Zadanie: Niech T będzie operatorem na przestrzeni $X = \{x \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}} : ||x||_2 < \infty\}$ danym wzorem $Tx(n) = x(n+1)$. Czy istnieją dwa niezerowe ciągi $x, y \in X$ takie, że $\langle T^n x, T^m y\rangle = 0$ dla wszystkich $n, m \geq 0$? Jaka jest odpowiedź, gdy zastąpimy X przestrzenią $Y = \{x \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}_+} : ||x||_2 < \infty\}$?

Rozwiązanie: Tak. Niech $T = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ i niech x, y będą współczynnikami rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji $f, g \in L^2(T)$ o rozłącznych nośnikach. Wówczas $\langle T^n x, T^m y\rangle = \int_T \bar{z}^n f(z)\, z^m \bar{g}(z) dz = 0$.

Jeśli np. $f = \mathbf{1}_{\{z\,:\,\Re z > 0\}}$, $g = 1 - f$, to $x(n) = (-1)^n y(n) = \frac{2}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ dla $n \neq 0$, $x(0) = y(0) = \pi$.

W przestrzeni Y takie ciągi nie istnieją, bowiem gdyby istniały, to $x(n)y(m) = \langle T^n x, T^m y\rangle - \langle T^{n+1}x, T^{m+1}y\rangle = 0$, przez co $x = 0$ lub $y = 0$.

A co jeśli rozważymy operator S na Y taki, że $Sx(n) = x(n-1)$, $Sx(0) = 0$?

Zadanie: Żaba porusza się po kracie $\mathbf{Z}^2$ skokami o ustalonej długości. Po pewnej liczbie skoków żaba powróciła do punktu wyjścia. Udowodnić, że wykonała parzystą liczbę skoków.

Rozwiązanie: Zapis $2^a||z$ będzie oznaczał, że $2^a|z$ i $2^{a+1} \not| z$ ($z \neq 0$). Przypuśćmy, że $x, y \in \mathbf{Z}$, $2^k||x$ i $2^l||y$. Wówczas $2^{2\max(k,l)}||x^2 + y^2$ jeśli $k \neq l$, zaś $2^{2k+1}||x^2 + y^2$ jeśli $k = l$.

Niech z oznacza kwadrat długości skoku i niech $2^a||z$. Przez (x_i, y_i) oznaczmy wektory kolejnych skoków żaby, $i = 1, 2, ..., m$. Skoro żaba powróciła do punktu wyjścia, $\sum x_i = 0 = \sum y_i$. Ponadto $x_i^2 + y_i^2 = z$. Stąd:

$$m\,z = 2\sum_{i<j}(x_i x_j + y_i y_j)\,.$$

Jeśli a jest parzyste, to na mocy początkowej uwagi z równości $x_i^2 + y_i^2 = z$ wynika bądź $2^{a/2}||x_i$ i $2^{a/2}|y_i$, bądź $2^{a/2}|x_i$ i $2^{a/2}||y_i$ (przypadek $x_i = 0$ lub $y_i = 0$ jest tu uwzględniony). W każdym przypadku $2^a|x_i x_j + y_i y_j$, więc $2|m$.

Jeśli zaś a jest nieparzyste, to wobec początkowej uwagi otrzymujemy $2^{(a-1)/2}||x_i$ oraz $2^{(a-1)/2}||y_i$, czyli ponownie $2^a|x_i x_j + y_i y_j$, skąd wynika $2|m$.

Zadanie: Czy funkcja f klasy $C^\infty(\mathbf{R})$ taka, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ pewna pochodna $f^{(n)}(x) = 0$ musi być wielomianem?

Rozwiązanie: Tak. Niech $F_n = \{x \in \mathbf{R} : f^{(n)}(x) = 0\}$, $G_n = \operatorname{Int} F_n$. Ponieważ F_n są domknięte oraz $\bigcup F_n = \mathbf{R}$, wobec twierdzenia Baire'a na każdym domkniętym odcinku I pewien zbiór $F_n \cap I$ ma niepuste wnętrze. Innymi słowy $G = \bigcup G_n$ jest gęsty w $\mathbf{R}$.

Jeśli pewna pochodna funkcji zeruje się na pewnym przedziale, to wszystkie jej pochodne wyższych rzędów również są stale równe zero na tym przedziale. Zbiory G_n tworzą zatem ciąg wstępujący.

Ponieważ $f^{(n)}$ jest stała na każdej składowej zbioru G_{n+1}, więc każda taka składowa albo jest składową G_n, albo jest z G_n rozłączna. Indukcyjnie dowodzi się, że każda składowa zbioru G_{n+k} ($k \geq 0$) ma tę własność. Niech J będzie składową zbioru G i niech n będzie indeksem o tej własności, że $G_n \cap J$ jest niepuste. Ponieważ G_n zawiera się w G, więc $G_n \cap J$ zawiera pewną składową J' zbioru G_n. Dla każdego k składowa zbioru $G_{n+k} \cap J$ zawierająca J' nie jest rozłączna z G_n, a więc jest równa J'. Stąd wynika, że J' jest składową zbioru G, czyli $J' = J$. Podsumowując, każda składowa zbioru G jest składową pewnego G_n.

Jeśli $f^{(n)}$ jest stale równa zero na (a,b) i (b,c), to jest stale równa zero na (a,c), zatem żadne dwie składowe G_n (a więc również żadne dwie składowe G) nie mogą mieć wspólnego końca. Wynika stąd, że G^c nie zawiera punktów izolowanych.

Przypuśćmy, że G^c jest niepuste. Wówczas, ponownie na mocy twierdzenia Baire'a, istnieje n oraz niepusty zbiór $A = G^c \cap (a,b)$ zawarty w pewnym F_n. Bez utraty ogólności możemy założyć, że $a, b \in G^c$. Dla każdego $x \in A$ istnieje ciąg $x_j \in A \setminus \{x\}$ zbieżny do x. Otrzymujemy:

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{j\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_j) - f^{(n)}(x)}{x_j - x} = 0\,,$$

a więc $A \subseteq F_{n+1}$. Indukcyjnie — $A \subseteq F_{n+k}$ $(k \geq 0)$.

Niech J będzie składową zbioru G zawartą w (a,b); oba jej końce należą do A. Na J funkcja f jest wielomianem stopnia mniejszego niż n, bowiem $f^{(n+k)}$ zeruje się na końcach J dla wszystkich $k \geq 0$. Zatem $J \subseteq F_n$ i, wobec dowolności J, $(a,b) \subseteq F_n$. Stąd wynika, że $(a,b) \subseteq G$, co przeczy wcześniejszemu stwierdzeniu, że $G^c \cap (a,b)$ jest niepuste.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $G = \mathbf{R}$, czyli $\mathbf{R}$ jest składową G. Stąd wynika, że $\mathbf{R}$ jest składową pewnego G_n, a więc f jest wielomianem stopnia mniejszego niż n.

Zadanie: Czy przestrzeń liczb całkowitych z topologią generowaną przez wszystkie obustronnie nieskończone ciągi arytmetyczne jest metryzowalna?

Rozwiązanie: Tak. Jest ona homeomorficzna z orbitą generatora w odometrze silniowym. Można też wskazać metrykę bezpośrednio:

$$d(x,y) = 1 - \sum_{n \mid x-y} \frac{1}{2^n} = \sum_{n \nmid x-y} \frac{1}{n^2}\,.$$

Pierwsze sumowanie rozciąga się na wszystkie dodatnie dzielniki liczby $x-y$, drugie – na dodatnie niedzielniki $x-y$.

Łatwo sprawdzić, że d jest metryką. Niech k będzie dowolną liczbą naturalną. Określmy $r = 2^{-k}$. Wowczas kula $B(x,r)$ w metryce d o srodku x i promieniu r jest obustronnie nieskonczonym ciagiem arytmetycznym o różnicy równej najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb $1, 2, ..., k$ i zawierającym x. Zatem faktycznie rozważana topologia pochodzi od d.