Sympleksy Choqueta

(Na podstawie seminarium z teorii ergodycznej
prowadzonego przez Agatę Czapelską i Dawida Huczka
według książki R. R. Phelpsa „Lectures on Choquet's Theorem")

Mateusz Kwaśnicki

2 lipca 2008

1 Wstęp

Ten tekst jest skróconym zapisem kilku seminariów z teorii ergodycznej. W kilku miejscach pominięto szczegóły rozumowania, które czytelnik powinien jednak bez trudu uzupełnić.

2 Przestrzenie liniowo-topologiczne

1. Oznaczenia i podstawowe własności. Przez X będziemy zawsze oznaczali rzeczywistą przestrzeń liniowo-topologiczną, tzn. przestrzeń liniową z topologią, w której działania są ciągłe. Przestrzeń X nazywamy lokalnie wypukłą, gdy istnieje baza topologii złożona ze zbiorów wypukłych. Zbiór $A \subset X$ nazywamy ograniczonym, jeśli dla każdego otoczenia zera U istnieje liczba λ taka, że $A \subset \lambda U$. Funkcjonał liniowy $\varphi : X \to \mathbf{R}$ jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy obrazy zbiorów ograniczonych w X są ograniczonymi podzbiorami $\mathbf{R}$. Niezerowe funkcjonały liniowe przekształcają zbiory otwarte na zbiory otwarte. Jeśli $A \subset X$, to definiujemy otoczkę wypukłą $\operatorname{conv} A = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : 0 \le \lambda \le 1, x, y \in A\}$.

2. Twierdzenie Hahna-Banacha. Niech $p : X \to \mathbf{R}$ spełnia warunki $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ oraz $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ dla $x, y \in X$, $\lambda \ge 0$. Niech M będzie podprzestrzenią liniową X, zaś $\varphi : M \to \mathbf{R}$ funkcjonałem liniowym spełniającym warunek $\varphi(x) \le p(x)$ dla $x \in M$. Wówczas istnieje funkcjonał liniowy $\psi : X \to \mathbf{R}$ taki, że $\psi(x) = \varphi(x)$ dla $x \in M$ oraz $\psi(x) \leq p(x)$ dla $x \in X$.

Dowód. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje maksymalna podprzestrzeń N, na której można określić ψ spełniające żądane warunki. Załóżmy, że $N \neq X$. Niech $x \in X \setminus N$. Niech α spełnia nierowność $-p(x+y) - \psi(y) \leq \alpha \leq p(x+y) - \psi(y)$ dla każdego $y \in N$. Takie α istnieje, ponieważ $-p(x+y_1) - \psi(y_1) \leq p(x+y_2) - \psi(y_2)$ dla $y_1, t_2 \in N$ wobec podaddytywności p. Funkcjonał $x + \lambda y \mapsto \psi(x) + \alpha\lambda$ jest przedłużeniem ψ spełniającym żądane warunki. To przeczy maksymalności N. □

3. Twierdzenie. Niech X będzie przestrzenią lokalnie wypukłą, zaś A, B jej wypukłymi, rozłącznymi podzbiorami. Jeśli A jest otwarty, to istnieje $\varphi \in X^*$ taki, że $\varphi(A) < \varphi(B)$. Jeśli zaś A jest zwarty, a B domknięty, to istnieją $\varphi \in X^*$ oraz $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ takie, że $\varphi(A) < \lambda_1 < \lambda_2 < \varphi(B)$.

Dowód. Załóżmy, że A jest otwarty. Niech $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, $z_0 = y_0 - x_0$, $C = A - B + z_0$. Wówczas C jest wypukłym otoczeniem zera. Niech p będzie funkcjonałem Minkowskiego dla C, tzn. $p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}$. Wówczas p spełnia założenia tw. Hahna-Banacha. Ponadto $0 \notin A - B$, więc $p(z_0) > 1$. Zatem na mocy tw. Hahna-Banacha istnieje $\psi : X \to \mathbf{R}$ taki, że $\varphi(\lambda z_0) = \lambda$ oraz $\varphi(x) \leq p(x)$ dla $x \in X$. Z drugiej własności wynika, że φ jest ciągły. Ponadto $\varphi(A)$ jest zbiorem otwartym, zaś jeśli $x \in A$, $y \in B$, to $\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(z_0) - \varphi(x - y + z_0) \geq 1 - p(x - y + x_0) \geq 0$. Zatem $\varphi(A) < \varphi(B)$.

Niech teraz A będzie zwarty, zaś B domknięty. Twierdzimy, że istnieje wypukłe otoczenie zera U takie, że $(A + U) \cap (B + U) = \emptyset$.

Wobec ciągłości dodawania, dla $x \in A$ istnieje symetryczne, wypukłe otoczenie zera U_x takie, że $(x + U_x + U_x) \cap (B + U_x) = \emptyset$. Niech $\{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie takim podzbiorem A, że $\bigcup x_j + U_{x_j} = A$, suma po $j = 1, \ldots, n$. Niech $U = \bigcap U_{x_j}$. Wówczas $A + U \subset \bigcup (x_j + U_{x_j} + U)$ i każdy składnik tej sumy jest rozłączny z $B + U$. Zatem U posiada żądane własności.

Stosujemy pierwszą część twierdzenia do $A + V$ oraz B. Obraz zbioru A przez otrzymany funkcjonał jest zbiorem zwartym, a obraz $A+V$ – otwartym. Stąd teza twierdzenia. □

Powyższe twierdzenie często nazywane jest również twierdzeniem Hahna-Banacha.

4. Wniosek. Załóżmy, że X jest przestrzenią lokalnie wypukłą, zaś F_1, F_2 są wypukłymi i domkniętymi podzbiorami $X \times \mathbf{R}$ oraz że F_2 jest zwarty. Załóżmy ponadto, że rzut F_1 na X zawiera w sobie rzut F_2 oraz że $(x, \lambda_i) \in F_i$ implikuje $\lambda_1 < \lambda_2$. Na mocy twierdzenia istnieje funkcjonał Φ oraz λ_0 takie, że $\Phi(x, \lambda_1) < \lambda_0 < \Phi(x, \lambda_2)$ jeśli $(x, \lambda_i) \in F_i$. Wobec założeń o F_1 i F_2, otrzymujemy $\Phi(0, 1) > 0$. Niech $h(x) = (\lambda - \Phi(x, 0))/\Phi(0, 1)$ tak, aby $\Phi(x, h(x)) = \lambda$. Oczywiście h jest ciągłą funkcją afiniczną (tzn. $h(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y))$ oraz $\lambda_1 < h(x)$ jeśli $(x, \lambda_1) \in F_1$ oraz $h(x) < \lambda_2$ gdy $(x, \lambda_2) \in F_2$.

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie: jeśli f jest górnie półciągłą funkcją wklęsłą na zwartym i wypukłym podzbiorze K przestrzeni X, zaś $h_1, ..., h_n$ jest układem ciągłych funkcji afinicznych na zwartym i wypukłym podzbiorrze zbioru K oraz $h_i > f$, to istnieje ciągła funkcja afiniczna h na K taka, że $f < h < h_i$. W istocie, wystarczy zauważyć, że otoczka wypukła wykresów $h_1, ..., h_n$ jest zwarta, zaś obszar $\{(x, \lambda) : x \in K, \lambda \leq f(x)\}$ jest wypukły i domknięty.

5. Definicja. Niech $K \subset X$. Zbiór $S \subset K$ nazywamy zbiorem ekstremalnym dla K, jeśli $x \in S$, $y, z \in K$, $0 < \lambda < 1$, $x = (1-\lambda)y + \lambda z$ implikuje $y, z \in S$. Punkt $x \in K$ nazywamy punktem ekstremalnym K, jeśli $\{x\}$ jest zbiorem ekstremalnym dla K. Zbiór punktów ekstremalnych K oznaczamy $\operatorname{ex} K$.

6. Twierdzenie Kreina-Milmana. Niech X będzie przestrzenią lokalnie wypukłą, K jej zwartym i wypukłym podzbiorem. Wtedy $K = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ex} K)}$.

Dowód. Niech $\mathcal{P}$ oznacza rodzinę zwartych podzbiorów K ekstremalnych dla K. Udowonimy, że każdy zbiór z rodziny $\mathcal{P}$ zawiera punkt ekstremalny K.

Ustalmy $S \in \mathcal{P}$ i niech $\mathcal{P}_S = \{S' \in \mathcal{P} : S' \subset S\}$. Rodzina $\mathcal{P}_S$ jest zamknięta ze względu na przekroje, więc na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna zawiera pewien element minimalny S'. Dla każdego $\varphi \in X^*$ zbiór $\{x \in S' : \varphi(x) = \sup \varphi(S)\}$ jest ekstremalny dla K i zawiera się w S', a więc jest równy S'. Oznacza to, że S' jest jednopunktowy, a jego jedyny element jest punktem ekstremalnym K zawartym w S tak, jak chcieliśmy.

Oczywiście $\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ex} K)} \subset K$. Gdyby $x \in K \setminus \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ex} K)}$, to na mocy twierdzenia 2.3 dla pewnego $\varphi \in X^*$ mielibyśmy $\varphi(\operatorname{conv}(\operatorname{ex} K)) < \varphi(x)$, czyli $\{x \in K : \varphi(x) = \sup \varphi(K)\}$ byłby elementem $\mathcal{P}$ rozłącznym z $\operatorname{ex} K$ wbrew temu, że każdy element $\mathcal{P}$ zawiera punkt ekstremalny K. $\square$

7. Definicja. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $F : \Omega \to X$ funkcją mierzalną borelowsko. Wówczas mówimy, że całka $\int F d\mu$ istnieje i jest równa x, jeśli $\int \varphi \circ F d\mu = \varphi(x)$ dla każdego $\varphi \in X^*$.

8. Twierdzenie. Niech Ω będzie przestrzenią zwartą, zaś $\mathcal{F}$ σ-ciałem zbiorów borelowskich. Niech X będzie przestrzenią lokalnie wypukłą. Załóżmy, że $\overline{\operatorname{conv} F(\Omega)}$ jest zbiorem zwartym, a F funkcją ciągłą. Wówczas $\int F d\mu$ istnieje i jest elementem $\overline{\operatorname{conv} F(\Omega)}$.

Dowód. Niech $H_\varphi = \varphi^{-1}\left\{\int \varphi \circ F d\mu\right\}$ dla $\varphi \in X^*$ i niech $K = \overline{\operatorname{conv} F(\Omega)}$. Wówczas $H_\varphi \cap K$ jest zwarty. Twierdzenie zostanie dowiedzione, jeśli pokażemy, że $\{H_\varphi \cap K : \varphi \in X^*\}$ jest rodziną scentrowaną.

Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$. Określmy $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $p = (\int \varphi_1 \circ F d\mu, \ldots, \int \varphi_n \circ F d\mu)$. Wystarczy udowodnić, że $p \in \Phi(K)$. W przeciwnym przypadku na mocy twierdzenia 2.3 mielibyśmy $\psi(\Phi(K)) < \psi(p)$ dla pewnego $\psi \in (\mathbf{R}^n)^*$. Wówczas $\psi \circ \Phi \in X^*$ oraz $\psi(\Phi(K)) < \int (\psi \circ \Phi) \circ F d\mu$, co jest niemożliwe. $\square$

9. Wniosek. Jeśli K jest zwartym podzbiorem przestrzeni lokalnie wypukłej X oraz $\overline{\operatorname{conv} K}$ jest zwarty, zaś μ jest miarą probabilistyczną na K, to istnieje środek ciężkości miary μ, tzn. $\bar{\mu} = \int \operatorname{id} d\mu \in \overline{\operatorname{conv} K}$. Przeciwnie, jeśli $x \in \overline{\operatorname{conv} K}$, to istnieje miara probabilistyczna μ na K taka, że $x = \bar{\mu}$.

Istotnie, pierwsza część wynika z udowodnionego twierdzenia. Dla dowodu drugiej części zauważmy, że zbiór środków ciężkości miar probabilistycznych na K jest wypukły, zawiera K i jest domknięty, ponieważ zbiór miar probabilistycznych jest zwarty w $*$-słabej topologii, odwzorowanie $\mu \mapsto \bar{\mu}$ jest ciągłe, jeśli w zbiorze miar probabilistycznych rozpatrujemy $*$-słabą topologię, a w X słabą topologię, a słabe domknięcie zbioru zawiera jego zwykłe domknięcie.

10. Wniosek. Twierdzenie Kreina-Milmana można równoważnie sformułować następująco. Jeśli K jest zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni lokalnie wypukłej X, to K jest zbiorem środków ciężkości $\bar{\mu}$ miar probabilistycznych μ na $\overline{\operatorname{ex} K}$.

Istotnie, wystarczy zauważyć, że $\overline{\operatorname{conv} A} = \overline{\operatorname{conv}(\bar{A})}$. Niestety często $\overline{\operatorname{ex} K} = K$.

11. Definicja. Załóżmy, że X jest przestrzenią lokalnie wypukłą, K jej domkniętym podzbiorem. Przez $\mathcal{A}$ będziemy oznaczać rodzinę ciągłych funkcji afinicznych na K, przez $\mathcal{C}$ – ciągłych funkcji wypukłych. Dla ograniczonej funkcji $f : K \to \mathbf{R}$ definiujemy otoczkę górną $\bar{f}$ funkcji f wzorem $\bar{f} = \inf\{h \in \mathcal{A} : h \geq f\}$.

Łatwo sprawdzić, że $f \leq \bar{f}$, $\bar{f} \leq \bar{g}$ jeśli $f \leq g$, $\sup|\bar{f}| \leq \sup|f|$ oraz że $\bar{f}$ jest wklęsła i górnie półciągła. Jeśli f jest wklęsła i górnie półciągła, to $f = \bar{f}$. Istotnie, gdyby $\bar{f}(x_0) > f(x_0)$, to na mocy wniosku 2.4 istniałaby ciągła funkcja afiniczna $h > f$ taka, że $h(x_0) < \bar{f}(x_0)$, wbrew definicji $\bar{f}$.

Jeśli $f \in \mathcal{C}$, to na mocy lematu 2.4 $\operatorname{ex} K \subset \big\{x : f(x) = \bar{f}(x)\big\}$. Jeśli f jest ściśle wypukła, to zachodzi równość.

12. Uwaga. Nie wszystkie ciągłe funkcje afiniczne na K muszą przedłużać się na X. Istotnie, wystarczy rozważyć przykład $X = l^2$, $K = \{x \in X : |x_n| \leq 2^{-n}\}$, $f(x) = \sum x_n$. Mimo to rodzina funkcji afinicznych postaci $\varphi + \lambda$, gdzie $\varphi \in X^*$, $\lambda \in \mathbf{R}$, jest gęsta w $\mathcal{A}$. Istotnie, niech $h_0 \in \mathcal{A}$, $\varepsilon > 0$. Na mocy wniosku 2.4 istnieje ciągła funkcja afiniczna h na X taka, że $h_0 - \varepsilon < h < h_0 + \varepsilon$. W szczególności, jeśli $\bar{\mu} = x$, to $\mu(h) = h(x)$ dla każdej $h \in \mathcal{A}$.

13. Lemat. Jeśli $f \in C(K)$, to $\bar{f}(x) = \sup\{\mu(f) : \bar{\mu} = x\}$.

Dowód. Niech $g(x) = \sup\{\mu(f) : \bar{\mu} = x\}$. Wówczas g jest wklęsła:

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geq \sup\{\lambda\mu(f) + (1-\lambda)\nu(f) : \bar{\mu} = x, \bar{\nu} = y\} \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y). \end{aligned}$$

Ponadto g jest górnie półciągła, bowiem $\mu \mapsto (\bar{\mu}, \mu(f))$ jest ciągłe, więc zbiór $\{(\bar{\mu}, \mu(f) : \mu(f) \geq \lambda\}$ jest zwarty, czyli jego rzut na pierwszą współrzędną $\{x : g(x) \geq \lambda\}$ również. Ponieważ $g \geq f$, więc również $g \geq \bar{f}$. Z drugiej strony jeśli $\bar{\mu} = x$, $h \in \mathcal{A}$ oraz $h \geq f$, to $\mu(f) \leq \mu(h) = h(x)$, czyli $g(x) \leq h(x)$, przez co $g \leq \bar{f}$. □

3 Przygotowanie

1. Definicja. Najmniejsze σ-ciało zawierające podzbiory zwarte typu G_δ przestrzeni topologicznej nazywamy rodziną zbiorów Baire'a. Mówiąc „zbiór zwarty" zawsze mamy na myśli zbiór niepuste. Przez miarę na przestrzeni topologicznej zwartej będziemy zawsze rozumieli nieujemną, skończoną i regularną (tzn. taką, że miara zbioru jest równa supremum miar jego podzbiorów zwartych) miarę borelowską. Istnieje wzajemna jednoznaczność pomiędzy takimi miarami oraz nieujemnymi funkcjonałami liniowymi na przetrzeni funkcji ciągłych określonych na rozważanej przestrzeni zwartej; jest to treścią twierdzenia Riesza. Dlatego będziemy utożsamiać miarę i funkcjonał, pisząc często $\mu(f) = \int f d\mu$.

2. Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa. Niech X będzie dowolną zwartą przestrzenią topologiczną, zaś $\mathcal{F}$ rodziną ciągłych funkcji rzeczywistych na X zamkniętą ze względu na branie minimów i maksimów skończenie wielu funkcji. Załóżmy, że dla wszystkich $x, y \in X$ oraz $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{F}$ taka, że $f(x) = \lambda$, $f(y) = \mu$. Wówczas $\mathcal{F}$ jest gęsta w przestrzeni $C(X)$ funkcji ciągłych na X z normą supremum.

Dowód. Niech $g \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ i niech funkcja $f_{x,y} \in \mathcal{F}$ spełnia równości $f_{x,y}(x) = g(x)$, $f_{x,y}(y) = g(y)$. Dla dowolnie ustalonego x wybieramy skończone pokrycie $\{\{f_{x,y_1} < g + \varepsilon\}, \ldots, \{f_{x,y_n} < g + \varepsilon\}\}$ i określamy $f_x = \min\{f_{x,y_1}, \ldots, f_{x,y_n}\}$. Następnie wybieramy skończone pokrycie $\{\{f_{x_1} > g - \varepsilon\}, \ldots, \{f_{x_m} > g - \varepsilon\}\}$ i określamy $f = \max\{f_{x_1}, \ldots, f_{x_m}\}$, Wówczas $\sup |g - f| < \varepsilon$ oraz $f \in \mathcal{F}$. $\square$

3. Wniosek. Jeśli X jest zwartą przestrzenią metryczną, to $C(X)$ jest przestrzenią ośrodkową.

4. Lemat Urysohna. Jeśli K jest przestrzenią topologiczną zwartą, $F \subset G \subset K$, F jest domknięty, G – otwarty, to istnieje funkcja f ciągła na K równa zero na F i jeden na $K \setminus G$. $\square$

4 Twierdzenia Choqueta dla podzbiorów metryzowalnych

1. Twierdzenie Choqueta. Niech X będzie przestrzenią lokalnie wypukłą, a K jej zwartym, wypukłym i metryzowalnym podzbiorem. Wtedy każdy punkt K jest postaci $\bar{\mu}$ dla pewnej miary probabilistycznej na $\operatorname{ex} K$.

Dowód. Na mocy wniosku 3.3 sfera jednostkowa w $\mathcal{A}$ jest ośrodkowa. Niech więc $\{h_n : n = 1, 2, \ldots\}$ będzie jej gęstym podzbiorem. Podobnie jak $\mathcal{A}$, zbiór ten rozdziela punkty K. Oznacza to, że funkcja $g = \sum 2^{-n} h_n^2$ jest ściśle wypukła.

Niech $x_0 \in K$ i niech $\mathcal{M} = \{h + \lambda g : h \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbf{R}\}$. Ponieważ $h = \lambda g$ tylko jeśli $h = 0$, $\lambda = 0$, więc każdy element $\mathcal{M}$ ma jedyną reprezentację $h + \lambda g$. Zatem $\mu(h+\lambda g) = h(x_0)+\lambda\bar{g}(x_0)$ określa funkcjonał liniowy na $\mathcal{M}$. Niech $p(f) = \bar{f}(x_0)$. Wówczas μ oraz p spełniają założenia twierdzenia Hahna-Banacha, a więc μ przedłuża się do funkcjonału – nazwijmy go ponownie μ – na $C(K)$ tak, że $\mu(f) \leq p(f)$. W szczególności $\mu(f) \leq \sup|f|$, więc $\mu \in C(K)^*$. Jeśli $f \geq 0$, to $\mu(f) \geq -p(-f) \geq 0$, więc μ jest miarą nieujemną. Ponadto $1 = -p(-1) \leq \varphi(1) \leq p(1) = 1$, więc μ jest miarą probabilistyczną.

Jeśli $\psi \in X^*$, to $\mu(\psi) = \psi(x_0)$, więc $\bar{\mu} = x_0$. Ponadto jeśli $h \in \mathcal{A}$ spełnia $h \geq g$, to $h \geq \bar{g}$, a więc $h(x_0) = \mu(h) \geq \mu(\bar{g})$. Zatem $\mu(g) = \bar{g}(x_0) \geq \mu(\bar{g})$. Oznacza to, że $\int(\bar{g} - g)d\mu = 0$, a więc że μ jest skupiona na zbiorze $\{x : g(x) = \bar{g}(x)\}$, równym $\operatorname{ex} K$ wobec ścisłej wypukłości g. □

5 Porządek Choqueta-Bishopa-de Leeuw

1. Definicja. Odtąd X będzie zawsze oznaczało przestrzeń lokalnie wypukłą, zaś K jej zwarty i wypukły podzbiór. Niech μ, ν będą miarami na K. Piszemy $\mu \prec \nu$, jeśli dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}$ (ciągłej wypukłej) zachodzi $\mu(f) \leq \nu(f)$. Relację $\prec$ nazywamy porządkiem Choqueta-Bishopa-de Leeuw.

Jeśli $\mu \prec \nu$ oraz $\nu \prec \mu$, to $\mu(f) = \nu(f)$ dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C} - \mathcal{C}$. Ale na mocy twierdzenia Stone'a-Weierstrassa $\mathcal{C} - \mathcal{C}$ jest gęstym podzbiorem $C(K)$, zatem $\mu = \nu$.

Ponieważ $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \mathcal{A}$, więc jeśli $\mu \prec \nu$, to $\mu(\varphi) = \nu(\varphi)$ dla każdego $\varphi \in X^*$, czyli $\bar{\mu} = \bar{\nu}$. Ponadto oczywiście $\mu(K) = \nu(K)$.

2. Lemat. Jeśli $x \in K$, zaś μ jest miarą probabilistyczną na K, to istnieje maksymalna (w sensie porządku Choqueta-Bishopa-de Leeuw) miara μ_0 na K taka, że $\mu \prec \mu_0$.

Dowód. Niech P będzie rodziną miar probabilistycznych na K liniowo uporządkowaną ze względu na relację $\prec$, niech $P_\nu = \{\nu' \in P : \nu \prec \nu'\}$. Rodzina wszystkich miar probabilistycznych na K jest zwarta w $*$-słabej topologii (twierdzenie Banacha-Alaoglu), zatem $\bigcap \bar{P}_\nu$, gdzie przekrój przebiega $\nu \in P$, jest zbiorem niepustym. Niech ν_0 będzie jego elementem. Wówczas jeśli $\nu \in P$, $f \in \mathcal{C}$, to dla wszystkich $\nu' \in P_\nu$ zachodz $\nu(f) \leq \nu'(f)$, a więc także $\nu(f) \leq \nu_0(f)$. Stąd $\nu \prec \nu_0$. Dowiedliśmy więc, że rodzina miar probabilistycznych z porządkiem $\prec$ spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. To dowodzi tezy. $\square$

3. Lemat. Jeśli μ jest miarą maksymalna, to $\mu(f) = \mu(\bar{f})$ dla $f \in C(K)$.

Dowód. Niech μ będzie maksymalna, $f \in C(K)$, $\nu(\lambda f) = \lambda\mu(\bar{f})$ dla $\lambda \in \mathbf{R}$ oraz niech $p(g) = \mu(\bar{g})$. Wobec twierdzenia Hahna-Banacha można ν przedłużyć do funkcjonału liniowego na $C(K)$ tak, aby $\nu(g) \leq p(g)$. W szczególności $\nu(g) \leq \sup|g|$, czyli $\nu \in C(K)^*$. Jeśli $g \geq 0$ to $\nu(g) \geq -p(-g) \geq 0$. Ponadto $\nu(1) = 1$. Oznacza to, że ν jest miarą probabilistyczną. Jeśli $g \in \mathcal{C}$, to $\nu(g) \geq -p(-g) = -\mu(\overline{(-g)}) = \mu(g)$, czyli $\mu \prec \nu$. Wobec maksymalności μ otrzymujemy $\mu = \nu$. Oznacza to, że $\mu(f) = \nu(f) = \mu(\bar{f})$. $\square$

4. Lemat. Niech $\mathcal{H}$ będzie niepustą rodziną ciągłych funkcji na K spełniającą następujący warunek: jeśli $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, to istnieje $h \in \mathcal{H}$ takie, że $h \leq h_1, h \leq h_2$. Niech $f = \inf \mathcal{H}$ i niech μ będzie miarą probabilistyczną na K. Wówczas $\mu(f) = \inf\{\mu(h) : h \in \mathcal{H}\}$.

Dowód. Niech $\lambda = \inf\{\mu(h) : h \in \mathcal{H}\}$ i niech $h_n \in \mathcal{H}$ spełnia $\mu(h_n) \to \lambda$. Możemy przyjąć, że h_n jest ciągiem malejącym. Niech $h = \lim h_n$. Wówczas $\mu(h) = \lambda$.

Załóżmy, że $\mu(h - f) > 0$. Dla pewnych wymiernych p, q, $p < q$, zbiór $\{x : \bar{f}(x) < p, q < h(x)\}$, a więc i pewnego jego zwarty podzbiór F mają dodatnią miarę. Dla każdego $x \in F$ istnieje $h_x \in \mathcal{H}$ taki, że $h_x(x) < p$. Ale F jest zwarte, a h_x ciągłe, więc dla pewnych $x_1, \ldots, x_k$ funkcje $g_n = h_{x_1} \wedge \cdots \wedge h_{x_k} \wedge h_n$ spełniają $g_n(x) < p$ dla $x \in F$. Ponadto istnieją $\tilde{h}_n \in \mathcal{H}$ takie, że $\tilde{h}_n \leq g_n$. Oznacza to, że $\lim \mu(\tilde{h}_n) = \mu(\lim \tilde{h}_n) < \mu(h) - (q-p)\mu(F)$, wbrew określeniu $\lambda = \mu(h)$. Zatem $\mu(h) = \mu(f)$. $\square$

5. Lemat. Jeśli $\mu(f) = \mu(\bar{f})$ dla $f \in \mathcal{C}$, to μ jest miarą maksymalną.

Dowód. Niech $f \in \mathcal{C}$, $\mathcal{H} = \{h \in -C : h \geq f\}$. Wówczas dla $h \in \mathcal{H}$ zachodzi $\inf \mathcal{H} \leq \bar{f} \leq \bar{h} = h$, czyli $\bar{f} = \inf \mathcal{H}$. Możemy więc stosować lemat 5.4 do $\bar{f}$, $\mathcal{H}$ oraz μ. Otrzymujemy $\mu(\bar{f}) = \inf\{\mu(h) : h \in \mathcal{H}\}$.

Jeśli więc $\mu(f) = \mu(\bar{f})$ dla $f \in \mathcal{C}$ oraz $\mu \prec \nu$, to dla $f \in \mathcal{C}$ zachodzi $\nu(f) \leq \nu(\bar{f}) = \inf\{\nu(h) : h \in \mathcal{H}\} \leq \inf\{\mu(h) : h \in \mathcal{H}\} = \mu(\bar{f}) = \mu(f)$, czyli $\nu \prec \mu$. □

6 Przypadek niemetryzowalny

1. Lemat. Niech f_n będzie ograniczonym ciągiem wklęsłych i górnie półciągłych funkcji na K. Jeśli $\liminf f_n \geq 0$ na $\operatorname{ex} K$, to także $\liminf f_n \geq 0$ na K.

Dowód. Niech $x \in K$. Jeśli K jest metryzowalny, to na mocy tw. Choqueta $x = \bar{\mu}$ dla pewnej miary probabilistycznej μ na $\operatorname{ex} K$. Oznacza to, że

$$\begin{aligned} f_n(x) = \bar{f}_n(x) &= \inf\{h(x) : h \in \mathcal{A}, h \geq f_n\} \\ &= \inf\{\mu(h) : h \in \mathcal{A}, h \geq f_n\} \geq \mu(f_n). \end{aligned}$$

Teza w tym przypadku wynika z lematu Fatou.

Jeśli K nie jest metryzowalny, to niech $h_n \in \mathcal{A}$ będzie taki, że $h_n(x) \leq f_n(x) + n^{-1}$. Niech $\Psi : K \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ będzie dany przez $\Psi(y)(n) = h_n(y)$. Wówczas $\Psi(K)$ jest zwarty, wypukły i metryzowalny. Jeśli $z \in \operatorname{ex}\Psi(K)$, to $\Psi^{-1}(z)$ jest zbiorem ekstremalnym dla K, a więc zawiera punkt ekstremalny. Zatem z udowodnionego już przypadku wynika, że $\liminf \Psi(y)(n) \geq 0$. □

2. Lemat. Jeśli μ jest miarą maksymalną na K, a f_n niemalejącym ciągiem niedodatnich funkcji ciągłych takich, że $\lim f_n(x) = 0$ dla $x \in \operatorname{ex} K$, to $\lim \int f_n d\mu = 0$.

Dowód. Funkcje $\bar{f}_n$ spełniają założenia lematu 6.1, a z lematu 5.3 wynika, że $\mu(\bar{f}) = \mu(f)$, $f = \lim f_n$. □

3. Lemat. Oznaczmy przez $\mathcal{F}_0$ rodzinę domkniętych podzbiorów K typu G_δ, zaś przez $\mathcal{G}_0$ rodzinę ich dopełnień, czyli otwartych podzbiorów K typu F_σ. Jeśli μ jest miarą nieujemną na σ-ciele zbiorów Baire'a, to dla wszystkich zbiorów Baire'a E zachodzi $\mu(E) = \sup\{\mu(F) : F \in \mathcal{F}_0, F \subset E\} = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{G}_0, G \supset E\}$.

Dowód. Rodzina zbiorów, dla których zachodzi rozważany warunek, jest σ-ciałem. Wystarczy zatem pokazać, że zachodzi on dla każdego $E \in \mathcal{F}_0$. Niech więc E będzie domknięty, niech U_n będzie zstępującym ciągiem zbiorów otwartych i niech $E = \bigcap U_n$. Oczywiście $E \in \mathcal{F}_0$, więc $\mu(E) = \sup\{\mu(F) : F \in \mathcal{F}_0, F \subset E\}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech n będzie tak duże, że $\mu(U_n \setminus E) < \varepsilon$. Niech f będzie funkcją Urysohna dla E oraz $K \setminus U_n$, tzn. funkcją ciągłą z K w $[0, 1]$ równą 0 na E oraz 1 na $K \setminus U_n$. Wówczas $G = \{x : f(x) < 1/2\}$ jest otwarty w K i jest typu F_σ. Ponadto oczywiście $K \subset G$ oraz $G \subset U_n$, czyli $\mu(K) < \mu(G) + \varepsilon$. □

4. Twierdzenie Choqueta-Bishopa-de Leeuw. Niech X będzie przestrzenią lokalnie wypukłą, zaś K jej zwartym i wypukłym podzbiorem. Każdy punkt K jest wtedy środkiem ciężkości pewnej borelowskiej miary probabilistycznej na K znikającej na podzbiorach Baire'a rozłącznych z $\operatorname{ex} K$.

Dowód. Niech $x \in K$. Na mocy lematu 5.2 istnieje miara maksymalna μ taka, że $\delta_x \prec \mu$. W szczególności $x = \bar{\mu}$. Na mocy lematu 6.3 wystarczy dowieść, że jeśli $F \in \mathcal{F}_0$, to $\mu(F) = 0$. Niech U_n będzie zstępującym ciągiem zbiorów otwartych takim, że $F = \bigcap U_n$. Niech f_n będzie funkcją Urysohna dla F i $K \setminus U_n$. Na mocy lematu 6.2 $\mu(F) \leq -\lim \int (-f_n) d\mu = 0$. □

7 Kraty wektorowe

1. Definicja. Przestrzeń liniową X nazywamy uporządkowaną, jeśli zadany jest na niej częściowy porządek zgodny z dodawaniem ($x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$), niezmienniczy na mnożenie przez dodatnie skalary i ponadto $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$. Przestrzeń X nazywamy kratą liniową, jeśli dla każdych dwóch elementów $x, y \in X$ istnieją minimum $u = x \wedge y$ oraz maximum $v = x \vee y$ zadane poprzez własności $u \leq x \leq v$, $u \leq y \leq v$ oraz warunek $u' \leq x \leq v', u' \leq y \leq v' \Rightarrow u' \leq u, v \leq v'$. Oczywiście tak określone operacje są łączne.

Porządek w przestrzeni liniowej jest jednoznacznie zadany przez stożek dodatni $P = \{x \in X : x \geq 0\}$, bowiem $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y - x \in P$. Stożek dodatni P jest wypukły, niezmienniczy ze względu na mnożenie przez skalary i spełnia $P \cap (-P) = \{0\}$; przeciwnie, każdy taki zbiór zadaje pewien porządek.

2. Własności. Załóżmy, że X jest kratą wektorową, $x, y, z \in X$, P jest stożkiem dodatnim w X.

- Zachodzi $(x \wedge y) + z = (x + z) \wedge (y + z)$, $(x \vee y) + z = (x + z) \vee (y + z)$ oraz $-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y)$.
- Wobec powyższego $x + y - (x \wedge y) = x + y + ((-x) \vee (-y)) = y \vee x$.
- Jeśli $x, y, z \geq 0$, to $(x + y) \wedge z = ((x + y) \wedge (z + y)) \wedge z \leq ((x \wedge z) + y) \wedge ((x \wedge z) + z) = (x \wedge z) + (y \wedge z)$. Taki sam rachunek pokazuje, że $(x + y) \vee z \leq (x \vee z) + (y \vee z)$.
- Zachodzi $X = P - P$. W istocie, $x = (x \vee 0) - (x \wedge 0)$.

Ponadto $P - P$ jest kratą wektorową wtedy i tylko wtedy, gdy P jest kratą. Wynikanie w prawą stronę jest jasne. Jeśli zaś P jest kratą, to wystarczy zauważyć, że jeśli $x_1, x_2, y_1, y_2 \in P$, to wzór $(x_1 - x_2) \wedge (y_1 - y_2) = ((x_1 + y_2) \wedge (x_2 + y_1)) - (x_2 + y_2)$ prawidłowo określa operację minimum w $P - P$.

3. Lemat. Jeśli $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_m$ są nieujemnymi elementami kraty wektorowej oraz $x_1 + ... + x_n = y_1 + ... + y_n$, to istnieją nieujemne elementy $z_{i,j}$, $i = 1, .., n$, $j = 1, .., m$ takie, że $z_{i,1} + ... + z_{i,m} = x_i$, $z_{1,j} + ... + z_{n,j} = y_j$.

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Jeśli $n = 1$, to przyjmujemy $z_{1,j} = y_j$. Niech więc $n > 1$ i załóżmy, że dla dowolnych układów o długościach $n - 1$ i m zacodzi teza lematu. Określmy $z_{n,j} = (x_n \wedge (y_1 + ... + y_j)) - (x_n \wedge (y_1 + ... + y_{j-1}))$. Oczywiście $z_{n,j} \geq 0$ oraz $z_{n,1} + ... + z_{n,m} = x_n$. Ponadto $y_j + (x_n \wedge (y_1 + ... + y_{j-1})) \geq x_n \wedge (y_1 + ... + y_j)$, a więc $z_{n,j} \leq y_j$. Pozostaje zastosować założenie indukcyjne dla układów $x_1, ..., x_{n-1}$ oraz $y_1 - z_{n,1}, ..., y_m - z_{n,m}$. $\square$

4. Definicja. Mówimy, że stożek dodatni P_2 jest dziedzicznym podstożkiem stożka dodatniego P_1, jeśli warunki $x_2 - x_1 \in P_1$, $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$ pociągają za sobą $x_1 \in P_1$.

5. Lemat. Jeśli P_2 jest dziedzicznym podstożkiem P_1 oraz porządek $\leq_1$ wyznaczony przez P_1 na $P_1 - P_1$ jest kratowy, to również porządek $\leq_2$ zadany przez P_2 na $P_2 - P_2$ jest kratowy.

Dowód. Wystarczy rozważać porządki na P_1 i P_2 zamiast $P_1 - P_1$ i $P_2 - P_2$. Niech $x, y \in P_2 \subset P_1$. Niech $u = x \wedge_1 y$. Wówczas własność dziedziczności implikuje $u \in P_2$, $u \leq_2 x$ oraz $u \leq_2 y$. Ponadto jeśli $z \leq_2 x$ oraz $z \leq_2 y$, to oczywiście $z \leq_1 u$. Znów wobec własności dziedziczności otrzymujemy $z \leq_2 u$, a więc $u = x \wedge_2 y$. □

8 Jedyność miar reprezentujących

1. Lemat. Rodzina Q nieujemnych miar maksymalnych na K jest stożkiem i zadaje porządek czyniący z $Q - Q$ kratę liniową.

Dowód. Wystarczy udowodnić, że Q jest dziedzicznym podstożkiem stożka P miar nieujemnych (w którym minimum miar μ_1 i μ_2 dane jest wzorem $d(\mu_1 \wedge \mu_2) = \min\left(\frac{d\mu_1}{d\mu}, \frac{d\mu_2}{d\mu}\right) d\mu$, gdzie $\mu = \mu_1 + \mu_2$).

Zauważmy, że jeśli $\mu, \nu \in Q$ i $f \in \mathcal{C}$, to $(\mu + \nu)(f) = \mu(\bar{f}) + \nu(\bar{f}) = (\mu + \nu)(\bar{f})$, czyli (na mocy lematu 5.5) $\mu + \nu$ jest maksymalna. A więc Q jest stożkiem.

Niech $\mu \in P$, $\nu \in Q$, $\mu \leq \nu$. Załóżmy, że $\mu \prec \mu'$. Wtedy $\mu' + (\nu - \mu) \succ \mu + (\nu - \mu) = \nu$, czyli, wobec maksymalności ν, $\mu' = \mu$. □

2. Twierdzenie Choqueta-Meyera. Niech K będzie zwartym podzbiorem przestrzeni lokalnie wypukłej X. Następujące warunki są równoważne:

1. Porządek zadany przez stożek $P = \{(\lambda x, \lambda) : \lambda \geq 0, x \in K\}$ na $P - P$ jest kratą liniową.
2. Otoczka górna każdej funkcji wypukłej jest afiniczna.
3. Jeśli μ jest miarą maksymalną na K, zaś $f \in \mathcal{C}$, to $\mu(f) = \bar{f}(\bar{\mu})$.
4. Jeśli $f, g \in \mathcal{C}$, to $\overline{(f + g)} = \bar{f} + \bar{g}$.
5. Dla każdego $x \in K$ istnieje jedyna miara maksymalna na K o środku ciężkości x.

Jeśli te warunki są spełnione, to K nazywamy sympleksem (ściślej sympleksem Choqueta).

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): Na mocy lematu 2.13, $\bar{f}(x) = \sup\{\mu(f) : \bar{\mu} = x\}$. Twierdzimy, że w supremum wystarczy rozważać miary dyskretne.

Niech $\bar{\mu} = x$. Niech zbiory U_j tworzą skończone pokrycie K otwartymi zbiorami wypukłymi, spełniającymi warunek $|f(y) - f(z)| \le \varepsilon$ gdy $y, z \in U_j$. Niech $V_j = U_j \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{j-1})$; załóżmy, że wszystkie zbiory V_j mają dodatnią miarę μ. Określmy $\nu_j(A) = \mu(V_j \cap A)/\mu(V_j)$, $x_j = \bar{\nu}_j$, $\nu = \sum \mu(V_j)\delta_{x_j}$. Wówczas $|\nu(f) - \mu(f)| \le \varepsilon$ oraz $\bar{\nu} = \sum \mu(V_j)\bar{\nu}_j = \bar{\mu} = x$. To dowodzi naszego stwierdzenia.

Niech $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ oraz $\mu = \sum \lambda_j \delta_{y_j}$, $\bar{\mu} = x$. Wobec lematu 7.3 dla pewnych $z_{1,j}$ i $z_{2,j}$ z K oraz η_j zachodzi $\lambda x_1 = \sum \eta_j z_{1,j}$, $(1-\lambda)x_2 = \sum(\lambda_j - \eta_j)z_{2,j}$, $\lambda_j y_j = \eta_j z_{1,j} + (\lambda_j - \eta_j)z_{2,j}$. Niech teraz $\lambda\mu_1 = \sum \eta_j \delta_{z_{1,j}}$ oraz $(1-\lambda)\mu_2 = \sum(\lambda_j - \eta_j)z_{2,j}$. Wówczas $\bar{\mu_i} = x_i$ oraz:

$$\begin{aligned}\mu(f) = \sum \lambda_j f(y_j) &\le \sum \eta_j f(z_{1,j}) + \sum(\lambda_j - \eta_j) f(z_{2,j}) \\ &= \lambda\mu_1(f) + (1-\lambda)\mu_2(f) \le \lambda\bar{f}(x_1) + (1-\lambda)\bar{f}(x_2).\end{aligned}$$

Biorąc supremum po miarach dyskretnych μ otrzymujemy wypukłość $\bar{f}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Niech μ będzie miarą maksymalną, a $f \in \mathcal{C}$. Niech $\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{A} : h > f\}$. Oczywiście $\inf \mathcal{H} = \bar{f}$. Na mocy lematu 2.4, możemy zastosować lemat 5.4 dla $\bar{f}$, $\mathcal{H}$ oraz μ. Otrzymujemy $\mu(f) = \mu(\bar{f}) = \inf\{\mu(h) : h \in \mathcal{H}\} = \inf\{h(\bar{\mu}) : h \in \mathcal{H}\} = \bar{f}(\bar{\mu})$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Jeśli μ jest miarą maksymalną i $\bar{\mu} = x$, zaś $f \in \mathcal{C}$, to $\bar{f}(x) = \mu(f)$, a μ jest addytywne.

(4) $\Rightarrow$ (5): Niech $x \in K$. Dzięki addytywności otoczki górnej na funkcjach wypukłych, możemy określić $\mu(f - g) = \bar{f}(x) - \bar{g}(x)$ dla $f, g \in \mathcal{C}$. Jest to funkcjonał liniowy spełniający $\mu(f) \le \sup|f|$, a więc przedłuża się jednoznacznie (dzięki gęstości $\mathcal{C} - \mathcal{C}$ w $C(k)$) do funkcjonału liniowego na $C(K)$. Wobec $\mu(1) = 1$ oraz $\mu(f) \ge 0$ o ile $f \ge 0$, μ jest miarą probabilistyczną. Ponadto jeśli $f \in \mathcal{C}$, to na mocy 2.13 $\mu(f) = \bar{f}(x) = \sup\{\nu(f) : \bar{\nu} = x\}$. Oznacza to, że μ jest największą (w sensie porządku Choqueta-Bishopa-de Leeuw) miarą probabilistyczną o środku ciężkości x.

(5) $\Rightarrow$ (1): Zbiór Q nieujemnych miar maksymalnych odwzorowuje się ciągle, różnowartościowo i afinicznie na P poprzez $\lambda\mu \mapsto (\bar{\mu}, \lambda)$, gdzie $\lambda \ge 0$, zaś μ jest maksymalną miarą probabilistyczną. Na mocy lematu 8.1 Q zadaje porządek kratowy na $Q - Q$. Oznacza to, że taką własność ma też P. $\square$

3. Twierdzenie Choqueta. Jeśli $\operatorname{ex} K$ jest zbiorem Baire'a (czyli np.

jeśli K jest metryzowalny), to miara jest maksymalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest skupiona na $\operatorname{ex} K$.

Dowód. Niech μ będzie miarą skupioną na $\operatorname{ex} K$ i $f \in C(K)$. Wówczas $\{x : f(x) = \bar{f}(x)\}$ zawiera $\operatorname{ex} K$, więc $\mu(f) = \mu(\bar{f})$. Na mocy lematu 5.5, μ jest miarą maksymalną.

Jeśli μ jest miarą maksymalną, to znika na zbiorach zwartych typu G_δ (dowód tw. Choqueta-Bishopa-de Leeuw), a więc, zgodnie z lematem 6.3, na $K \setminus \operatorname{ex} K$. □

9 Własności odwzorowania $\mu \mapsto \bar{\mu}$

1. Twierdzenie. Odwzorowanie r przyporządkujące maksymalnym miarom probabilistycznym μ ich środek ciężkości $\bar{\mu}$ jest ciągłe i afiniczne. Ponadto obraz r jest równy K. Jeśli K jest sympleksem, to r jest różnowartościowe, $x \mapsto r^{-1}(x)(f)$ jest borelowskie, zaś r^{-1} jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{ex} K$ jest domknięty.

Dowód. Pierwsza część twierdzenia oraz różnowartościowość r wynikają z udowodnionych wcześniej twierdzeń. Afiniczność r^{-1} wynika z afiniczności r.

Niech $f \in \mathcal{C}$. Wówczas $r^{-1}(x)(f) = \bar{f}(x)$ (tw. Choqueta-Meyera) jest górnie półciągłe (a więc borelowskie) ze względu na x. Teza jest więc prawdziwa dla $f \in \mathcal{C} - \mathcal{C}$. Jest to zbiór gęsty w $C(K)$, zaś jeśli $f_n \to f$, to $r^{-1}(x)(f_n) \to r^{-1}(x)(f)$. To dowodzi drugiej części twierdzenia.

Jeśli $\operatorname{ex} K$ jest domknięty, to na mocy twierdzenia Choqueta zbiór probabilistycznych miar ekstremalnych jest zbiorem miar probabilistycznych na $\operatorname{ex} K$, a więc jest zwarty. Zatem r jest homeomorfizmem.

Niech teraz r^{-1} będzie ciągły. Zbiór tych x, dla których $r^{-1}(x) = \delta_x$ jest domknięty, bowiem obie strony są ciągłymi funkcjami x. Ale jeśli $r^{-1}(x) = \delta_x$, to δ_x jest jedyną miarą probabilistyczną na K o środku ciężkości x (bo jeśli $\bar{\mu} = x$, to $\delta_x \prec \mu$), a więc $x \in \operatorname{ex} K$. □