Nierówność Ptolemeusza: Niech H – przestrzeń unitarna, $a, b, c, d \in H$. Wówczas:

$$\|a-c\|\|b-d\| \leq \|a-b\|\|c-d\| + \|a-d\|\|b-c\|.$$

Lemat: Dla $u, v \in H$, $u, v \neq 0$ zachodzi

$$\|u-v\| = \left\| \frac{\|v\|}{\|u\|}u - \frac{\|u\|}{\|v\|}v \right\|.$$

Dowód lematu: Wyliczamy:

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\|v\|}{\|u\|}u - \frac{\|u\|}{\|v\|}v \right\|^2 &= \left\| \frac{\|v\|}{\|u\|}u \right\|^2 + \left\| \frac{\|u\|}{\|v\|}v \right\|^2 - 2\Re \left\langle \frac{\|v\|}{\|u\|}u, \frac{\|u\|}{\|v\|}v \right\rangle = \\ &= \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\Re \langle u, v\rangle = \|u-v\|^2.\end{aligned}$$

Dowód nierówności: Niech $x = c - a$, $y = b - a$, $z = d - a$. Chcemy pokazać, że:

$$\|x\|\|y-z\| \leq \|y\|\|x-z\| + \|z\|\|x-y\|.$$

Gdy $x = 0$, lewa strona nierówności jest zerem, a prawa nieujemna. Gdy $y = 0$ lub $z = 0$, obie strony są identyczne. Gdy x, y, z są niezerowe, to na mocy lematu:

$$\begin{aligned}&\|y\|\|x-z\| + \|z\|\|x-y\| = \\ &\quad = \|y\| \left\| \frac{\|z\|}{\|x\|}x - \frac{\|x\|}{\|z\|}z \right\| + \|z\| \left\| \frac{\|y\|}{\|x\|}x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y \right\| = \\ &\quad = \left\| \frac{\|y\|\|z\|}{\|x\|}x - \frac{\|x\|\|y\|}{\|z\|}z \right\| + \left\| \frac{\|y\|\|z\|}{\|x\|}x - \frac{\|x\|\|z\|}{\|y\|}y \right\| \geq \\ &\quad \geq \left\| \frac{\|x\|\|z\|}{\|y\|}y - \frac{\|x\|\|y\|}{\|z\|}z \right\| = \\ &\quad = \|x\| \left\| \frac{\|z\|}{\|y\|}y - \frac{\|y\|}{\|z\|}z \right\| = \\ &\quad = \|x\|\|y-z\|.\end{aligned}$$