Zadanie: Dla jakich n, k można podzielić odważniki o masach 1g, 2g, ..., ng na k równych grup?

W dalszym ciągu dla wygody będziemy pomijali oznaczenie jednostki masy.

Zauważmy, że jeśli podział jest możliwy, to co najwyżej jedna grupa może składać się z jednego odważnika. Pozostałych $k-1$ grup musi zawierać co najmniej dwa odważniki. Stąd natychmiast:

$$2k - 1 \leq n. \tag{1}$$

Innym warunkiem koniecznym jest oczywiście podzielność łącznej masy odważników w gramach przez k. Innymi słowy, masa odważników w jednej grupie:

$$m = \frac{n(n+1)}{2k} \tag{2}$$

musi być liczbą całkowitą. Udowodnimy, że powyższe warunki są również wystarczające.

Niech A będzie zbiorem trójek (n, m, k) spełniających warunki (1) i (2), dla których podział nie jest możliwy. Wykażemy, że A jest zbiorem pustym.

Załóżmy przeciwnie, że A nie jest pusty. Niech n_0 będzie najmniejszą taką liczbą, że dla pewnych m, k trójka (n_0, m, k) jest elementem A. Następnie niech m_0 będzie największą taką liczbą, że trójka (n_0, m_0, k_0) należy do A, przy odpowiednim doborze k_0.

Zauważmy, że jeśli dla pewnych n, k podział jest możliwy, to możliwy jest również po dołożeniu kolejnych $2k$ odważników. Wystarczy do pierwszej grupy dodać odważniki o masach $(n+1)$ i $(n+2k)$, do drugiej: $(n+2)$ i $(n+2k-1)$ itd., wreszcie do k-tej: $(n+k)$ i $(n+k+1)$. Oznacza to, że niemożliwy jest podział $n_0 - 2k_0$ odważników na k_0 grup – w przeciwnym przypadku (n_0, m_0, k_0) nie należałoby do A. Wobec definicji A, n_0, m_0 i k_0, otrzymujemy $2k_0 - 1 > n_0 - 2k_0$, czyli:

$$2k_0 - 1 \leq n_0 < 4k_0 - 1. \tag{3}$$

Zakładamy, że nie jest możliwy podział n_0 odważników na k_0 grup o masie m_0. Wobec (1) oraz (3):

$$n_0 \leq m < 2n_0. \tag{4}$$

Możliwych jest kilka sytuacji.

1. Jeśli $n_0 = 2k_0 - 1$, to w pierwszej grupie umieszczamy odważnik o masie $(2k_0 - 1)$, w drugiej: dwa o masach $(2k_0 - 2)$ i 1, w trzeciej: $(2k_0 - 3)$ i 2 itd., w k_0-wej: k_0 i $(k_0 - 1)$. Sprzeczność.

2. Jeśli $n_0 = 2k_0$, to w pierwszej grupie umieszczamy dwa odważniki o masach $2k_0$ i 1, w drugiej: $(2k_0 - 1)$ i 2, w trzeciej: $(2k_0 - 2)$ i 3 itd., w k_0-wej: $(k_0 + 1)$ i k_0. Sprzeczność.

3. Załóżmy, że m_0 jest nieparzyste i $n_0 > 2m_0$. Niech $l = n_0 - \frac{m_0 - 1}{2}$. Ponieważ $m_0 - n_0 < n_0$, więc możemy umieścić w pierwszej grupie odważniki n_0 i $(m_0 - n_0)$, w drugiej: $(n_0 - 1)$ i $(m_0 - n_0 + 1)$ itd., w l-tej: $(n_0 - l + 1)$, $(n_0 - l)$. Pozostało nam $n = m_0 - n_0 - 1$ odważników o masach od 1 do n, które należy rozmieścić w $k = k_0 - l$ grupach, po m_0 w każdej. Zauważmy, że:

   $$n - 2k + 1 = (m_0 - n_0 - 1) - (2k_0 - (2n_0 - m_0 + 1)) + 1 = n_0 - 2k_0 + 1 \geq 0,$$

   czyli zachodzi (1). Zatem, na mocy definicji A, n_0, m_0 i k_0, podział n odważników na k grup jest wykonalny. Zatem udało się podzielić n_0 odważników na k_0 grup. Sprzeczność.

4. Załóżmy, że m_0 jest parzyste i $n_0 > 2m_0$. Niech $l = n_0 - \frac{m_0}{2}$. Jak poprzednio, w pierwszej grupie umieśćmy odważniki n_0 i $(m_0 - n_0)$, w drugiej: $(n_0 - 1)$ i $(m_0 - n_0 + 1)$ itd., w l-tej: $(n_0 - l + 1)$, $(n_0 - l - 1)$. Pozostał nam odważnik o masie $\frac{m_0}{2}$ oraz $n = m_0 - n_0 - 1$ odważników o masach od 1 do n, które należy podzielić na $k_0 - l$ grup o masie m_0. Zrobimy to następująco. Wpierw podzielimy n odważników na $k = 2k_0 - 2l - 1$ grup o masie $\frac{m_0}{2}$. Następnie do jednej z nich dołożymy odważnik o masie $\frac{m_0}{2}$, zaś pozostałe połączymy w pary. Wraz z wcześniejszymi krokami da nam to szukany podział n_0 odważników na k_0 grup, przeczący założeniu. Trzeba tylko sprawdzić warunek (1). Ale:

   $$n - 2k + 1 = (m - n_0 - 1) - (4k_0 - (4n_0 - 2m_0) - 2) + 1 = 3n_0 - m_0 - 4k_0 + 2,$$

   czyli na mocy (3):

   $$2k_0(n - 2k + 1) = 6k_0n_0 - n_0^2 - n_0 - 8k_0^2 + 4k_0 = (4k_0 - n_0)(n_0 - 2k_0 + 1) \geq 0.$$

Powyższe przypadki wyczerpują wszystkie możliwości, każdy zaś prowadzi do sprzeczności. Oznacza to, że poczynione przez nas założenie jest fałszywe, a więc zbiór A jest pusty. To kończy dowód.