacji Martina funkcji singularnie α-harmonicznych na zbiorach Lipschitza z brzegiem Martina utożsamionym z brzegiem topologicznym. Oczywiście poprawność definicji w tym przypadku była konsekwencją twierdzenia o istnieniu granic z [6].

Uogólnienie powyższych rezultatów na szerszą klasę zbiorów znajduje się w pracy [23] autorstwa R. Song oraz J.-M. Wu. Udowodniono tam, że brzegowa zasada Harnacka zachodzi dla dowolnego zbioru otwartego. Ściślej rzecz ujmując, Twierdzenie 3.1 z [23] jest równoważne Twierdzeniu 2 ze stałą $c_3 = C\kappa^{-d-\alpha}$, gdzie C zależy wyłącznie od d i α, zaś κ jest promieniem największej kuli, którą można wpisać w $D \cap B(0, 1/2)$.

Korzystając z tej wersji BHP, autorzy pracy [23] dowodzą twierdzenia o istnieniu granic ilorazów funkcji α-harmonicznych przy brzegu (a nawet Hölderowskiej ciągłości tych ilorazów) oraz twierdzenia o reprezentacji funkcji singularnie α-harmonicznych na tzw. κ-grubych zbiorach. Otwarty i ograniczony zbiór $D \subset \mathbf{R}^d$ nazywamy κ-grubym, gdy istnieje promień $R_0 > 0$ o następującej własności. Dla każdego $y \in \partial D$ oraz $r < R_0$, w zbiór $D \cap B(y, r)$ można wpisać kulę o promieniu κr. Czynnikiem, który uniemożliwił autorom [23] dowiedzenie tych twierdzeń w pełnej ogólności (tj. dla dowolnego otwartego D), jest zależność stałej w uzyskanej przez nich BHP od współczynnika κ.

[1]Funkcja φ jest hölderowsko ciągła na E, jeśli $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^\gamma$ dla $x, y \in E$ oraz pewnych stałych $C > 0$ i $\gamma \in (0, 1]$. Liczbę γ nazywamy stopniem, a C — stałą hölderowskiej ciągłości

2.3 BHP i reprezentacja Martina w przypadku klasycznym

Zacytowane w poprzednim podrozdziale wyniki są odpowiednikami znanych twierdzeń dla funkcji harmonicznych. Pierwsi brzegową zasadę Harnacka dla zbiorów Lipschitza udowodnili niezależnie B. Dahlberg ([11], Twierdzenie 4) i A. Ancona ([1], Twierdzenie 5.1). Co ciekawe, wynik ten sformułowany został kilka lat wcześniej przez J. T. Kempera [16], lecz przedstawiony tam dowód zawierał błąd. Z kolei brzegowa zasada Harnacka dla zbiorów na płaszczyźnie (czyli przypadek $d = 2$) znana była już w latach 50. Trudności z jego uogólnieniem na wyższe wymiary miały swoje źródło w tym, że wyłącznie gdy $d = 2$, można stosować metody analizy zespolonej. Przypomnijmy, że funkcje harmoniczne na podzbiorach płaszczyzny są blisko związane w funkcjami holomorficznymi.

Uogólnienie BHP na zbiory o brzegu dostępnym niestycznie (NTA, ang. *non-tangentially accessible domains*), zwane inaczej zbiorami posiadającymi własność wewnętrznego korkociągu, zawarte jest w pracy D. S. Jerisona i C. E. Keniga ([14], Twierdzenie 5.1). Również tam po raz pierwszy udowodniono hölderowską ciągłość ilorazów funkcji harmonicznych na zbiorach NTA. Wynik ten był nowy nawet dla zbiorów o gładkim brzegu. Zbiory NTA są spójnymi odpowiednikami zbiorów κ-grubych.

Innym kierunkiem uogólnień było poszukiwanie możliwie szerokiej rodziny operatorów, dla których zachodzi BHP na zbiorach Lipschitza. Już w [1] udowodniono BHP dla pewnej klasy eliptycznych operatorów w odpowiednim sensie analogicznych do Δ. Uzasadnione więc wydają się próby przeniesienia tego wyniku na tzw. operatory całkowo-różniczkowe. Ułamkowy laplasjan $(-(-\Delta)^{\alpha/2})$ jest najprostszym i najlepiej zbadanym przykładem wśród takich operatorów.

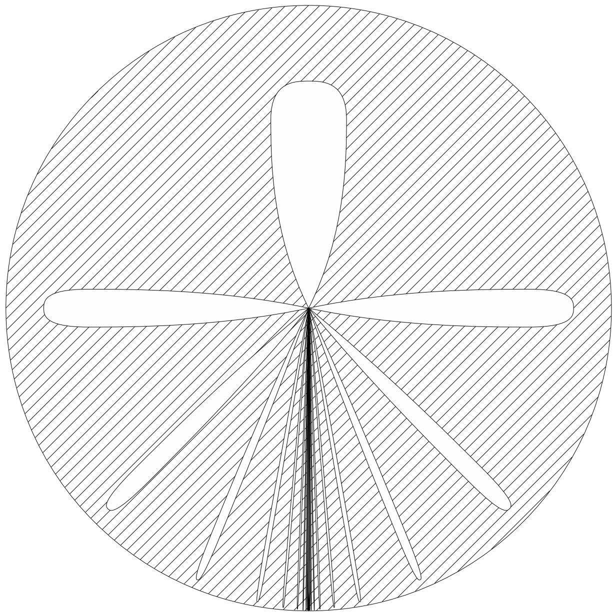
Reprezentację funkcji harmonicznych na dowolnym zbiorze otwartym za pomocą funkcji, którą dziś nazywamy jądrem Martina, uzyskał po raz pierwszy R. Martin w pracy [19] z 1941 roku. Udowodnił on, że każda nieujemna funkcja harmoniczna na spójnym zbiorze otwartym D ma reprezentację postaci $\int f(x)\mu(df)$, gdzie μ jest pewną miarą na rodzinie funkcji minimalnie harmonicznych w D. Przypomnijmy, że funkcję harmoniczną nazywamy minimalnie harmoniczną, jeśli jedynymi nieujemnymi funkcjami harmonicznymi przez nią dominowanymi są jej podwielokrotności.

Interesujące jest to, że klasyczny odpowiednik Twierdzenia 2 nie jest prawdziwy, nawet jeśli dopuścimy zależność stałej c_3 od zbioru D. Przykładem jest zbiór na rysunku 2.1 na stronie 19.

Również klasyczny brzeg Martina nieregularnych zbiorów zachowuje się inaczej, niż brzeg Martina dla funkcji α-harmonicznych. W ogólności bowiem może on być istotnie większy od brzegu topologicznego. Przykładem jest znów zbiór z rysunku 2.1, w którym punkt środkowy w pewnym sensie występuje w brzegu Martina nieskończenie wiele razy — jest tam bowiem nieskończenie wiele różnych punktów skupienia ilorazu klasycznych funkcji Greena.

Udowodnione w tej pracy twierdzenia pokazują zatem, że choć teoria potencjału α-stabilnych procesów skokowych i klasyczna teoria potencjału ruchu Browna są w dużym stopniu podobne, to w przypadku zbiorów o nieregularnych brzegach ta pierwsza jest dużo prostsza.

Zakończmy ten rozdział pewnym nierosztrzygniętym dotąd pytaniem. Wiadomo, że ilorazy funkcji α-harmonicznych na zbiorach Lipschitza (względnie na zbiorach κ-grubych) są hölderowsko ciągłe ze stopniem, który (zgodnie ze znanymi obecnie oszacowaniami) rośnie wraz ze stałą Lipschitza λ (względnie rośnie, gdy κ maleje). Ciekawe jest więc pytanie o hölderowską ciągłość w przypadku dowolnego otwartego zbioru, lub też o asymptotykę zależności r od η dla η bliskich 1 w Twierdzeniu 4.



Rysunek 2.1: Przykład zbioru D, na którym nie zachodzi brzegowa zasada Harnacka dla funkcji harmonicznych. Przyjmijmy, że zewnętrzny okrąg to $\partial B(0,1)$. Niech $f(x)$ będzie prawdopodobieństwem, że ruch Browna startujący z punktu x w chwili wyjścia z D znajduje się na $\partial B(0,1)$, a $g(x)$ — analogicznym prawdopodobieństwem trafienia w górną połowę $\partial B(0,1)$. Wówczas f i g są porównywalne ze sobą w punktach o dodatniej drugiej współrzędnej. Z drugiej strony dla każdego $C > 0$ można znaleźć punkty w pobliżu dolnej półosi pionowej o dowolnie małej normie, w których wartość f jest co najmniej C razy większa od wartości g. Intuicyjnie wynika to z faktu, że aby trafić z takiego punktu w $\partial B(0,1)$, cząsteczka poruszająca się zgodnie z ruchem Browna musi tylko przedostać się przez bardzo wąski trójkąt. Aby dojść do górnego półokręgu, musi dodatkowo przedostać się przez bardzo wiele wąskich przejść między zewnętrzem okręgu a „płatkami” wyciętymi z koła jednostkowego

Rozdział 3

Dowody

3.1 Pewne własności funkcji α-harmonicznych

Jeśli D jest zbiorem Lipschitza, to miara harmoniczna $\omega_D^x(\partial D)$ brzegu D jest równa zero dla wszystkich $x \in D$ ([6], Lemat 6). Wobec (1.8) oznacza to, że w tym przypadku $\omega_D^x(dz) = P_D(x,z)dz$.

Jeśli $x \in D \subset D'$, gdzie D jest otwarty, a D' jest zbiorem Lipschitza, to na mocy (1.2) mamy $\omega_D^x(\partial D') \leq \omega_{D'}^x(\partial D') = 0$, a więc ω_D^x jest na $(D')^c$ absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a, z gęstością $P_D(x,\cdot)$. Będziemy z tego faktu korzystali w przypadku, gdy D' jest kulą.

Lemat 1 *(Nierówności Harnacka) Jeśli f jest nieujemną funkcją α-harmoniczną na kuli $B = B(x_0, r)$, to (por. [21]; [2], Lemat 2.1; [6], Lemat 1):*

$$\frac{(1-|x|)^{\alpha/2}}{(1+|x|)^{d-\alpha/2}} f(x_0) \leq f(x_0 + rx) \leq \frac{(1+|x|)^{\alpha/2}}{(1-|x|)^{d-\alpha/2}} f(x_0)\,, \quad |x| < 1\,. \tag{3.1}$$

W szczególności $f(y) \leq 2^d f(x_0) \leq 4^d f(z)$ dla $y, z \in B(x_0, r/2)$.

Jeśli f jest harmoniczna na $B_1 \cup B_2$, gdzie $B_i = B(x_i, r_i)$ są rozłącznymi kulami, to (por. [6], Lemat 2):

$$f(x_1) \leq c_5 \frac{|x_1 - x_2|^{d+\alpha}}{r_1^d r_2^\alpha} f(x_2)\,, \tag{3.2}$$

dla pewnego $c_5(d, \alpha)$.

DOWÓD: Dla $\eta \in (0,1]$ niech $B_\eta = B(x_0, \eta r)$. Wobec definicji funkcji α-harmonicznej, dla $\eta < 1$ zachodzi $f(y) = \int P_{B_\eta}(y,z) f(z) dz$, $y \in B_\eta$. Stąd i z (1.1) łatwo:

$$\frac{(1-\eta^{-1}|x|)^{\alpha/2}}{(1+\eta^{-1}|x|)^{d-\alpha/2}} f(x_0) \le f(x_0 + rx) \le \frac{(1+\eta^{-1}|x|)^{\alpha/2}}{(1-\eta^{-1}|x|)^{d-\alpha/2}} f(x_0)\,.$$

Gdy przejdziemy do granicy $\eta \nearrow 1$, otrzymamy (3.1).

Zauważmy, że (3.1) oznacza, że $f(x_1) \le 2^d f(x)$ dla $x \in B(x_1, r_1/2)$. Stąd:

$$f(x_2) \ge \int\limits_{B(x_1, r_1/2)} P_{B_2}(x_2, x) f(x) dx \ge \frac{c_1 \omega_{d-1} r_1^d r_2^\alpha}{2^{3d+\alpha} d\,|x_1 - x_2|^{d+\alpha}} f(x_1)\,.$$

To dowodzi (3.2). $\square$

Z powyższego lematu wynika między innymi, że jeśli f jest α-harmoniczna na D i nie jest stale równa zero na D, to jest ściśle dodatnia na całym D. Zauważmy, że D nie musi być spójny, w odróżnieniu od klasycznego przypadku funkcji harmonicznych.

Omówimy teraz tzw. własności skalowania. Jeśli $D \subset \mathbf{R}^d$ jest otwarty i ograniczony oraz $r > 0$, to określamy $rD = \{rx : x \in D\}$. Dla funkcji borelowskiej f niech $f_r(x) = f(x/r)$. Korzystając z jawnej formuły na ułamkowy laplasjan, bez trudu sprawdzamy, że jeśli $f \in C_c^2(\mathbf{R}^d)$, to $(-(-\Delta)^{\alpha/2}) f_r(rx) = r^{-\alpha}(-(-\Delta)^{\alpha/2}) f(x)$. W szczególności jeśli f jest α-harmoniczna w D, to f_r jest α-harmoniczna w rD.

Proces $rX(t)$ ma ten sam rozkład, co $X(r^\alpha t)$. Stąd wynika, że rozkład $X(\tau_{rD})$ jest przeskalowaniem rozkładu $X(\tau_D)$. Ściślej zachodzi $\omega_{rD}^{rx}(rE) = \omega_D^x(E)$.

Wobec powyższego oraz postaci potencjału, otrzymujemy równość $G_{rD}(rx, ry) = r^{\alpha-d} G_D(x,y)$. Stąd i ze wzoru na ν dostajemy $P_{rD}(rx, ry) = r^{-d} P_D(x,y)$.

Ze względu na własności skalowania procesu (lub funkcji Greena) otrzymujemy wreszcie $\mathbf{E}_{rx}\tau_{rD} = r^\alpha \mathbf{E}_x \tau_D$.

Pokreślmy jeszcze, że proces X jest niezmienniczy na translacje. Dzięki tym własnościom możemy sprowadzić problemy dotyczące lokalnego zachowania funkcji harmonicznych w dowolnym punkcie do pytań dotyczących ustalonego otoczenia zera, np. kuli jednostkowej.

Odtąd przez B_r będziemy oznaczali kulę $B(0,r)$. Jeśli $D \subset \mathbf{R}^d$, to piszemy $D_r = D \cap B_r$.

3.2 Dowód brzegowej zasady Harnacka

Poniższy wynik został po raz pierwszy uzyskany w [23] w trakcie dowodu Lematu 3.1, kroku pośredniego w dowodzie wersji brzegowej zasady Harnacka. Posiada on bardzo ciekawą interpretację probabilistyczną: jeśli proces startuje z dala od brzegu kuli jednostkowej, to szansa wyskoczenia z podzbioru tej kuli do jej dopełnienia szacuje się przez wartość oczekiwaną czasu opuszczenia rozważanego podzbioru.

Lemat 2 *Dla każdego* $p \in (0,1)$ *istnieje stała* $c_6(d,\alpha,p)$ *taka, że dla otwartych* $D \subset B(0,1)$*:*

$$\mathbf{P}_x(|X(\tau_D)| \geq 1) = \omega_D^x(B(0,1)^c) \leq c_6\, \mathbf{E}_x\tau_D\,, \quad x \in D \cap B(0,p)\,. \tag{3.3}$$

DOWÓD: Niech $0 < p < 1$. Niech $\varphi \in C_c^2(\mathbf{R}^d)$ będzie określona wzorami $\varphi(x) = 1$ dla $x \in B_p$, $\varphi(x) = 0$ gdy $x \in B_1^c$ oraz $\varphi(x) = 3(1-p)^{-2}(|x|-p)^2 - 2(1-p)^{-3}(|x|-p)^3$ jeśli $x \in B_1 \setminus B_p$ (tak, aby $0 \leq \varphi(x) \leq 1$).

Niech $x \in D_p$. Wobec (1.7) zachodzi:

$$\begin{aligned}\omega_D^x(B_1^c) &= \int_{B_1^c} (\varphi(x) - \varphi(y))\omega_D^x(dy) \leq \int_{D^c} (\varphi(x) - \varphi(y))\omega_D^x(dy) \\ &= \int G_D(x,y)(-\Delta)^{\alpha/2}\varphi(y)dy \leq \sup|(-\Delta)^{\alpha/2}\varphi(y)| \int G_D(x,y)dy\,.\end{aligned}$$

Wystarczy zauważyć, że wobec (1.6) funkcja $(-\Delta)^{\alpha/2}\varphi$ jest ograniczona przez stałą $c_6(d,\alpha,p)$, zaś $\int G_D(x,y)dy = \mathbf{E}_x\tau_D$. $\square$

Okazuje się, że analogiczne oszacowanie zachodzi również dla prawdopodobieństw skoku do podzbiorów B_1^c w miejsce całego dopełnienia kuli jednostkowej. Aby uzyskać ten rezultat, potrzebujemy jednej definicji i pomocniczego lematu.

Dla $x \in \mathbf{R}^d$, $\varepsilon > 0$ i nieujemnej funkcji f określamy:

$$\Lambda_\varepsilon(f) = \int_{B_\varepsilon^c} \nu(y)f(y)dy\,.$$

Zauważmy, że powyższy funkcjonał posiada własność skalowania. Jeśli bowiem $f_r(x) = f(x/r)$, to:

$$\Lambda_{r\varepsilon}(f_r) = r^{-\alpha}\Lambda_\varepsilon(f)\,.$$

Lemat 3 *Niech $p \in (0,1)$. Istnieje stała $c_7(d,\alpha,p)$ taka, że dla wszystkich nieujemnych funkcji f regularnie α-harmonicznych na otwartym $D \subset B(0,1)$, które zerują się na $B(0,1) \setminus D$, zachodzi:*

$$f(x) \leq c_7\, \Lambda_p(f)\,, \quad x \in D \cap B(0,p)\,. \tag{3.4}$$

Dowód: Niech $q = (1+p)/2$. Wobec (1.9) dla $x \in D_p$ i $r \in (q,1)$ zachodzi:

$$f(x) = \int_{B_r^c} f(y)\omega_{D_r}^x(dy) \leq \int_{B_r^c} f(y)\omega_{B_r}^x(dy)\,.$$

Na mocy twierdzenia Fubiniego otrzymujemy więc:

$$f(x) \leq \frac{1}{1-q}\int_q^1 \int_{B_r^c} f(y)\omega_{B_r}^x(dy)dr = \int_{B_q^c} K(x,y)f(y)dy\,,$$

gdzie zgodnie z (1.1):

$$K(x,y) = \frac{1}{1-q}\int_q^{1\wedge|y|} P_r(x,y)dr = \frac{c_1}{1-q}\int_q^{1\wedge|y|} \left(\frac{r^2-|x|^2}{|y|^2-r^2}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{|x-y|^d}\,dr$$

dla $y \in B_q^c$. Z następujących nierówności:

$$\frac{|x-y|}{|y|} \geq \frac{|y|-|x|}{|y|} \geq 1 - \frac{p}{q}\,, \quad \frac{|y|+r}{|y|} \geq 1 \quad \text{oraz} \quad r^2 - |x|^2 \leq 1$$

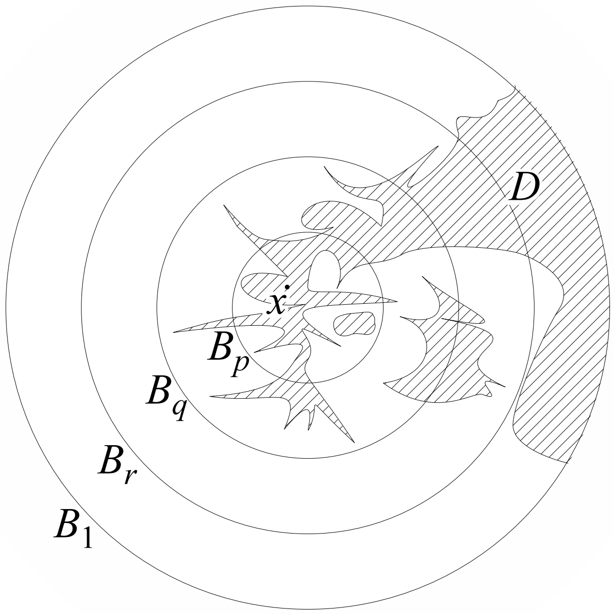
wynika, że:

$$K(x,y) \leq \frac{C}{|y|^{d+\alpha/2}} \int_q^{1\wedge|y|} \frac{dr}{(|y|-r)^{\alpha/2}} \leq \frac{C'}{|y|^{d+\alpha}}\,,$$

gdzie C i C' są stałymi zależącymi tylko od d, α, p. Ostatecznie uzyskujemy $f(x) \leq C' \int_{B_q^c} |y|^{-d-\alpha} f(y)dy$, co należało udowodnić. □

Powyżej uśredniliśmy miary harmoniczne współśrodkowych kul o różnych promieniach, aby uzyskać ograniczone względem drugiej zmiennej jądro $K(x,y)$. Ta tzw. regularyzacja jądra Poissona po raz pierwszy została wykorzystana w [6] w dowodzie Lematu 4. Metoda ta odpowiada zastępowaniu średnich sferycznych uśrednianiem po całej kuli w klasycznej teorii funkcji harmonicznych.

Teraz możemy udowodnić główny wynik tego podrozdziału.



Rysunek 3.1: Ilustracja oznaczeń przyjętych w dowodzie Lematu 4

Lemat 4 *Niech $p \in (0,1)$. Istnieje stała $c_8(d,\alpha,p)$ taka, że jeśli D jest otwartym podzbiorem kuli jednostkowej, a f funkcją regularnie α-harmoniczną na D i równą zero na $B(0,1) \setminus D$, to:*

$$c_8^{-1}\Lambda_p(f)\,\mathbf{E}_x\tau_D \le f(x) \le c_8\,\Lambda_p(f)\,\mathbf{E}_x\tau_D\,, \quad x \in D \cap B(0,p)\,. \tag{3.5}$$

DOWÓD: Wybierzmy dowolnie q i r tak, aby $0 < p < q < r < 1$ (por. rysunek 3.1) i niech $x \in D_p$. Wówczas:

$$f(x) = \int_{B_r^c} f(z)\omega_{D_q}^x(dz) + \int_{B_r \setminus B_q} f(z)\omega_{D_q}^x(dz)\,. \tag{3.6}$$

Jeśli $y \in D_q$ i $z \in B_r^c$, to:

$$1 - \frac{q}{r} \le \frac{|z| - |y|}{|z|} \le \frac{|y-z|}{|z|} \le \frac{|z|+|y|}{|z|} \le 1 + \frac{q}{r}\,.$$

Ponadto zgodnie z uwagą poczynioną na początku podrozdziału 3.1, miara $\omega^x_{D_q}$ ma na B_q^c gęstość równą $P_{D_q}(x,\cdot)$. Stąd:

$$\begin{aligned}\int_{B_r^c} f(z)\omega^x_{D_q}(dz) &= \int_{B_r^c}\int_{D_q} G_{D_q}(x,y)\nu(y-z)f(z)dydz \\ &\asymp C\,\mathbf{E}_x\tau_{D_q}\int_{B_r^c}\nu(z)f(z)dz\end{aligned} \tag{3.7}$$

ze stałą $C(d,\alpha,q,r)$; zapis $\varphi \asymp C\psi$ oznacza, że $C^{-1}\psi \le \varphi \le C\psi$.

Aby oszacować drugą całkę po prawej stronie wzoru (3.6), korzystamy z (3.3), (3.4) i własności skalowania:

$$\int_{B_r\setminus B_q} f(z)\omega^x_{D_q}(dz) \le \omega^x_{D_q}(B_q^c)\sup_{B_r\setminus B_q} f \le C'\,\mathbf{E}_x\tau_{D_q}\int_{B_r^c}\nu(z)f(z)dz \tag{3.8}$$

ze stałą $C'(d,\alpha,p,q,r)$. Skoro f jest nieujemna, z (3.6), (3.7) i (3.8) wynika, że:

$$f(x) \asymp C''\Lambda_r(f)\,\mathbf{E}_x\tau_{D_q}\,, \tag{3.9}$$

gdzie stała C'' zależy od d,α,p,q,r. Powyższe oszacowanie jest już bardzo bliskie dowodzonej nierówności.

Oczywiście $\mathbf{E}_x\tau_{D_q} \le \mathbf{E}_x\tau_D$. Z (1.4) i (3.3) otrzymujemy przeciwne oszacowanie:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\tau_D &= \mathbf{E}_x\tau_{D_q} + \int_{B_q^c}\mathbf{E}_z\tau_D\,\omega^x_{D_q}(dz) \le \mathbf{E}_x\tau_{D_q} + \omega^x_{D_q}(B_q^c)\sup_{y\in D}\mathbf{E}_y\tau_D \\ &\le \mathbf{E}_x\tau_{D_q}(1 + C^{(3)}\sup_{y\in B_1}\mathbf{E}_y\tau_{B_1}) = C^{(4)}\,\mathbf{E}_x\tau_{D_q}\,;\end{aligned}$$

stałe $C^{(3)}$ i $C^{(4)}$ zależą wyłącznie od d,α,p,q. Niewątpliwie $\Lambda_r(f) \le \Lambda_p(f)$. Z kolei z (3.4) wynika, że także:

$$\Lambda_p(f) \le \int_{B_r^c}\nu(z)f(z)dz + \frac{C^{(5)}|D_r|}{p^{d+\alpha}}\sup_{D_r} f \le C^{(6)}\Lambda_r(f)$$

ze stałymi $C^{(5)}(d,\alpha)$ oraz $C^{(6)}(d,\alpha,p,r)$. Te nierówności wraz ze znalezionym oszacowaniem (3.9) dowodzą wzoru (3.5). $\square$

Zauważmy, że wzór (3.5) nie zmienia się przy skalowaniu. Jeśli bowiem $r > 0$, to $\mathbf{E}_{rx}\tau_{rD} = r^\alpha\mathbf{E}_x\tau_D$, zaś $\Lambda_{rp}(f_r) = r^{-\alpha}\Lambda_p(f)$.

Dowód Twierdzenia 2: Wobec wzoru (3.5) mamy:

$$
\begin{aligned}
f(x)g(y) &\le (C\,\mathbf{E}_x\tau_D\,\Lambda_{1/2}(f))(C\,\mathbf{E}_y\tau_D\,\Lambda_{1/2}(g)) \\
&= C^4(C^{-1}\mathbf{E}_x\tau_D\,\Lambda_{1/2}(g))(C^{-1}\mathbf{E}_y\tau_D\,\Lambda_{1/2}(f)) \le C^4 f(y)g(x)\,,
\end{aligned}
$$

gdzie $C = c_8(d,\alpha,1/2)$. $\square$

Oznaczmy $\Lambda_{x,r}(f) = \int_{B(x,r)^c} \nu(z-x)f(z)dz$.

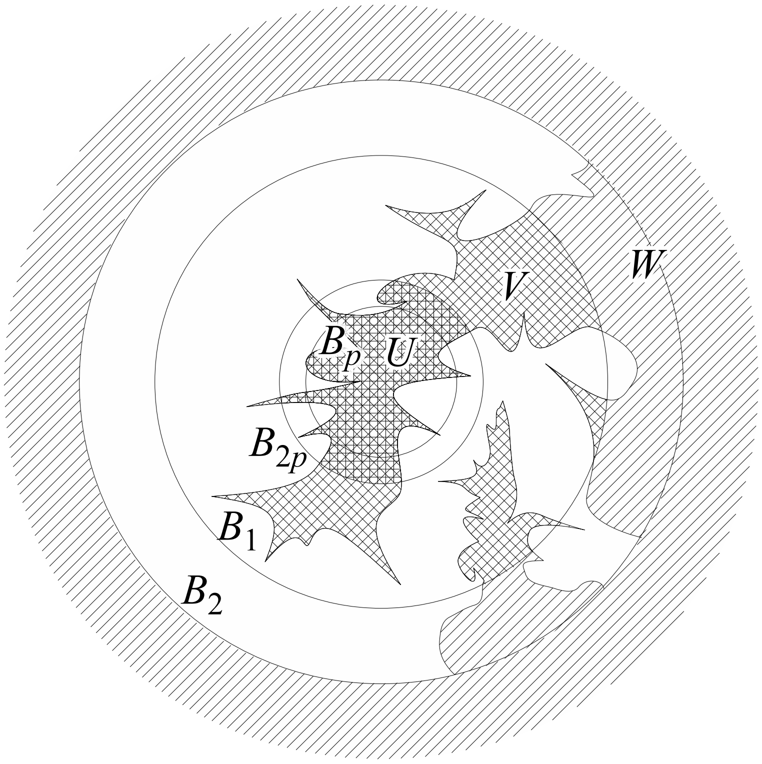
Dowód Twierdzenia 3: Niech $p = 1/2$. Dla każdego punktu $x \in F$ niech $B(x,r_x)$ będzie kulą prezwartą w G. Z pokrycia otwartego $\{B(x,pr_x) : x \in F\}$ zbioru zwartego F wybierzmy podpokrycie skończone. Niech składa się ono z kul $B(x_j,pr_j)$, $j = 1,2,...,k$. Określamy $B_j = B(x_j,r_j)$, $B'_j = B(x_j,pr_j)$, $R = \operatorname{diam} F$ oraz $r = \min\{r_1,r_2,...,r_k\}$. Zauważmy, że na każdym zbiorze $D \cap B_j$ funkcje f i g są regularnie α-harmoniczne, więc możemy stosować do nich (3.5). Niech $x \in D\cap B'_i$, $y \in D \cap B'_j$. Otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{\mathbf{E}_x\tau_{D\cap B_i}} &\le C\left(\int_{(B'_i\cup B'_j)^c} \nu(x_i-z)f(z)dz + \int_{B'_j\setminus B'_i} \nu(x_i-z)f(z)dz\right) \\
&\le C\left(\left(1+\frac{R}{r}\right)^{d+\alpha}\int_{(B'_j)^c} \nu(x_j-z)f(z)dz + \mathcal{A}_{d,-\alpha}\,r^{-d-\alpha}\int_{D\cap B'_j} f(z)dz\right) \\
&\le C'\frac{f(y)}{\mathbf{E}_y\tau_{D\cap B_j}} + C''\Lambda_{x_j,pr_j}(f)\int_{D\cap B'_j}\mathbf{E}_z\tau_{D\cap B_j}dz\,.
\end{aligned}
$$

Tutaj $C = c_5(d,\alpha,1/2)$, zaś C' i C'' zależą wyłącznie od d,α,r,R. Zauważmy, że $\mathbf{E}_z\tau_{D\cap B_j} \le \mathbf{E}_z\tau_{B_j}$, a więc $\int_{D\cap B'_j}\mathbf{E}_z\tau_{D\cap B_j}dz$ nie przekracza stałej. Ponadto $\Lambda_{x_j,pr_j}(f) \le Cf(y)/\mathbf{E}_y\tau_{D\cap B_j}$. To dowodzi, że:

$$
\frac{f(x)}{\mathbf{E}_x\tau_{D\cap B_i}} \le C^{(3)}\frac{f(y)}{\mathbf{E}_y\tau_{D\cap B_j}}
$$

ze stałą $C^{(3)}(d,\alpha,r,R)$. To wraz z analogiczną nierównością dla funkcji g dowodzi twierdzenia. $\square$



Rysunek 3.2: Ilustracja oznaczeń przyjętych w dowodzie Lematów 5 i 6. Dla przejrzystości przy dobieraniu promieni kul nie zachowano skali

3.3 Dowód twierdzenia o istnieniu granic ilorazów funkcji α-harmonicznych

Dla skrócenia zapisu, wprowadźmy następującą definicję. Jeśli φ jest funkcją na zbiorze E, to określamy *względną oscylację* funkcji φ na zbiorze E wzorem:

$$\mathrm{RO}_E\,\varphi = \frac{\sup_E \varphi}{\inf_E \varphi}\,.$$

Przyjmujemy ponadto, że $\mathrm{RO}_E\,\varphi = 1$ gdy E jest zbiorem pustym.

Niech do końca tego podrozdziału $C = c_8(d, \alpha, 1/2)$. Udowodnimy wpierw dwa techniczne lematy. Pierwszy dotyczy zbiorów zajmujących niewielką część kuli jednostkowej, drugi — przeciwnie.

Lemat 5 *Niech* $0 < p < 1/2$, $D \subset B(0,2)$, $\varepsilon > 0$. *Niech ponadto* f *i* g *będą regularnie* α*-harmoniczne na* D *i równe zero na* $B(0,2) \setminus D$. *Załóżmy, że:*

$$\Lambda_p(\mathbf{1}_{B_1} f) \le \varepsilon \Lambda_1(f) \quad \textit{oraz} \quad \Lambda_p(\mathbf{1}_{B_1} g) \le \varepsilon \Lambda_1(g)\,.$$

Wówczas zachodzi:

$$\mathrm{RO}_{D_p}(f/g) \le (1+p)^{2d+2\alpha}((1-p)^{-d-\alpha} + C\varepsilon)^2\,. \tag{3.10}$$

Dowód: Niech $U = D \cap B_{2p}$, $V = D \cap (B_1 \setminus B_{2p})$, $W = B_1^c$ (zob. rysynek 3.2). Dla $x \in U$ mamy:

$$f(x) = \int_V f(y)\omega_U^x(dy) + \int_W f(y)\omega_U^x(dy) = f_1(x) + f_2(x)\,.$$

Na mocy (3.5) i skalowania, jeśli $x \in D_p$, to:

$$0 \le f_1(x) \le C\,\Lambda_p(f_1)\,\mathbf{E}_x\tau_U \le C\,\Lambda_p(\mathbf{1}_{B_1} f)\,\mathbf{E}_x\tau_U \le C\varepsilon\Lambda_1(f)\,\mathbf{E}_x\tau_U\,.$$

Ponadto $f_2(x) = \int_W \int_U G_U(x,y)\nu(y-z)f(z)dydz$ oraz $1-p \le |y-z|/|z| \le 1+p$, a więc:

$$(1+p)^{-d-\alpha}\Lambda_1(f)\,\mathbf{E}_x\tau_U \le f_2(x) \le (1-p)^{-d-\alpha}\Lambda_1(f)\,\mathbf{E}_x\tau_U\,.$$

Powyższe nierówności wraz z analogicznymi oszacowaniami dla g dają:

$$\frac{(1+p)^{-d-\alpha}}{((1-p)^{-d-\alpha} + C\varepsilon)} \cdot \frac{\Lambda_1(f)}{\Lambda_1(g)} \le \frac{f(x)}{g(x)} \le \frac{((1-p)^{-d-\alpha} + C\varepsilon)}{(1+p)^{-d-\alpha}} \cdot \frac{\Lambda_1(f)}{\Lambda_1(g)}\,.$$

Stąd (3.10). □

Lemat 6 *Niech* $0 < p < 1/4$, $D \subset B(0,2)$, $\varepsilon > 0$. *Niech ponadto* f *i* g *będą regularnie* α*-harmoniczne na* D *i równe zero na* $B(0,2) \setminus D$. *Załóżmy, że:*

$$\Lambda_1(f) \le \varepsilon \Lambda_{2p}(\mathbf{1}_{B_1} f) \quad \textit{oraz} \quad \Lambda_1(g) \le \varepsilon \Lambda_{2p}(\mathbf{1}_{B_1} g)\,.$$

Wówczas:

$$\mathrm{RO}_{D_p}\frac{f}{g} \le (1+C^2\varepsilon)^2 + (1+C^2\varepsilon)\frac{C^4-1}{C^4+1}\left(\mathrm{RO}_{D_1}\frac{f}{g} - 1\right)\,. \tag{3.11}$$

DOWÓD: Niech tak jak poprzednio $U = D \cap B_{2p}$, $V = D \cap (B_1 \setminus B_{2p})$, $W = B_1^c$. Dla $x \in U$ zachodzi więc znów:

$$f(x) = \int_V f(y)\omega_U^x(dy) + \int_W f(y)\omega_U^x(dy) = f_1(x) + f_2(x)\,.$$

Tym razem f_1 jest składnikiem dominującym. W istocie, niech $x \in D_p$. Korzystając dwukrotnie z (3.5) oraz z tego, że $\Lambda_{1/2}(f_2) = \Lambda_1(f)$, otrzymujemy:

$$f_2(x) \le C\Lambda_1(f)\,\mathbf{E}_x\tau_U \le C\varepsilon\Lambda_{2p}(\mathbf{1}_{B_1}f)\,\mathbf{E}_x\tau_U \le C\varepsilon\Lambda_p(f_1)\,\mathbf{E}_x\tau_U \le C^2\varepsilon f_1(x)\,.$$

Stąd $(1 + C^2\varepsilon)^{-1}f(x) \le f_1(x) \le f(x)$ dla $x \in D_p$. Analogiczne oszacowanie oczywiście zachodzi także dla funkcji g.

Niech $m = \inf_{U\cup V}(f/g)$, $M = \sup_{U\cup V}(f/g)$. Funkcje $f_1 - mg_1$ oraz $Mg_1 - f_1$ są nieujemnymi funkcjami regularnie α-harmonicznymi na U, a więc na mocy brzegowej zasady Harnacka (ze stałą C^4; por. dowód Twierdzenia 2):

$$\sup_{D_p}\frac{f_1 - mg_1}{g_1} \le C^4\inf_{D_p}\frac{f_1 - mg_1}{g_1} \quad \text{oraz} \quad \sup_{D_p}\frac{Mg_1 - f_1}{g_1} \le C^4\inf_{D_p}\frac{Mg_1 - f_1}{g_1}$$

Gdy dodamy te nierówności stronami i pogrupujemy takie same składniki, otrzymamy:

$$(C^4 + 1)\left(\sup_{D_p}\frac{f_1}{g_1} - \inf_{D_p}\frac{f_1}{g_1}\right) \le (C^4 - 1)(M - m)\,.$$

Biorąc pod uwagę znalezione oszacowania na f_1 i g_1, otrzymujemy:

$$(C^4 + 1)\left(\frac{1}{1 + C^2\varepsilon}\sup_{D_p}\frac{f}{g} - (1 + C^2\varepsilon)\inf_{D_p}\frac{f}{g}\right) \le (C^4 - 1)(M - m)\,,$$

czyli (po podzieleniu prawej strony przez m, a lewej przez $\inf_{D_p}(f/g) \ge m$):

$$\frac{1}{1 + C^2\varepsilon}\,\mathrm{RO}_{D_p}\frac{f}{g} - (1 + C^2\varepsilon) \le \frac{C^4 - 1}{C^4 + 1}\left(\mathrm{RO}_{U\cup V}\frac{f}{g} - 1\right)\,.$$

Stąd teza lematu. $\square$

Po tym przygotowaniu możemy udowodnić główne twierdzenie tej części.

DOWÓD TWIERDZENIA 4: Niech:

$$\varphi(t) = (1 + C^2\varepsilon)^2 + (1 + C^2\varepsilon)\,\frac{C^4 - 1}{C^4 + 1}\,(t - 1)$$

będzie funkcją, która pojawia się w tezie Lematu 6. Do ustalonego $\eta > 1$ dobierzmy $\varepsilon > 0$ tak, aby $\varepsilon < 1/4$, $(1+\varepsilon)^{2d+2\alpha}((1-\varepsilon)^{-d-\alpha} + C\varepsilon)^2 < \eta$ oraz aby współczynnik kierunkowy funkcji liniowej φ był mniejszy od 1, zaś $\varphi(\eta) < \eta$. Wobec tych założeń istnieje takie k naturalne, że k-krotne złożenie $\varphi^{(k)}(C^4) < \eta$.[1]

Niech l będzie liczbą całkowitą większą od $C^2\varepsilon^{-2} + 1$ i niech $n = kl$. Określamy $p_j = \varepsilon^j/2$, $j = 0, 1, ..., n$, oraz $r = p_n = \varepsilon^n/2$.

Jeśli dla choć jednego j, $j = 1, 2, ..., n$, zachodzi:

$$\Lambda_{p_j}(\mathbf{1}_{B_{p_{j-1}}} f) \leq \varepsilon \Lambda_{p_{j-1}}(f) \quad \text{oraz} \quad \Lambda_{p_j}(\mathbf{1}_{B_{p_{j-1}}} g) \leq \varepsilon \Lambda_{p_{j-1}}(g)\,, \tag{3.12}$$

to na mocy (3.10) i skalowania otrzymamy:

$$\mathrm{RO}_{D_r}(f/g) \leq \mathrm{RO}_{D_{p_j}}(f/g) \leq (1+\varepsilon)^{2d+2\alpha}((1-\varepsilon)^{-d-\alpha} + C\varepsilon)^2 \leq \eta\,,$$

czyli zachodzi (2.3). Rozważmy więc przypadek przeciwny, tj. dla każdego $j = 1, 2, ..., n$ co najmniej jedna z dwóch nierówności (3.12) nie zachodzi.

Ustalmy chwilowo j. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że dla tego j nie zachodzi pierwsza z nierówności (3.12). Wówczas na mocy (3.5) dla $x \in D_{p_{j-1}}$:

$$\frac{f(x)}{\Lambda_{p_{j-1}}(f)} \leq C\,\mathbf{E}_x \tau_{D_{2p_{j-1}}} \leq C^2 \frac{g(x)}{\Lambda_{p_{j-1}}(g)}\,.$$

Po przemnożeniu przez $\nu(x)$ i wycałkowaniu, uzyskamy $\varepsilon\Lambda_{p_{j-1}}(g) < C^2 \Lambda_{p_j}(\mathbf{1}_{B_{p_{j-1}}} g)$. Jest to zaprzeczenie drugiej z nierówności w (3.12) z dodatkowym czynnikiem C^2.

Dowiedliśmy zatem, że w rozważanym przypadku dla każdego $j = 1, 2, ..., n$ zachodzą obie nierówności:

$$\Lambda_{p_j}(\mathbf{1}_{B_{p_{j-1}}} f) > C^{-2}\varepsilon \Lambda_{p_{j-1}}(f) \quad \text{oraz} \quad \Lambda_{p_j}(\mathbf{1}_{B_{p_{j-1}}} g) > C^{-2}\varepsilon \Lambda_{p_{j-1}}(g)\,.$$

Niech teraz $q_j = p_{lj} = \varepsilon^{lj}/2$, $j = 0, 1, ..., k$. Wówczas dla $j = 1, 2, ..., k$:

$$\Lambda_{2q_j}(\mathbf{1}_{B_{q_{j-1}}} f) \geq \sum_{i=l(j-1)+1}^{lj-1} \Lambda_{p_i}(\mathbf{1}_{B_{p_{i-1}}} f) > (l-1) C^{-2} \varepsilon \Lambda_{q_{j-1}}(f) \geq \varepsilon^{-1} \Lambda_{q_{j-1}}(f)$$

[1] W istocie, istnieje $t_0 \in (1, \eta)$ takie, że $\varphi(t_0) = t_0$. Wówczas $\varphi(t) - t_0 = a(t - t_0)$, gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym φ. Stąd $\varphi^{(k)}(t) - t_0 = a^k(t - t_0)$. Skoro $0 < a < 1$ oraz $\eta - t_0 > 0$, więc $\varphi^{(k)}(C^4) - t_0 < \eta - t_0$ dla dostatecznie dużego k

i analogicznie dla funkcji g. Na mocy (3.11) otrzymujemy stąd:

$$\mathrm{RO}_{D_{q_j}} \frac{f}{g} \leq \varphi\left(\mathrm{RO}_{D_{q_{j-1}}} \frac{f}{g}\right), \quad j = 1, 2, ..., k\,.$$

Stąd oczywiście:

$$\mathrm{RO}_{D_r} \frac{f}{g} \leq \varphi^{(k)}\left(\mathrm{RO}_{D_{q_0}} \frac{f}{g}\right) \leq \varphi^{(k)}(C^4) \leq \eta\,.$$

To dowodzi wzoru (2.3). □

Dowód Wniosku 1: Nie tracąc ogólności, możemy przyjąć, że $y = 0$ oraz $r = 1$. Wówczas f i g są regularnie α-harmoniczne na $D \cap B_1$, a więc spełnione są warunki Twierdzenia 4. Zatem:

$$\limsup_{D \ni z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} \leq \eta \liminf_{D \ni z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

dla każdego $\eta > 1$. Ponadto f/g jest ograniczona na $D \cap B_{1/2}$. Stąd teza. □

3.4 Dowód twierdzenia o istnieniu jądra Martina

Dowód Twierdzenia 1: Ze względu na regularną α-harmoniczność funkcji Greena $G_D(x, \cdot)$ i $G_D(x_0, \cdot)$ na $D \setminus (B(x, r) \cup B(x_0, r))$ dla odpowiednio małego $r > 0$, istnienie granicy ilorazu $G_D(x, \cdot)/G_D(x_0, \cdot)$ w każdym punkcie brzegowym wynika wprost z Wniosku 1. To dowodzi, że $M_D(x, y)$ jest dobrze określone dla każdego $y \in \partial D$.

Ciągłość $M_D(x, y)$ względem $y \in \partial D$ wynika wprost z definicji, bowiem $M_D(x, \cdot)$ jest ciągłym rozszerzeniem $G_D(x, \cdot)/G_D(x_0, \cdot)$ na ∂D.

Niech $B = B(x, r)$ będzie kulą prezwartą w D. Dla każdego $z \in \overline{B}^c$ funkcja Greena $G_D(\cdot, z)$ spełnia nierówność Harnacka (3.1) na B względem pierwszej zmiennej. Stąd wynika, że również $M_D(\cdot, y)$ ma tę własność, a więc gdy $x_n \to x$, to $M_D(x_n, y)/M_D(x, y)$ dąży do 1 jednostajnie względem $y \in \partial D$.

Powyższe dwie własności implikują ciągłość M_D jako funkcji dwóch zmiennych. Twierdzenie zostało udowodnione. □

Bibliografia

[1] A. Ancona, *Principle de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitizien.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 28, 4 (1978), pp. 169-213.

[2] R. F. Bass, M. Cranston, *Exit times for symmetric stable processes in* $\mathbf{R}^n$. Ann. Probab. 11(1983), pp. 578–588.

[3] J. Bliedtner, W. Hansen, *Potential Theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.

[4] R. M. Blumenthal, R. K. Getoor, *Markov Processes and Their Potential Theory.* Pure and Appl. Math., Academic Press, New York, 1968.

[5] R. M. Blumenthal, R. K. Getoor, D. B. Ray, *On the distribution of first hits for the symmetric stable processes.* Trans. Amer. Math. Soc., 99 (1961), pp. 540–554.

[6] K. Bogdan, *The boundary Harnack principle for the fractional Laplacian.* Studia Math. 123 (1997), pp. 43–80.

[7] K. Bogdan, *Representation of* α*-harmonic functions in Lipschitz domains.* Hiroshima Math. J. 29, 2 (1999), pp. 227–243.

[8] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Probabilistic proof of boundary Harnack principle for* α*-harmonic functions.* Potential Anal. 11, 2 (1999), 135–156.

[9] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Potential theory for the* α*-stable Schrödinger operator on bounded Lipschitz domains.* Studia Math. 133, 1 (1999), pp. 53–92.

[10] Z.-Q. Chen, R. Song, *Martin boundary and integral representation for harmonic functions of symmetric stable processes.* J. Funct. Anal. 156 (1998), pp. 267–296.

[11] B. Dahlberg, *Estimates of harmonic measure.* Arch. Rat. Mech. Anal. 65 (1977), pp. 275–288.

[12] P. Frej, *Elementy teorii potencjału symetrycznych procesów stabilnych.* Praca dyplomowa, WPPT, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1999.

[13] N. Ikeda, S. Watanabe, *On some relations between the harmonic measure and the Lévy measure for a certain class of Markov processes.* Probab. Theory Related Fields 114 (1962), pp. 207–227.

[14] D. S. Jerison, C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains* Anv. in Math. 46 (1982), pp. 171–194.

[15] S. Kakutani, *Two dimensional Brownian motion and harmonic functions.* Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944), pp. 706–714.

[16] J. T. Kemper, *A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities.* Comm. Pure Applied Math. 25 (1972), pp. 247–255.

[17] T. Kulczycki, *Properties of Green function of symmetric stable processes.* Probab. Math. Statist. 17 (1997), pp. 339–364.

[18] N. S. Landkoff, *Foundations of Modern Potential Theory.* Springer, New York, 1972.

[19] R. Martin, *Minimal positive harmonic functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941), pp. 137–172.

[20] K. Michalik, K. Samotij, *Martin Representation for α-harmonic Functions.* Probab. Math. Statist. 20, 1 (2000), pp. 75–91

[21] M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels.* Acta Sci. Math. Szeged 9 (1938), pp. 1–42.

[22] M. Riesz, *Rectification au travail "Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels".* Acta Sci. Math. Szeged 9 (1938), pp. 116–118.

[23] R. Song, J.-M. Wu, *Boundary Harnack Princuple for Symmetric Stable Processes.* J. Funct. Anal. 168 (1999), pp. 403–427