Otwarte pytania

mateusz.kwasnicki@pwr.wroc.pl

1. Trójkąty na kracie. Jeśli trójkąt ma wierzchołki w punktach kratowych (tzn. w punktach o obu współrzędnych całkowitych) płaszczyzny, to oczywiście jego pole powierzchni jest wielokrotnością $\frac{1}{2}$. Jeśli dodatkowo założymy, że ma boki o długościach całkowitych, to ze wzoru Herona wynik, żejego pole powierzchni jest liczbą całkowitą. Powstaje następujące pytanie.

Dany jest trójkąt, którego boki mają długości całkowite i którego pole powierzchni jest liczbą całkowitą. Czy wówczas ten trójkąt jest przystający do pewnego trójkąta o wierzchołkach w punktach kratowych?

Odpowiedź w przypadku trójkątów o bokach krótszych niż 1000 jest twierdząca. Bezpośrednim rachunkiem można udowodnić, że dla każdej trójki boków a, b, c spełniającej warunek całkowitego pola, trójkąt o bokach $2a^2, 2ab, 2ac$ (a więc $2a$-krotnie powiększony) można ułożyć na płaszczyźnie tak, by wierzchołki były w punktach kratowych, zaś bok długości $2a^2$ był poziomy. Łatwo jednak sprawdzić, że np. trójkąt o bokach długości $5, 29, 30$ może zostać umieszczony tak, by wierzchołki znajdowały się w punktach kratowych, lecz wówczas żaden bok nie może być poziomy ani pionowy.

---

2. Powracające błądzenie (rozwiązane?). Niech D będzie podzbiorem kraty $\mathbf{Z}^d$. Rozważamy błądzenie losowe (X_n) na tym pozdbiorze, w którym w każdym kroku cząstka znadująca się w $x \in D$ może z jednakowym prawdopodobieństwem pozostać w miejscu, w którym się znajduje, lub wykonać jeden spośród $2d$ ruchów w kierunku najbliższych sąsiadów. Jeśli y jest najbliższym sąsiadem x w $\mathbf{Z}^d$, lecz $y \notin D$, to cząstka znajdująca się w x i wykonująca ruch w kierunku y pozostaje w x (zwiększa się wówczas prawdopodobieństwo pozostania cząstki w miejscu).

Wszystkich możliwych ścieżek długości n zawartych w D i rozpoczynających się w $x \in D$ jest więc $(2d+1)^n$ (zwróćmy uwagę, że niektóre ścieżki liczymy wielokrotnie). Niech $p(n, x, y, D)$ oznacza liczbę ścieżek zaczynających się w x i kończących się w y. Zachodzi $p(n, x, y, D) = (2d+1)^n \mathbf{P}(X_0 = x, X_n = y)$.

Czy jeśli $D' \subseteq D$, to dla wszystkich $x \in D'$ zachodzi $p(n, x, x, D') \geq p(n, x, x, D)$?

W przypadku gdy punkt początkowy i końcowy są różne, oczywiście taka nierówność nie zachodzi (może się wręcz zdarzyć, że w D' nie ma ścieżek między x i y, mimo że można te punkty połączyć w D).

Odpowiedź na tak postawione pytanie jest przecząca. Jeśli $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ i $D' = D \setminus \{(3, 1)\}$, to $p(n, x, x, D') < p(n, x, x, D)$ dla $n = 15$ i $x = (3, 2)$. Jak można wzmocnić założenia o D i D', aby hipoteza zachodziła?