

# Własności jąder Martina dla funkcji alfaharmonicznych

Mateusz Kwaśnicki

Instytut Matematyki  
Wydział Podstawowych Problemów Techniki  
Politechnika Wroclawska

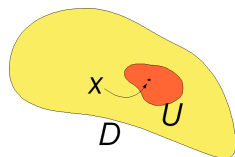
Promotor: dr Tadeusz Kulczycki



Politechnika Wroclawska

# Dwie definicje harmoniczności

$D$  — otwarty podzbiór  $\mathbf{R}^d$   
 $B(t)$  — ruch Browna w  $\mathbf{R}^d$   
 $\tau_U = \inf\{t \geq 0 : B(t) \notin U\}$



Poniższe dwie definicje są równoważne.

## Definicja

$f \in C^2(D)$  jest **harmoniczna** w  $D$ , jeśli  $\Delta f(x) = 0$  dla  $x \in D$ .

## Definicja

$f \in C(D)$  jest **harmoniczna** w  $D$ , jeśli

$$f(x) = \mathbf{E}_x f(B(\tau_U)), \text{ gdy } \bar{U} \subset D.$$

# Symetryczny proces alfa-stabilny

## Definicja

$X(t)$  — proces Lévy'ego w  $\mathbf{R}^d$  o funkcji charakterystycznej

$$\mathbf{E}_0 \exp(i \langle z, X(t) \rangle) = \exp(-t |z|^\alpha)$$

nazywamy **symetrycznym procesem  $\alpha$ -stabilnym** w  $\mathbf{R}^d$ .

$\alpha \in (0, 2)$  – indeks stabilności

$\mathbf{P}_x$  — rozkład prawdopodobieństwa procesu startującego z  $x$

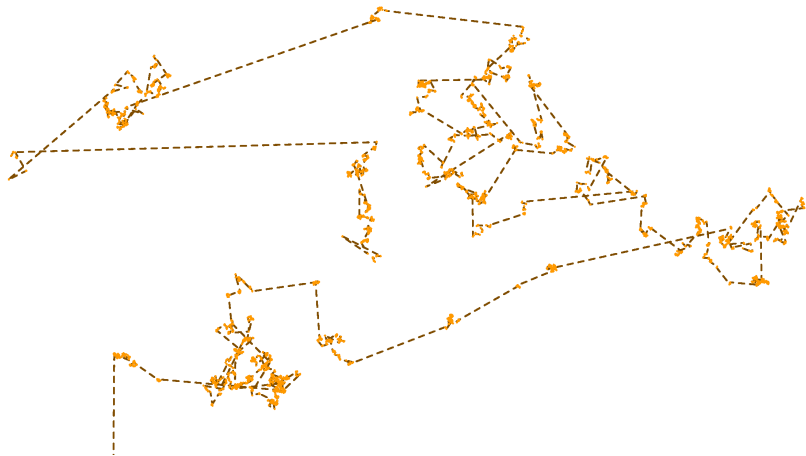
$\mathbf{E}_x$  — związana z nim wartość oczekiwana

## Uwaga

$B(\tau_U) \in \partial U$  — ruch Browna ma ciągłe trajektorie

$X(\tau_U) \in U^c$  — proces  $\alpha$ -stabilny ma skoki

# Przykładowa trajektoria procesu Cauchy'ego ( $\alpha = 1$ )

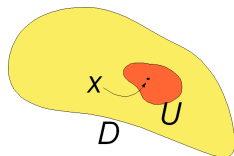


# Definicja alfa-harmoniczności

$D$  — otwarty podzbiór  $\mathbf{R}^d$

$X(t)$  — symetryczny proces  $\alpha$ -stabilny w  $\mathbf{R}^d$

$\tau_U = \inf\{t \geq 0 : B(t) \notin U\}$



## Definicja

$f \in C(\mathbf{R}^d)$  jest  $\alpha$ -**harmoniczna** w  $D$ , jeśli

$$f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_U)), \quad \text{gdy } \bar{U} \subset D.$$

$f$  jest **singularnie**  $\alpha$ -**harm.** w  $D$ , jeśli ponadto  $f = 0$  na  $D^c$ .

## Przykład

$$f(x) = \left( \frac{1}{1 - |x|^2} \right)^{1 - \frac{\alpha}{2}}, \quad |x| < 1.$$

# Nierówności Harnacka

## Nierówność Harnacka

Jeśli  $f, g \geq 0$  —  $\alpha$ -harmoniczne w  $D$ ,  $B(0, r) \subseteq D$ , to

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq C_{d,\alpha} \frac{f(y)}{g(y)}, \quad x, y \in B(0, \frac{r}{2}).$$

## Brzegowa nierówność Harnacka (BHP)

Jeśli  $f, g \geq 0$  —  $\alpha$ -harmoniczne w  $D$ , równe 0 na  $B(0, r) \setminus D$  i ciągłe do brzegu na  $D \cap B(0, r)$ , to

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq C_{d,\alpha} \frac{f(y)}{g(y)}, \quad x, y \in D \cap B(0, \frac{r}{2}).$$

**Pytanie: co trzeba założyć o  $D$ , aby zachodziła BHP?**

# BHP — krótka historia

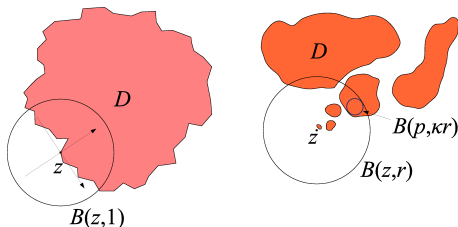
BHP jest prawdziwe, gdy:

- $D$  — Lipschitza, stała  $C_{d,\alpha,\lambda}$  (BOGDAN '97)
- $D$  —  $\kappa$ -gruby, stała  $C_{d,\alpha,\kappa}$  (SONG, WU '99)
- $D$  — **dowolny**, stała  $C_{d,\alpha}$  (BOGDAN, KULCZYCKI, K. '05)

Z BHP w każdym z przypadków wynika twierdzenie o istnieniu granicy:

$$\lim_{D \ni x \rightarrow z} \frac{f(x)}{g(x)}$$

w każdym punkcie  $z \in B(0, \frac{r}{2}) \cap \partial D$ .



## Definicja

$G_D(x, y)$  – **funkcja Greena** procesu  $X(t)$ :

$$\int_E G_D(x, y) dy = \left| \{t \in [0, \tau_D) : X(t) \in E\} \right|$$

## Własności

- $G_D(x, y) = G_D(y, x)$
- $G_D(\cdot, y)$  — *singularnie  $\alpha$ -harmoniczne* na  $D \setminus \{y\}$
- $G_D(\cdot, y)$  — *ciągła do brzegu* na  $D \setminus B(y, \varepsilon)$

## Definicja

$$M_D(x, z) = \lim_{D \ni y \rightarrow z} \frac{G_D(x, y)}{G_D(x_0, y)} \quad \text{— jądno Martina}$$



## Reprezentacja Martina

*Każda  $f \geq 0$  singularnie  $\alpha$ -harmoniczna na  $D$  jest postaci*

$$f(x) = \int_{\partial D} M_D(x, y) \mu(dy)$$

*dla pewnej skończonej miary  $\mu \geq 0$  na  $\partial D$ .*

Zachodzi, gdy:

- $D$  Lipschitza (CHEN, SONG '98; BOGDAN '99)
- $D$   $\kappa$ -gruby (SONG, WU '99)
- $D$  **dowolny** (BOGDAN, KULCZYCKI, K. '05; wniosek z BHP i wyniku MICHALIKA i SAMOTIJA '00).

## Twierdzenie

- *Brzegowa nierówność Harnacka ma miejsce na dowolnym ograniczonym zbiorze otwartym.*
- *Granice ilorazów funkcji harmoniczných i ciągłych do brzegu zawsze istnieją.*
- *Jądro Martina jest więc zawsze dobrze określone.*
- *W konsekwencji reprezentacja Martina funkcji singularnie  $\alpha$ -harmoniczných ma miejsce na dowolnym ograniczonym zbiorze otwartym.*

Co robić dalej?

- Uogólnić wnioski z BHP na dowolne zbiory otwarte.
- Rozważyć bardziej ogólną klasę procesów  $X(t)$ .

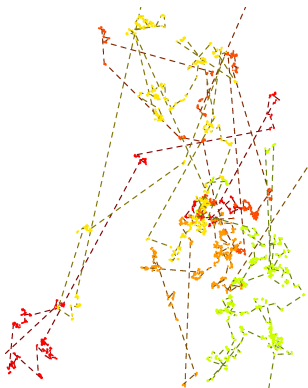
# Dodatek — Proces Lévy'ego

**Proces Lévy'ego** to proces stochastyczny:

- o przyrostach niezależnych i jednorodnych w czasie,
- którego prawie wszystkie trajektorie są cádlàg (są prawostronnie ciągłe i posiadają lewostronne granice).

Każdy taki proces  $X(t)$  jest jednoznacznie wyznaczony przez rozkład zmiennej  $X(1)$ , który może być dowolnym rozkładem nieskończenie podzielnym.

Każdy proces Lévy'ego można rozłożyć na część gaussowską, deterministyczny dryf i proces skokowy — uogólnienie złożonego procesu Poissona.



Mówimy, że  $f$  —  $\alpha$ -harmoniczna na  $D$  jest **ciągła do brzegu** na  $U \subseteq D$ , jeśli  $f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_U))$ .

Przy założeniu ciągłości  $f$  na  $D^c$  jest to równoważne ciągłości w regularnych dla  $D^c$  wspólnych punktach brzegowych  $D$  i  $U$ .

Zauważmy, że jeśli  $U \subseteq D$ , to z mocnej własności Markowa:

$$f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_D)) \implies f(x) = \mathbf{E}_x f(X(\tau_U)).$$

## Definicja

$D \subset \mathbf{R}^d$  otwarty i ograniczony nazywamy **zbiorem Lipschitza**, jeśli dla każdego  $z \in \partial D$  istnieją:

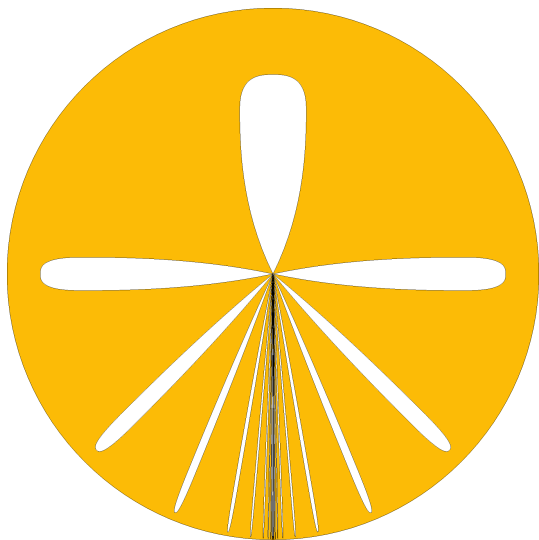
- $S$  — izometria  $\mathbf{R}^d$  przekształcająca  $0$  w  $z$ ,
- $f$  — funkcja Lipschitzowska na  $\mathbf{R}^{d-1}$

takie, że  $D \cap B(z, r)$  jest obrazem przez  $S$  obszaru nad wykresem  $f$  przeciętego z kulą  $B(0, r)$ .

## Definicja

$D \subset \mathbf{R}^d$  jest  **$\kappa$ -gruby**, jeśli dla każdego  $z \in \partial D$  i  $r \in (0, 1)$  istnieje  $x \in D \cap B(z, r)$  taki, że  $B(x, \kappa r) \subset D$ .

# Dodatek — kontrprzykład do BHP dla ruchu Browna



# Dodatek — trzy wzory

## Generator

$$\begin{aligned}(-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}})f(x) &= \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbf{E}_x f(X(t)) - f(x)}{t} = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{\frac{d}{2}} |\Gamma(-\frac{\alpha}{2})|} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{B(0,\varepsilon)^c} \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|^{d+\alpha}} dy\end{aligned}$$

## Wzór Dynkina

$$f(x) = \int_0^\tau (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f(X(t)) dt + \mathbf{E}_x f(X(\tau))$$

## Wzór Ikedy-Watanabe

$$\mathbf{P}_x(X(\tau_D) \in E) = \int_E \left( C_{d,\alpha} \int \frac{G_D(x,y)}{|z-y|^{d+\alpha}} dy \right) dz$$

## Dodatek — jawne wzory dla kuli $B = B(0, 1)$

### Rozkład $X(\tau_B)$

$$\mathbf{P}_x\{X(\tau_B) \in E\} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi^{\frac{d+2}{2}}} \int_E \left( \frac{1 - |x|^2}{|y|^2 - 1} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{|x - y|^d} dy$$

### Jądro Martina

$$M_B(x, y) = \frac{(1 - |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{|x - y|^d}$$



# Dowód BHP (1/4)

## Lemat

Jeśli  $D \subseteq B(0, 1)$ ,  $x \in D \cap B(0, \frac{1}{2})$ , to

$$\mathbf{P}_x\{X(\tau_D) \notin B(0, 1)\} \leq C_{d,\alpha} \mathbf{E}_x \tau_D.$$

## Dowód

Wzór Dynkina dla  $X(t)$ ,  $\tau_D$  i gładkiej funkcji  $f$  równej 1 na  $B(0, \frac{1}{2})$  oraz 0 na  $B(0, 1)^c$ :

$$f(x) = \int G_D(x, y) (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f(y) dy + \mathbf{E}_x f(X(\tau_D)).$$

# Dowód BHP (2/4)

## Lemat

Jeśli  $D \subseteq B(0, 1)$ ,  $x \in D \cap B(0, \frac{1}{2})$ ,  $E \subseteq B(0, 1)^c$ , to

$$\mathbf{P}_x\{X(\tau_D) \in E\} \leq C_{d,\alpha} \int_{B(0, \frac{1}{2})^c} \frac{\mathbf{P}_z\{X(\tau_D) \in E\}}{|z|^{d+\alpha}} dz.$$

## Dowód

$$\mathbf{P}_x\{X(\tau_D) \in E\} \leq 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 \mathbf{P}_x\{X(\tau_{B(0,r)}) \in E\} dr,$$

$\alpha$ -harmoniczność  $z \mapsto \mathbf{P}_z\{X(\tau_D) \in E\}$  i jawny wzór na gęstość  $\mathbf{P}_x$ -rozkładu  $X(\tau_{B(0,r)})$ .

# Dowód BHP (3/4)

## Lemat

Jeśli  $D \subseteq B(0, 1)$ ,  $x \in D \cap B(0, \frac{1}{2})$ ,  $E \subseteq B(0, 1)^c$ , to

$$\mathbf{P}_x\{X(\tau_D) \in E\} \asymp C_{d,\alpha} \mathbf{E}_x \tau_D \int_{B(0, \frac{1}{2})^c} \frac{\mathbf{P}_z\{X(\tau_D) \in E\}}{|z|^{d+\alpha}} dz.$$

## Dowód

Niech  $f(x) = \mathbf{P}_x\{X(\tau_D) \in E\}$ . Wtedy  $f(x) = \mathbf{E}_x f(Y)$ , gdzie  $Y = X(\tau_{D \cap B(0, \frac{2}{3})})$ . Całkę po  $\{\frac{2}{3} \leq |Y| < \frac{5}{6}\}$  szacujemy za pomocą poprzednich lematów, a całkę po  $\{|y| \geq \frac{5}{6}\}$  ze wzoru Ikedy-Watanabe.

# Dowód BHP (4/4)

## Dowód BHP

Wobec ostatniego lematu przez indukcję miarową:

$$f(x) \asymp C_{d,\alpha} \mathbf{E}_{xTD} \int_{B(0, \frac{1}{2})^c} \frac{f(z)}{|z|^{d+\alpha}} dz$$

i analogicznie dla  $f(y)$ ,  $g(x)$  i  $g(y)$ . Stąd BHP.

# Dowód Twierdzenia o istnieniu granic

## Idea dowodu Twierdzenia o istnieniu granic

Dowodzimy istnienia granicy w  $0 \in \partial D$ .

Jeśli  $D \cap B(0, \varepsilon)$  zajmuje bardzo małą część kuli  $B(0, \varepsilon)$ , to odpowiednie oszacowanie daje wzór Ikedy-Watanabe.

W przeciwnym przypadku dowodzi się, korzystając z BHP, że oscylacja ilorazu  $f(x)/g(x)$  na  $D \cap B(0, \frac{\varepsilon}{n})$  jest odpowiednio dużo mniejsza niż oscylacja na  $D \cap B(0, \varepsilon)$ , o ile  $n$  jest dostatecznie duże.