Wklęsłość splotów funkcji log-wklęsłych

Mateusz Kwaśnicki

2 lipca 2008

1. Definicja. Ciągłą funkcję $f : D \to (0, \infty)$, gdzie D jest wypukłym podzbiorem $\mathbf{R}^d$, nazywamy p-wklęsłą, jeśli f_p jest wklęsła, gdzie $f_p = f^p$ dla $p > 0$, $f_p = -f^p$ dla $p < 0$ oraz $f_0 = \log f$. Funkcje 0-wklęsłe nazywamy log-wklęsłymi.

2. Własności. Funkcja f jest p-wklęsła, $p \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\lambda x+\mu y) \geq (\lambda f(x)^p+\mu f(y)^p)^(1/p)$, o ile $\lambda, \mu \geq 0$ oraz $\lambda+\mu = 1$. Funkcja f jest log-wklęsła, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\lambda x + \mu y) \geq f(x)^\lambda f(y)^\mu$. W obu przypadkach wystarczy zażądać, by warunek był spełniony dla $\mu = \lambda = 1/2$.

Funkcja f klasy C^1 jest p-wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy $y - x = \lambda u$, $\lambda > 0$, implikuje $D_u f(x) \cdot f(y)^{(1-p)} \leq D_u f(y) \cdot f(x)^{(1-p)}$; D_u oznacza pochodną w kierunku u. Funkcja f klasy C^2 jest p-wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \cdot D_u^2 f(x) \leq (1-p)(D_u f(x))^2$.

3. Twierdzenie. Splot dwóch funkcji log-wklęsłych na $\mathbf{R}$ jest log-wklęsły.

Dowód. Wystarczy rozważyć funkcje klasy C^1. Jeśli f, g są log-wklęsłe, to:

$$(f(u)f'(v) - f(v)f'(u)) \cdot (g(x-v)g'(x-u) - g(x-u)g'(x-v)) \geq 0\,.$$

Zatem:

$$\begin{aligned} h(x)h''(x) &= f * g(x) \cdot f' * g'(x) \\ &= \int\int (f(u)f'(v)g(x-u)g'(x-v) + f'(u)f(v)g'(x-u)g(x-v))dudv \\ &\leq \int\int (f(u)f'(v)g'(x-u)g(x-v) + f'(u)f(v)g(x-u)g'(x-v))dudv \\ &= f * g'(x) \cdot f' * g(x) = h'(x)^2\,. \end{aligned}$$

To dowodzi tezy. □