Spis treści

Wybrane oznaczenia

Zbiory:

$\mathbb{Z}$	liczby całkowite
$\mathbb{R}$	liczby rzeczywiste
$\mathbb{C}$	liczby zespolone
$\mathbb{R}^d$	przestrzeń euklidesowa wymiaru d współrzędne $x \in \mathbb{R}^d$ oznaczane są $x_1, \dots, x_d$, $x = (x_1, \dots, x_d)$
$\mathbb{T}$	$= \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ (równoważnie: odcinek $[-\pi, \pi]$ z utożsamionymi końcami)
E	zbiór borelowski
D,G	zbiór otwarty
F	zbiór domknięty
K	zbiór zwarty

Przestrzenie ciągów:

$\|(a_n)\|_p$	$= (\sum \|a_n\|^p)^{1/p}$ $(p \in [1, \infty))$
$\|(a_n)\|_\infty$	$= \sup \|a_n\|$
ℓ^p	przestrzeń Banacha (z normą $\|\cdot\|_p$) podwójnie nieskończonych ciągów $(a_n : n \in \mathbb{Z})$ dla których $\sum \|a_n\|^p < \infty$
ℓ^∞	przestrzeń Banacha (z normą $\|\cdot\|_\infty$) podwójnie nieskończonych ciągów ograniczonych
c_0	przestrzeń Banacha (z normą $\|\cdot\|_\infty$) podwójnie nieskończonych tych ciągów (a_n), dla których $\lim_{n \to \pm\infty} a_n = 0$

Przestrzenie funkcji i miar:

$\|f\|_p$	$= (\int \|f\|^p)^{1/p}$ $(p \in [1, \infty)$; całkowanie na przestrzeni wynikającej z kontekstu)
$\|f\|_\infty$	$= \operatorname{ess\,sup} \|f\|$
$\operatorname{supp} f$	$= \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$
$L^p(E)$	zbiór tych borelowskich funkcji $f : E \to \mathbb{C}$, dla których $\|f\|_p < \infty$ $(p \in [1, \infty])$
$\mathscr{L}^p(E)$	przestrzeń Banacha klas równoważności funkcji z $L^p(E)$ względem relacji równości p.w. (dla formalnej poprawności niektórych sformułowań)
$C(D)$	zbiór ciągłych funkcji $f : D \to \mathbb{C}$
$C_\mathrm{b}(D)$	przestrzeń Banacha ograniczonych funkcji $f \in C(D)$ (z normą $\|\cdot\|_\infty$)
$C_0(D)$	przestrzeń Banacha tych funkcji $f \in C(D)$, dla których $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$ oraz $\lim_{x \to z} f(x) = 0$ dla każdego $z \in \partial D$ (z normą $\|\cdot\|_\infty$)
$C_\mathrm{c}(D)$	zbiór funkcji $f \in C(D)$ o zwartym nośniku ($\operatorname{supp} f$ jest zwarty i $\operatorname{supp} f \subseteq D$)
$C_*^k(D)$	zbiór funkcji f, których pochodne cząstkowe stopnia nie większego niż k istnieją i należą do C_* $(k = 0, 1, \dots, \infty;\ * \in \{\varnothing, \mathrm{b}, 0, \mathrm{c}\})$
$\mathscr{M}(E)$	zbiór skończonych zespolonych miar borelowskich na E

Przestrzenie funkcji i miar okresowych:

$C(\mathbb{T})$	(i podobne oznaczenia) zbiór ciągłych funkcji na $\mathbb{T}$ każda taka funkcja jest automatycznie utożsamiana z funkcją 2π-okresową na $\mathbb{R}$
$\mathscr{M}(\mathbb{T})$	zbiór skończonych zespolonych miar borelowskich na $\mathbb{T}$ każda taka miara jest automatycznie utożsamiana z „miarą 2π-okresową” na $\mathbb{R}$ (uwaga: taki obiekt nie jest skończoną miarą, a nawet może nie być miarą)

Przestrzenie funkcji harmonicznych i holomorficznych:

$\mathrm{Hol}(D)$	przestrzeń funkcji holomorficznych w D
$\widetilde{\mathrm{Hol}}(D)$	przestrzeń funkcji antyholomorficznych w D

$\mathrm{Harm}(D)$	przestrzeń funkcji harmonicznych w D
$H^p(D)$	rzeczywista przestrzeń Hardy'ego na D ($p \in [1, \infty]$)
$\mathrm{Hol}^p(D)$	zespolona przestrzeń Hardy'ego na D ($p \in [1, \infty]$)

Wybrane funkcje:

$e_n(x) = e^{inx}$

$e_\xi(x) = e^{i\xi \cdot x}$

$D_k(x) = \sin((k + \frac{1}{2})x)/\sin(\frac{1}{2}x)$ (jądro Dirichleta)

$\tilde{D}_k(x) = \sin(kx)/\tan(\frac{1}{2}x)$ (zmodyfikowane jądro Dirichleta)

$F_k(x) = \frac{1}{k+1}(\sin((\frac{k+1}{2})x)/\sin(\frac{1}{2}x))^2$ (jądro Fejéra)

$K_r(x) = (4\pi r)^{-d/2} \exp(-|x|^2/(4r))$ (jądro Gaussa–Weierstrassa)

$P_r(x) = \Gamma(\frac{d+1}{2})\pi^{-(d+1)/2} t(t^2 + |x|^2)^{-(d+1)/2}$ (jądro Poissona w $\mathbb{R}^d$)

$P_r(x) = \frac{1}{2\pi}(1 - r^2)/(1 - 2r \cos x + r^2)$ (jądro Poissona dysku)

Wybrane operatory:

$S_k f = f * D_k$

$\tilde{S}_k f = f * \tilde{D}_k$

$\sigma_k f = f * F_k$

1. **Wprowadzenie**

Termin *analiza harmoniczna* oznacza dział analizy matematycznej, który dotyczy reprezentacji funkcji za pomocą „fal prostych". Wg *Słownika języka polskiego PWN*, słowo *harmoniczny* oznacza „zbudowany na zasadach harmonii muzycznej". W tym znaczeniu *harmonia* to *sposób łączenia i budowy akordów w utworze muzycznym*, jeden z trzech — obok *melodii* i *rytmu* — elementów muzyki.

Które akordy brzmią harmonijnie? Dźwięk dociera do naszych uszu w postaci fal akustycznych, tj. regularnych drgań cząsteczek powietrza. Fale takie można opisać za pomocą funkcji $f(t)$, opisującej zmiany ciśnienia w czasie. Na podstawie eksperymentów — dawniej używano np. strun, dziś można do tego zadania wykorzystać komputer — stwierdzono, że dobrze brzmią dźwięki opisane za pomocą funkcji trygonometrycznych, o ile współczynniki częstości tworzą ułamki o niewielkich licznikach i mianownikach. Na przykład akord a-moll, nawet w najsurowszej postaci:

$$\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(528 \cdot 2\pi t) + \sin(704 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$$

brzmi poprawnie; przy tym $\frac{528}{440} = \frac{6}{5}$, $\frac{704}{528} = \frac{4}{3}$, $\frac{880}{704} = \frac{5}{4}$. Natomiast gdy złożymy dwa dźwięki o podobnych częstotliwościach, na przykład:

$$\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(460 \cdot 2\pi t),$$

otrzymamy dźwięk przykry dla ucha.

Zamieniając funkcje trygonometryczne na inne funkcje okresowe otrzymamy bardziej złożone dźwięki; fale sinusoidalne mają najbardziej surowe brzmienie. Czy każdy dźwięk można rozłożyć na fale sinusoidalne? W dużym uproszczeniu — tak! Właśnie to zagadnienie leży u podstaw analizy harmonicznej.

W pierwszej części kursu zajmiemy się rozkładem sygnałów okresowych, czyli badaniem szeregów Fouriera. Próba analogicznego rozkład dowolnych sygnałów prowadzi do transformaty Fouriera, którą zajmiemy się od razu w wersji wielowymiarowej. Uogólnienia tych podstawowych koncepcji składają się na analizę harmoniczną, na przykład:

- badaniem transformaty Fouriera na grupach topologicznych zajmuje się abstrakcyjna teoria harmoniczna;
- rozszerzenie teorii dla podzbiorów przestrzeni euklidesowych, rozmaitości itp. prowadzi do teorii spektralnej operatora Laplace'a z warunkami brzegowymi;
- dokładna analiza własności transformaty Fouriera wiąże się z teorią całek singularnych.

Analiza harmoniczna jest silnie związana z analizą funkcjonalną, znajduje zastosowania w teorii liczb, fizyce kwantowej, teorii równań różniczkowych, a także wielu naukach stosowanych. Z transformatą Fouriera zetknął się prawdopodobnie każdy: wykorzystuje się ją m.in. w kompresji dźwięku i obrazu, rezonansie magnetycznym i przetwarzaniu sygnałów.

2. **Szeregi Fouriera — definicje i teoria $\mathscr{L}^2$**

Przez niemal cały niniejszy kurs będziemy rozważali funkcje określone na na odcinku $[-\pi, \pi]$, którego końce zostały utożsamione. Zbiór ten oznaczamy $\mathbb{T}$. Formalnie definiujemy $\mathbb{T}$ jako grupę ilorazową $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. W praktyce nie będziemy jednak odróżniać $x \in \mathbb{R}$ od jego klasy abstrakcji $x + 2\pi\mathbb{Z}$. Czasem dla wygody identyfikujemy $\mathbb{T}$ z przedziałem $[-\pi, \pi)$ lub $[0, 2\pi)$.

Będziemy utożsamiać funkcje określone na $\mathbb{T}$ z funkcjami 2π-okresowymi określonymi na $\mathbb{R}$. Ciągła funkcja f na $\mathbb{T}$ musi zatem spełniać warunek $f(-\pi) = f(\pi)$. Przestrzeń ciągłych funkcji na $\mathbb{T}$ oznaczamy $C(\mathbb{T})$; normą na tej przestrzeni jest $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{T}\}$. Dla $p \in [1, \infty)$ przez $L^p(\mathbb{T})$ oznaczamy zbiór funkcji mierzalnych f, dla których $|f|^p$ jest całkowalna na $\mathbb{T}$. Przestrzeń Lebesgue'a na $\mathbb{T}$, oznaczana $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, to formalnie przestrzeń klas abstrakcji funkcji z $L^p(\mathbb{T})$ w relacji równości prawie wszędzie, z normą $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Tradycyjnie definiujemy też zbiór mierzalnych funkcji ograniczonych $L^\infty(\mathbb{T})$ i przestrzeń klas abstrakcji $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ z normą $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in \mathbb{T}\}$. Zazwyczaj nie będziemy przykładać wagi do rozróżnienia między $L^p(\mathbb{T})$ i $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$.

> Twierdzenie 2.1. Funkcje $e_n(x) = e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ tworzą ortogonalny układ zupełny w $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$.

Dowód. Zachodzi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_n(x)\overline{e_m(x)}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \begin{cases} 2\pi & \text{gdy } n = m, \\ 0 & \text{gdy } n \neq m. \end{cases}$$

Zupełność wynika wprost z kolejnego lematu. □

> Lemat 2.2. Zbiór $\mathscr{P}$ (zespolonych) *wielomianów trygonometrycznych*:
>
> $$\mathscr{P} = \left\{ \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n : N \geqslant 1,\ \alpha_{-N}, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C} \right\}$$
>
> jest gęsty w przestrzeniach Banacha $C(\mathbb{T})$ i $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ dla $p \in [1, \infty)$ (ale nie dla $p = \infty$).

Dowód. Ponieważ $e_n e_m = e_{n+m}$, zbiór $\mathscr{P}$ jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie — tworzy *algebrę* funkcji. Ta algebra składa się z ciągłych funkcji na $\mathbb{T}$ oraz: (1) zawiera stałą ($e_0(z) = 1$); (2) rozdziela punkty ($e_1(z) = e_1(w) \iff z = w$) i (3) jest zamknięta ze względu na sprzężenie zespolone ($\overline{e_n(z)} = e_{-n}(z)$), zatem na mocy twierdzenia Stone'a–Weierstrassa każdą funkcję ciągłą f na $\mathbb{T}$ można przybliżyć jednostajnie wielomianami trygonometrycznymi. Innymi słowy, $\mathscr{P}$ jest gęsty w przestrzeni Banacha $C(\mathbb{T})$ funkcji ciągłych na $\mathbb{T}$.

Niech $p \in [1, \infty)$. Zbieżność jednostajna jest mocniejsza niż zbieżność w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, zatem domknięcie $\mathscr{P}$ w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ zawiera $C(\mathbb{T})$. Ponieważ $C(\mathbb{T})$ jest gęstym podzbiorem $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ (jest to wniosek z twierdzenia Łuzina i jednowymiarowej wersji lematu Urysohna), domknięcie $\mathscr{P}$ w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ zawiera całe $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$. □

> Ćwiczenie 2.3. Dlaczego $\mathscr{P}$ nie jest gęstym podzbiorem $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$?
>
> Ćwiczenie 2.4. Wywnioskuj, że funkcje $f_n(x) = \cos(nx)$ $(n \geqslant 0)$ oraz $g_n(x) = \sin(nx)$ $(n \geqslant 1)$ tworzą (łącznie) układ ortogonalny zupełny na $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$.

Ćwiczenie 2.5. Wywnioskuj, że funkcje $f_n(x) = \cos(nx)$ ($n \geqslant 0$) tworzą układ ortogonalny zupełny na $\mathscr{L}^2([0,\pi])$.

Ćwiczenie 2.6. Wywnioskuj, że funkcje $f_n(x) = \sin(nx)$ ($n \geqslant 1$) tworzą układ ortogonalny zupełny na $\mathscr{L}^2([0,\pi])$.

Ćwiczenie 2.7. Podaj analogiczne cztery zupełne układy ortogonalne funkcji w $\mathscr{L}^2([a,b])$ dla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Z ogólnej teorii przestrzeni Hilberta wynika, że zupełny układ ortogonalny wektorów jest bazą: każdy wektor można zapisać jako nieskończoną kombinację liniową wektorów bazowych na dokładnie jeden sposób. Stąd natychmiast wynika twierdzenie sformułowane zaraz po poniższej definicji. Przypomnijmy, że $\mathscr{L}^2(\mathbb{T}) \subseteq \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz $\mathscr{L}^1(\mathbb{T}) \subseteq \mathscr{M}(\mathbb{T})$, jeśli utożsamimy $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ z miarą $f(x)dx$ o gęstości $f(x)$. Współczynniki $\hat{f}(n)$ definiujemy ogólniej, dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, a nawet dla skończonych zespolonych miar borelowskich μ na $\mathbb{T}$; przestrzeń takich miar oznaczamy przez $\mathscr{M}(\mathbb{T})$. Uwaga: miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ utożsamiamy czasem z ich 2π-okresowymi rozszerzeniemi, ale należy pamiętać, że takie rozszerzenie formalnie może nie być miarą (rozkład Hahna takiego rozszerzenia może mieć nieskończone wszystkie składowe: część dodatnią części rzeczywistej itd.).

Definicja 2.8. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ i $n \in \mathbb{Z}$, to określamy *współczynniki szeregu Fouriera* funkcji f:

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e_n(x)}dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Analogicznie jeśli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ i $n \in \mathbb{Z}$, to określamy *współczynniki szeregu Fouriera* miary μ:

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-inx}\mu(dx).$$

Dla $p \in [1,\infty)$ przez ℓ^p oznaczamy przestrzeń podwójnie nieskończonych ciągów zespolonych $(a_n : n \in \mathbb{Z})$, dla których $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^p < \infty$, z normą $\|(a_n)\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^p)^{1/p}$. Podobnie ℓ^∞ to przestrzeń ciągów ograniczonych, z normą $\|(a_n)\|_\infty = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{Z}\}$. Czasem zamiast a_n piszemy $a(n)$, zaś zamiast (a_n) po prostu a.

Twierdzenie 2.9. Jeśli $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$, to $\hat{f} \in \ell^2$ oraz $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$. Ponadto

$$f = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e_n; \tag{2.1}$$

w powyższej równości *(zespolony) szereg Fouriera* funkcji f jest bezwzględnie zbieżny w $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$. Co więcej, każdy ciąg $(a_n) \in \ell^2$ jest ciągiem współczynników szeregu Fouriera pewnej funkcji $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$, mianowicie $f = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$. □

Innymi słowy *transformacja Fouriera*, przyporządkowująca funkcji $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ jej ciąg współczynników Fouriera $\hat{f} \in \ell^2$, jest — z dokładnością do czynnika $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ — operatorem unitarnym (tj. przyporządkowanie f ciągu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ jest odwzorowaniem unitarnym). Z twierdzenia 2.9 łatwo otrzymujemy rozwinięcie w *klasyczny* (*rzeczywisty*) *szereg Fouriera*.

Twierdzenie 2.10. Jeśli $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$, to

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \tag{2.2}$$

(szeregi bezwzględnie zbieżne w $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$), gdzie dla $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx. \end{aligned}$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 2.9,

$$\begin{aligned} 2\pi f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx} \\ &= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(\hat{f}(n)+\hat{f}(-n))\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty}(i\hat{f}(-n)-i\hat{f}(n))\sin(nx). \end{aligned}$$

Ponadto $\hat{f}(0) = 2\pi a_0$, $\hat{f}(n)+\hat{f}(-n) = 2\pi a_n$, $i\hat{f}(-n)-i\hat{f}(n) = 2\pi b_n$. □

Współczynniki a_n i b_n w twierdzeniu są poprawnie określone dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Zbieżność szeregu (2.2) w tym przypadku w jakimkolwiek sensie nie jest oczywista, właśnie tym zagadnieniem (w wersji zespolonej) zajmować się będziemy przez kilka następnych rozdziałów. Dla podkreślenia ścisłego związku funkcji i jej szeregu Fouriera przy braku zbieżności punktowej w ogólnym przypadku, często pisze się

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)),$$

co odczytujemy: funkcji f odpowiada szereg Fouriera po prawej stronie.

Klasyczny szereg Fouriera (2.2) jest ważny przede wszystkim w zastosowaniach, gdy rozważany sygnał ma wartości rzeczywiste. W sformułowaniach twierdzeń, dowodach, a także w niektórych zastosowaniach (gdy sygnał ma wartości zespolone) zazwyczaj wygodniej jest korzystać z zespolonej wersji (2.1).

Ćwiczenie 2.11. Znajdź rozwinięcia w (zespolony) szereg Fouriera funkcji

$$\begin{aligned} &f_1(x) = 1, && f_2(x) = x, && f_3(x) = |x|, \\ &f_4(x) = \mathbb{1}_{(0,\pi)}(x) - \mathbb{1}_{(-\pi,0)}(x), && f_5(x) = |\sin x|, && f_6(x) = \sin\tfrac{x}{2} \end{aligned}$$

(wszystkie funkcje określone na przedziale $[-\pi,\pi)$).

Ćwiczenie 2.12. Znajdź rozwinięcia w (zespolony) szereg Fouriera miary δ_0 i ogólniej δ_a (gdzie $\delta_a(E) = \mathbb{1}_E(a)$ jest miarą Diraca skupioną w a).

Ćwiczenie 2.13. Sprawdź, że jeśli $f = a_1f_1 + a_2f_2$, to $\hat{f} = a_1\hat{f_1} + a_2\hat{f_2}$ ($f_1, f_2 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$).

Ćwiczenie 2.14. Wywnioskuj z twierdzenia 2.10, że jeśli $f \in \mathscr{L}^2([0,\pi])$, to

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

(*szereg cosinusów* bezwzględnie zbieżny w $\mathscr{L}^2([0,\pi])$), gdzie dla $n \geqslant 1$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx.$$

Ćwiczenie 2.15. Udowodnij analogicznie, że jeśli $f \in \mathscr{L}^2([0,\pi])$, to

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

(*szereg sinusów* bezwzględnie zbieżny w $\mathscr{L}^2([0,\pi])$), gdzie dla $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx.$$

Ćwiczenie 2.16. Wykorzystując poprzednie ćwiczenia i związek pomiędzy różnymi rodzajami szeregów Fouriera (zespolony, cosinusów, sinusów), znajdź rozwinięcia w szereg sinusów i szereg cosinusów funkcji

$$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = x, \qquad f_3(x) = \sin x$$

(wszystkie funkcje określone na przedziale $[0,\pi]$).

3. **Szeregi Fouriera — własności współczynników**

Przypomnijmy, że wahanie całkowite miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ zdefiniowane jest wzorem

$$\|\mu\| = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{T}} f(x) \mu(dx) \right| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1 \right\}.$$

Dla miar rzeczywistych równoważnie $\|\mu\| = \mu_+(\mathbb{T}) + \mu_-(\mathbb{T})$, gdzie $\mu = \mu_+ - \mu_-$ jest rozkładem Hahna miary μ. Podobny wzór w przypadku zespolonym nie ma miejsca, ale zachodzi $\|\mu\| \leqslant (\operatorname{Re}\mu)_+(\mathbb{T}) + (\operatorname{Im}\mu)_+(\mathbb{T}) + (\operatorname{Re}\mu)_-(\mathbb{T}) + (\operatorname{Im}\mu)_-(\mathbb{T}) \leqslant 2\|\mu\|$.

Pierwszy wynik tego rozdziału to elementarne oszacowanie normy supremum współczynników.

Fakt 3.1. Jeśli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to $\hat{\mu} \in \ell^\infty$ i $\|\hat{\mu}\|_\infty \leqslant \|\mu\|$. W szczególności $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. □

Jeśli miara μ jest nieujemna, to $\|\mu\| = \mu(\mathbb{T}) = \hat{\mu}(0)$. Podobnie jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ jest nieujemną funkcją, to $\|f\|_1 = \hat{f}(0)$. Powyższy fakt można więc wyrazić w następujący sposób.

Wniosek 3.2. Przekształcenie $\mu \mapsto \hat{\mu}$ (*transformacja Fouriera*) jest ciągłym operatorem liniowym z $\mathscr{M}(\mathbb{T})$ do ℓ^∞, o normie równej 1. Podobnie przekształcenie $f \mapsto \hat{f}$ jest ciągłym operatorem liniowym z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ do ℓ^∞ o normie równej 1. □

Ponieważ funkcje $e_n(x) = e^{inx}$ są ciągłe, transformacja Fouriera pozostaje ciągłym operatorem liniowym z $\mathscr{M}(\mathbb{T})$ do ℓ^∞, jeśli w $\mathscr{M}(\mathbb{T})$ rozważana jest topologia *słabej zbieżności, zaś w ℓ^∞ topologia zbieżności punktowej.

Dla funkcji z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ tezę wniosku można istotnie wzmocnić. Zbiór ciągów $(a_n : n \in \mathbb{Z})$ spełniających warunek $\lim_{n\to\pm\infty} a_n = 0$ oznaczamy przez c_0.

Lemat 3.3 (*Lemat Riemanna-Lebesgue'a*). Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, to $\hat{f} \in c_0$. Innymi słowy, transformacja Fouriera jest ciągłym operatorem liniowym z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ do c_0.

Dowód. Teza lematu jest prawdziwa, gdy f jest wielomianem trygonometrycznym, bowiem wówczas $\hat{f}(n) \neq 0$ tylko dla skończenie wielu n, zatem $\hat{f} \in c_0$. Wielomiany trygonometryczne są gęste w $\mathscr{L}^1$, a transformacja Fouriera jest ciągłym operatorem liniowym z $\mathscr{L}^1$ w ℓ^∞. Ponieważ c_0 jest domkniętym podzbiorem ℓ^∞, obraz $\mathscr{L}^1$ przez transformację Fouriera jest zawarty w c_0. □

W badaniu zbieżności szeregów Fouriera bardzo istotna jest szybkość zaniku współczynników. Wiemy już, że jeśli $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$, to $\hat{f} \in \ell^2$, jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, to $\hat{f} \in c_0$, zaś jeśli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to $\hat{\mu} \in \ell^\infty$. Kolejny rezultat podaje oszacowanie współczynników funkcji różniczkowalnych.

Definicja 3.4. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jest dystrybuantą skończonej miary zespolonej $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, jeśli $\mu([x, y)) = f(y) - f(x)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Analogicznie mówimy, że $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ jest dystrybuantą miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, jeśli $\mu([x, y)) = f(y) - f(x)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ (utożsamiamy f i μ z ich 2π-okresowymi rozszerzeniami).

Zauważmy, że jeśli f jest dystrybuantą $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to ze względu na okresowość f mamy $\mu(\mathbb{T}) = f(\pi) - f(-\pi) = 0$. Ponadto $f(x) = f(0) + \mu([0, x))$. Jeśli f jest dystrybuantą μ, to $\|\mu\|$ jest równe wahaniu całkowitemu funkcji f na przedziale $[-\pi, \pi]$. Jeśli funkcja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ma skończone wahanie całkowite na przedziale $[-\pi, \pi]$, to ma granice jednostronne $f_+(x)$, $f_-(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{T}$, $f = f_- = f_+$ poza co najwyżej przeliczalną liczbą punktów oraz f_- jest dystrybuantą pewnej miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$.

Lemat 3.5. Jeśli f jest dystrybuantą miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to $\hat{\mu}(n) = in\hat{f}(n)$ dla $n \in \mathbb{Z}$. W szczególności jeśli $f \in C(\mathbb{T})$ jest różniczkowalna w każdym punkcie i $g = f' \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, to $\hat{g}(n) = in\hat{f}(n)$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

Dowód. Na mocy twierdzenia Fubiniego, dla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(n) &= \int_{[0,2\pi)} e^{-inx}\mu(dx) = \int_{[0,2\pi)} (e^{-inx} - 1)\mu(dx) \\ &= in \int_{[0,2\pi)} \left(\int_{(x,2\pi)} e^{-iny} dy \right) \mu(dx) = in \int_{[0,2\pi)} \left(\int_{[0,y)} \mu(dx) \right) e^{-iny} dy \\ &= in \int_{[0,2\pi)} (f(y) - f(0)) e^{-iny} dy = in \int_{[0,2\pi)} f(y) e^{-iny} dy = in\hat{f}(n).\end{aligned}$$

Druga część lematu odpowiada przypadkowi $\mu(dx) = g(x)dx$. □

Wniosek 3.6. Jeśli $k \geqslant 0$ oraz $f \in C^k(\mathbb{T})$, tj. f jest k-krotnie różniczkowalna i jej pochodna rzędu k jest ciągła na $\mathbb{T}$ (w istocie wystarcza $f^{(k)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$), to

$$\lim_{n \to \pm\infty} \left(n^k |\hat{f}(n)| \right) = 0.$$

Dowód. Stosując k-krotnie lemat, otrzymujemy $\hat{f}(n) = (in)^{-k}\hat{g}(n)$, gdzie $g = f^{(k)}$. Skoro $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, to $\hat{g} \in c_0$ na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a. □

Ćwiczenie 3.7. Dlaczego powyższy wniosek nie stosuje się do $f(x) = x$ mimo, że funkcja ta jest dowolnie wiele razy różniczkowalna?

Ćwiczenie 3.8. Znając współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f(x) = x$, wyznacz rozwinięcie funkcji $f(x) = x^2$ (w obu przypadkach $x \in [-\pi, \pi)$).

Ćwiczenie 3.9. W podobny sposób znajdź rozwinięcie funkcji $f(x) = x^3 - \pi^2 x$, a następnie $g(x) = x^3$ (ponownie $x \in [-\pi, \pi)$).

Funkcja $e_n(x) = e^{inx}$ spełnia $e_n(x + \frac{\pi}{|n|}) = -e_n(x)$. Ta własność pozwala uzyskać dokładniejsze oszacowania, wyrażone przy pomocy modułu ciągłości funkcji.

Definicja 3.10. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ określamy jej *moduł ciągłości*

$$\omega_f(\varepsilon) = \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leqslant \varepsilon\};$$

w powyższym wzorze f oznacza 2π-okresowe rozszerzenie funkcji.

Zauważmy, że f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega_f(\varepsilon) \to 0$ gdy $\varepsilon \to 0^+$.

Lemat 3.11. Jeśli $f \in L^1(\mathbb{T})$ i $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, to

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \pi\omega_f(\tfrac{\pi}{|n|}).$$

Dowód. Z okresowości wynika, że

$$2\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx + \int_{-\pi+\frac{\pi}{n}}^{\pi+\frac{\pi}{n}} f(x)e^{-inx}dx.$$

Podstawiając $x = y$ w pierwszej całce oraz $x = y + \frac{\pi}{n}$ w drugiej całce, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2\hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy + \int_{-\pi}^{\pi} f(y+\tfrac{\pi}{n})e^{-iny}e^{-i\pi}dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(y) - f(y+\tfrac{\pi}{n})\right) e^{-iny}dy. \end{aligned}$$

Stąd

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(y) - f(y+\tfrac{\pi}{n})\right| dy \leqslant \pi\omega_f(\tfrac{\pi}{|n|}).$$

□

Wniosek 3.12. Jeśli funkcja $f \in C(\mathbb{T})$ spełnia warunek Höldera w wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$ i stałą $C > 0$, tj.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{C\pi^{1+\alpha}}{|n|^{\alpha}}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. □

Ćwiczenie 3.13. Niech $\alpha \in (-1,1)$ oraz $f(x) = |x|^{\alpha}$ dla $x \in [-\pi,\pi)$. Uzasadnij, że $|n|^{1+\alpha}\hat{f}(n)$ ma granicę przy $n \to \pm\infty$.

Ćwiczenie 3.14. Niech $a \in (0,\pi)$, $\vartheta \in (0,\frac{1}{2}]$ i niech I_n będzie ciągiem przybliżeń zbioru Cantora: $I_0 = (-a,a)$, $I_{k+1} = (-(1-\vartheta)a + \vartheta I_k) \cup ((1-\vartheta)a + \vartheta I_k)$ dla $k = 0,1,\ldots$ Niech ponadto $f_k(x) = (\frac{1}{2\vartheta})^k \mathbb{1}_{I_k}(x)$. Uzasadnij, że

$$f_{k+1}(x) = \frac{f_k(\frac{x+a}{\vartheta} - a) + f_k(\frac{x-a}{\vartheta} + a)}{2\vartheta}.$$

Wykorzystaj ten fakt do indukcyjnego dowodu równości

$$\int_{-a}^{a} f_k(x)e^{-i\xi x}dx = \frac{2\sin(\vartheta^k a\xi)}{\vartheta^k \xi}\prod_{j=0}^{k-1}\cos(\vartheta^j(1-\vartheta)a\xi)$$

dla $\xi \neq 0$ oraz $k = 0,1,\ldots$

Ćwiczenie 3.15. Niech μ oznacza *słabą granicę ciągu miar $f_k(x)dx$ z poprzedniego ćwiczenia, czyli *miarę Cantora* (dlaczego granica w istocie istnieje?). Wywnioskuj, że

$$\hat{\mu}(n) = 2a\prod_{j=0}^{\infty}\cos(\vartheta^j(1-\vartheta)na).$$

Rozważ na przykład $\vartheta = \frac{1}{3}$, $a = \frac{\pi}{2}$ oraz $n = 3^k$, aby uzasadnić, że istnieją miary ciągłe, które nie spełniają tezy lematu Riemanna–Lebesgue'a.

Uwaga: Badanie własności powyższego nieskończonego iloczynu jest subtelnym zagadnieniem. Więcej na ten temat mówi jedno z twierdzeń Wienera–Wintnera z artykułu On singular distributions *(J. Math. Phys. 17, 1939: 233–246).*

4. **Szeregi Fouriera — jądro Dirichleta**

Szereg Fouriera funkcji $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ jest do niej zbieżny w $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$. Często jednak bardziej interesujące są inne rodzaje zbieżności: punktowa, jednostajna, zbieżność prawie wszędzie czy zbieżność w $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Tego typu pytania zwykle są bardzo trudne. W poniższym rozdziale zajmiemy pierwszą istotną obserwacją: (symetryczne) sumy częściowe szeregu Fouriera funkcji f można przedstawić w postaci splotu f z tzw. jądrem Dirichleta.

Przypomnijmy, że *splot* $f * g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ funkcji $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ określony jest wzorem

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

dla prawie wszystkich x. W powyższym wzorze, tak jak w wielu innych poniżej, odejmowanie odbywa się w $\mathbb{T}$; równoważnie: utożsamiamy funkcje na $\mathbb{T}$ z ich 2π-okresowymi rozszerzeniami. Uzasadnijmy krótko poprawność powyższej definicji.

Na mocy twierdzenia Fubiniego (borelowska) funkcja $f(y)g(x-y)$ jest całkowalna jako funkcja dwóch zmiennych. Wobec tego całki względem każdej ze zmiennych — w szczególności względem y — są dobrze określone i skończone dla prawie wszystkich wartości drugiej zmiennej — w tym przypadku x. Łatwo sprawdzić, że $f * g(x)$ jest funkcją 2π-okresową. Ponadto

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f * g(x)|dx &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(x-y)|dy \right) dx \\ &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x-y)|dx \right) |f(y)|dy = \|g\|_1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|dy = \|f\|_1 \|g\|_1,\end{aligned}$$

czyli $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. Z równości tej w standardowy sposób wynika, że splot jest ciągłym przekształceniem z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T}) \times \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

Analogicznie definiujemy splot funkcji i miary oraz dwóch miar:

$$\mu * f(x) = \int_{[-\pi,\pi)} f(x-y)\mu(dy), \qquad \mu * \nu(E) = \int_{[-\pi,\pi)} \nu(E-y)\mu(dy)$$

dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$. Dowody poprawności tych definicji są podobne i je pomijamy. We wszystkich tych definicjach przedział całkowania $[-\pi, \pi)$ można zastąpić dowolnym innym jednostronnie domkniętym przedziałem o długości 2π.

Pomocne będą następujące dwie obserwacje. Jeśli $f \in C(\mathbb{T})$, a ciąg $x_n \in \mathbb{T}$ jest zbieżny do $x \in \mathbb{T}$, to $f(x_n - y)$ dąży do $f(x-y)$ jednostajnie względem $y \in \mathbb{T}$. Wobec tego dla każdej miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ splot $\mu * f$ jest funkcją ciągłą. Ponadto dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ istnieje ciąg funkcji $f_n \in C(\mathbb{T})$ zbieżny do f prawie wszędzie i spełniający warunek $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Dla wygody określmy $\operatorname{sign} z = \frac{z}{|z|}$ dla $z \neq 0$, $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Ćwiczenie 4.1. Udowodnij, że splot jest przemienny, łączny i dwuliniowy.

Ćwiczenie 4.2. (a) Zauważ, że $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty$ dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ i $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$.

(b) Podobnie zauważ, że $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$ dla $f, g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$.

(c) Udowodnij, że $\|\mu * f\|_1 \leqslant \|\mu\|\|f\|_1$ oraz $\|\mu * \nu\| \leqslant \|\mu\|\|\nu\|$ dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$.

(d) Wywnioskuj, że splot jest ciągłym przekształceniem z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T}) \times \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$, z $\mathscr{L}^2(\mathbb{T}) \times \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ itd.

Ćwiczenie 4.3. Niech $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Dla $f \in C(\mathbb{T})$ określmy $\Lambda f = f * g(0)$. Zauważ, że Λ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na $C(\mathbb{T})$. Przybliżając funkcję $\operatorname{sign} \overline{g(-x)}$ przy pomocy funkcji ciągłych, wyznacz normę Λ.

Lemat 4.4. Niech $p \in [1, \infty)$ oraz $T_y f(x) = f(x+y)$ dla $y \in \mathbb{T}$ oraz $f \in L^p(\mathbb{T})$. Wówczas odwzorowanie $y \mapsto T_y f$ jest ciągłe z $\mathbb{T}$ w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$.

Dowód. Jeśli $f \in C(\mathbb{T})$, $y, z \in \mathbb{R}$ oraz $|y - z| < \varepsilon$, to

$$\|T_y f - T_z f\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+y) - f(x+z)|^p dx \leqslant 2\pi(\omega_\varepsilon(f))^p,$$

zatem w istocie $T_y f$ zależy od y w sposób ciągły.

Niech teraz $f \in L^p(\mathbb{T})$ i niech $\varepsilon > 0$. Istnieje funkcja $g \in C(\mathbb{T})$ taka, że $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Ponadto udowodniliśmy już, że istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $y, z \in \mathbb{R}$ oraz $|y - z| < \delta$, to $\|T_y g - T_z g\|_p \leqslant \varepsilon$. Wobec tego

$$\|T_y f - T_z f\|_p \leqslant \|T_y f - T_y g\|_p + \|T_y g - T_z g\|_p + \|T_z g - T_z f\|_p \leqslant 3\varepsilon. \qquad \square$$

Wniosek 4.5. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$, to $f * g \in C(\mathbb{T})$. Wobec tego splot jest ciągłym przekształceniem z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T}) \times \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ w $C(\mathbb{T})$.

Dowód. Zauważmy, że $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} T_x f(-y) g(y) dy$, zatem $|f * g(x) - f * g(y)| \leqslant \|T_x f - T_y f\|_1 \|g\|_\infty$. Skoro $T_x f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ zależy w sposób ciągły od $x \in \mathbb{T}$ na mocy lematu 4.4, to $f * g$ faktycznie jest funkcją ciągłą na $\mathbb{T}$. Druga część wniosku wynika z pierwszej i ciągłości splotu z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T}) \times \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$. $\square$

Warto zwrócić uwagę na to, że jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, to $f * g$ nie musi być funkcją ciągłą.

Ćwiczenie 4.6. Niech $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ określmy $Tf(x) = f * g$. Wiemy już, że T jest ciągłym operatorem liniowym na $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Wyznacz normę tego operatora w przypadku. Możesz założyć, że $g \in C(\mathbb{T})$ i wrócić do tego zadania w pełnej ogólności po rozdziale 6.

Ćwiczenie 4.7. Niech $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Dla $f \in C(\mathbb{T})$ określmy $Tf(x) = f * g$. Wiemy już, że T jest ciągłym operatorem liniowym na $C(\mathbb{T})$. Wyznacz normę tego operatora. Możesz założyć, że $g \in C(\mathbb{T})$ i wrócić do tego zadania w pełnej ogólności po rozdziale 6.

Ćwiczenie 4.8. Niech $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$. Dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ określmy $Tf(x) = f * g$. Sprawdź, że T jest ciągłym operatorem liniowym z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ i wyznacz jego normę w przypadku, gdy $g \in C(\mathbb{T})$. Możesz wrócić do tego zadania w pełnej ogólności po rozdziale 6.

Splot z odpowiednimi funkcjami próbnymi umożliwia przybliżanie dowolnych funkcji całkowalnych funkcjami gładkimi. Zagadnienie to będzie rozwinięte w rozdziale 6.

Definicja 4.9. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ i $k \geqslant 0$, to

$$S_k f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-k}^{k} \hat{f}(n) e^{inx}$$

nazywamy *(symetrycznymi) sumami częściowymi* szeregu Fouriera f. Dla $k \geqslant 1$ definiujemy również *zmodyfikowane sumy częściowe* szeregu Fouriera f wzorem

$$\begin{aligned}\tilde{S}_k f(x) &= \tfrac{1}{2}(S_{k-1} f(x) + S_k f(x)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-k+1}^{k-1} \hat{f}(n) e^{inx} + \frac{1}{4\pi} (\hat{f}(-k) e^{-ikx} + \hat{f}(k) e^{ikx}).\end{aligned}$$

Dla spójności określamy $\tilde{S}_0 f(x) = 0$. Definicje te rozszerzamy w naturalny sposób do miar $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$.

Warto podkreślić, że S_k oraz $\tilde{S}_k$ są operatorami liniowymi na $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, o wartościach w zbiorze wielomianów trygonometrycznych. W następnym rozdziale zajmiemy się kryteriami zbieżności $S_k f(x)$. Poniższe ćwiczenie stwierdza, że wystarczy w istocie badać zbieżność ciągu $\tilde{S}_k f(x)$, który ma nieco lepsze własności. Z tego powodu w sformułowaniach wyników będziemy używać zwykłych sum częściowych $S_k f(x)$, natomiast w dowodach będziemy korzystali z wygodniejszych sum zmodyfikowanych $\tilde{S}_k f(x)$.

Ćwiczenie 4.10. Udowodnij, że $S_k f(x) \to a$ gdy $k \to \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{S}_k f(x) \to a$ gdy $k \to \infty$.

Ćwiczenie 4.11. Wykaż, że dla $e_n(x) = e^{inx}$ ($n \in \mathbb{Z}$) zachodzi $S_k e_n = e_n$ gdy $k \geqslant |n|$ oraz $S_k e_n = 0$ gdy $0 \leqslant k < |n|$. Wyznacz analogicznie $S_k f$ dla $f(x) = \cos(nx)$ oraz $f(x) = \sin(nx)$.

Ćwiczenie 4.12. Uzasadnij, że jeśli $g = S_k f$, to $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ gdy $|n| \leqslant k$, $\hat{g}(n) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Ćwiczenie 4.13. Zauważ, że S_k (zawężone do $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$) jest rzutem ortogonalnym na przestrzeń wielomianów trygonometrycznych stopnia co najwyżej k (przy naturalnej definicji *stopnia* wielomianu trygonometrycznego — jakiej?).

Lemat 4.14. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz $k \geqslant 0$, to

$$S_k f(x) = \tfrac{1}{2\pi} f * D_k(x), \qquad \tilde{S}_k f(x) = \tfrac{1}{2\pi} f * \tilde{D}_k(x),$$

gdzie D_k jest *jądrem Dirichleta*, zaś $\tilde{D}_k$ — *zmodyfikowanym jądrem Dirichleta*,

$$D_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} e^{inx} = \frac{\sin((k + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$\tilde{D}_k(x) = \tfrac{1}{2}(D_{k-1}(x) + D_k(x)) = \frac{\sin(kx)}{\tan \frac{x}{2}}$$

(prawe strony rozszerzają się do ciągłych funkcji $x \in \mathbb{T}$).

Dowód. Ze wzoru na sumę skończonego szeregu geometrycznego, dla $x \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}2\pi S_k f(x) &= \sum_{n=-k}^{k} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{in(x-y)} \right) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \, \frac{e^{i(k+1)(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{e^{i(x-y)} - 1} \, dy\end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, \frac{e^{i(k+1/2)(x-y)} - e^{-i(k+1/2)(x-y)}}{e^{i(x-y)/2} - e^{-i(x-y)/2}}\, dy.$$

Wzór na $D_k(x)$ wynika z tożsamości $e^{is} - e^{-is} = 2i \sin s$. Ponadto

$$\sin((k - \tfrac{1}{2})s) + \sin((k + \tfrac{1}{2})s) = 2 \sin(ks) \cos \tfrac{s}{2},$$

skąd łatwo wynika wzór na $\tilde{D}_k(x)$. □

Ćwiczenie 4.15. Sporządź wykresy kilku pierwszych funkcji D_k i $\tilde{D}_k$.

Ćwiczenie 4.16. Udowodnij, że dla $k \geqslant 1$ zachodzi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{D}_k(x) dx = 1.$$

Lemat 4.17. Dla $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ i $k \geqslant 1$ zachodzi $|\tilde{D}_k(x)| \leqslant \min(2k, \frac{2}{|x|})$. Ponadto $\tilde{D}_k(0) = 2k$.

Dowód. Dla $x \in (-\pi, \pi)$ zachodzą nierówności $|\sin(kx)| \leqslant \min(k|x|, 1)$ oraz $|\tan \frac{x}{2}| \geqslant \frac{|x|}{2}$. Stąd $|\tilde{D}_k(x)| \leqslant \min(2k, \frac{2}{|x|})$. Wartość $\tilde{D}_k(0) = 2k$ wyznaczamy jako granicę $\sin(kx)/\tan \frac{x}{2}$ przy $x \to 0$. □

Ćwiczenie 4.18. Udowodnij, że $|D_k(x)| \leqslant \min(2k+1, \frac{\pi}{|x|})$ dla $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ i $k \geqslant 0$.

Ćwiczenie 4.19. Wyznacz normy operatorów S_k i $\tilde{S}_k$, działających z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$.

Ćwiczenie 4.20. Udowodnij, że istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$, takie że

$$C_1 \ln(1+n) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\tan \frac{x}{2}} \right| dx \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right| dx \leqslant C_2 \ln(1+n)$$

dla wszystkich $n \geqslant 0$. Wykorzystaj to do oszacowania norm operatorów S_k oraz $\tilde{S}_k$, działających na $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz na $C(\mathbb{T})$, a także funkcjonałów $\Lambda_k f = S_k f(0)$ oraz $\tilde{\Lambda}_k f = \tilde{S}_k f(0)$ na przestrzeni $C(\mathbb{T})$.

Ćwiczenie 4.21. Z poprzedniego ćwiczenia i zasady Banacha–Steinhausa wywnioskuj, że istnieje funkcja $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, dla której ciąg $S_k f$ nie jest zbieżny w $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. W podobny sposób wykaż, że istnieje funkcja $f \in C(\mathbb{T})$, dla której ciąg $S_k f(0)$ nie jest zbieżny.

Ćwiczenie 4.22. Udowodnij, że ciąg

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right| dx - \frac{4}{\pi^2} \ln(1+n)$$

jest zbieżny. (Nie jest to bardzo trudne, ale raczej nieprzydatne).

5. **Szeregi Fouriera — zbieżność punktowa i jednostajna**

Jądro Dirichleta jest tak kłopotliwe, ponieważ zmienia znak. Wyklucza to zastosowanie standardowych metod przy analizie splotu z *nieujemnymi* funkcjami o całce 1, koncentrującymi się wokół zera (te metody wykorzystamy przy badaniu zbieżności Cesàro szeregów Fouriera w następnym rozdziale). Potrzebny jest inny pomysł. Okazuje się, że $\tilde{S}_k f(x)$ można czasem wyrazić przy pomocy współczynników szeregu Fouriera innej funkcji. Pozwala to wykorzystać znane nam już oszacowania współczynników szeregu Fouriera do oszacowań tempa zbieżności szeregu Fouriera.

Zaczniemy jednak od prostej obserwacji.

Fakt 5.1. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, to szereg Fouriera f jest zbieżny bezwzględnie (w dowolnym punkcie) wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{f} \in \ell^1$. W tej sytuacji jest on również zbieżny jednostajnie. □

Funkcje $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ dla których $\hat{f} \in \ell^1$ tworzą *algebrę Wienera*. Jest to podprzestrzeń liniowa $C(\mathbb{T})$, zamkniętą ze względu na mnożenie funkcji. Algebra Wienera posiada ciekawe własności. Na przykład twierdzenie $1/f$ Wienera mówi, że jeśli funkcja f z algebry Wienera nie przyjmuje wartości 0, to funkcja $1/f$ też należy do algebry Wienera.

Jeśli założymy, że $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ oraz $\hat{f} \in \ell^1$, to z jednoznaczności granicy w $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ wynika, że granicą jednostajną szeregu Fouriera f jest funkcja f i przez to $f \in C(\mathbb{T})$. Co zaskakujące, dowód tego faktu dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ jest trudniejszy — zajmiemy się tym w następnym rozdziale we wniosku 6.21.

Twierdzenie Bernsteina stwierdza, że jeśli funkcja f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, to $\hat{f} \in \ell^1$, więc szereg Fouriera f jest zbieżny jednostajnie; wynikanie to nie zachodzi jednak dla $\alpha = \frac{1}{2}$. Analogiczne twierdzenie Zygmunda z kolei wymaga, by f miała skończone wahanie całkowite i spełniała warunek Höldera z dowolnym wykładnikiem $\alpha \in (0, 1]$. Zadowolimy się dużo prostszym warunkiem, podanym w następującym ćwiczeniu. Z kolei dużo ogólniejsze kryterium zbieżności jednostajnej (ale nie własności $\hat{f} \in \ell^1$) jest zawarte w twierdzeniu 5.21.

Ćwiczenie 5.2. Udowodnij, że jeśli $f \in C^1(\mathbb{T})$ oraz f' spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1]$ (co jest często zapisywane w postaci $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$), to szereg Fouriera f jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny do f.

Ćwiczenie 5.3. Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są sumowalne, to klasyczny szereg Fouriera

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

jest bezwzględnie jednostajnie zbieżny. Udowodnij wynikanie przeciwne. Udowodnij ponadto, że wystarcza w istocie punktowa (niekoniecznie jednostajna) bezwzględna zbieżność.

W dalszej części tego rozdziału dowodzimy dokładniejszych kryteriów zbieżności. Konstrukcja niezbieżnych szeregów Fouriera jest raczej skomplikowana (i dużo mniej istotna), poświęcony jej jest rozdział 7.

Lemat 5.4. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $k \geqslant 1$, $x \in \mathbb{T}$, $a \in \mathbb{C}$ oraz

$$h(y) = \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2a}{2\tan\frac{y}{2}},$$

to

$$\tilde{S}_k f(x) = a + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi h(s)\sin(ks)ds.$$

Jeśli $h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, to $\tilde{S}_k f(x) = a + \frac{1}{4\pi i}(\hat{h}(k) - \hat{h}(-k))$. W tym przypadku na mocy lematu Riemanna–Lebesgue'a $\tilde{S}_k f(x)$ i $S_k f(x)$ dążą do a gdy $k \to \infty$.

Dowód. Ponieważ $\tilde{S}_k \mathbb{1}(x) = 1$ dla $k \geqslant 1$ ($\mathbb{1}$ oznacza funkcję stale równą 1), więc

$$\begin{aligned}\tilde{S}_k f(x) &= a + (\tilde{S}_k(f-a)(x)) = a + \tfrac{1}{2\pi}(f-a) * \tilde{D}_k(x) \\ &= a + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(ky)}{\tan\frac{y}{2}}(f(x-y)-a)dy.\end{aligned}$$

Podstawiając nową zmienną za $-y$ w całce po prawej stronie, otrzymujemy analogiczną całkę z wyrażeniem $f(x+y)$ zamiast $f(x-y)$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\tilde{S}_k f(x) &= a + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(ky)}{\tan\frac{y}{2}}(f(x+y)+f(x-y)-2a)dy \\ &= a + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(y)\sin(ky)dy.\end{aligned}$$

Ponieważ h jest funkcją nieparzystą, ostatnia całka ma wartość $\frac{i}{2}\hat{h}(-k) - \frac{i}{2}\hat{h}(k)$. □

Z powyższego lematu natychmiast wynika wiele ważnych twierdzeń.

Twierdzenie 5.5 (*Kryterium Diniego–Dirichleta*). Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $x \in \mathbb{T}$, $a \in \mathbb{C}$ i

$$\int_0^\pi \frac{1}{s}\left|\frac{f(x+s)+f(x-s)}{2} - a\right| ds < \infty, \tag{5.1}$$

to $S_k f(x) \to a$ gdy $k \to \infty$. □

Warunek (5.1) jest spełniony, jeśli $|f(x+s) - f(x)|/s$ jest funkcją całkowalną względem $s \in (-\pi, \pi)$. W szczególności wystarcza zatem hölderowska ciągłość f w x.

Twierdzenie 5.6 (*zasada lokalizacji*). Jeśli $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $x \in \mathbb{T}$ oraz $f_1 = f_2$ prawie wszędzie w pewnym otoczeniu x, to $S_k f_1(x) \to a$ gdy $k \to \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_k f_2(x) \to a$ gdy $k \to \infty$. □

Twierdzenie 5.7 (*test Diniego*). Jeśli $f \in C(\mathbb{T})$ spełnia warunek

$$\int_0^\pi \frac{\omega_f(s)}{s} ds < \infty,$$

to $S_k f$ dąży punktowo do f gdy $k \to \infty$. □

Twierdzenie 5.8. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $x \in T$, $a \in \mathbb{C}$ oraz spełniony jest jeden z warunków:

(a) f jest różniczkowalna w x oraz $a = f(x)$;

(b) f jest ciągła w x i ma pochodne jednostronne w x oraz $a = f(x)$;

(c) f ma granice jednostronne $f_+(x)$ i $f_-(x)$ w x, istnieją pochodne jednostronne

$$\lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f_+(x)}{y - x}, \qquad \lim_{y \to x^-} \frac{f(y) - f_-(x)}{y - x}$$

oraz $a = \frac{1}{2}(f_+(x) + f_-(x))$;

(d) f ma granice jednostronne $f_+(x)$ i $f_-(x)$ w x, dla pewnego $\varepsilon \in (0, 1]$ zachodzi

$$\limsup_{y \to x^+} \frac{|f(y) - f_+(x)|}{|y - x|^\varepsilon} < \infty, \qquad \limsup_{y \to x^-} \frac{|f(y) - f_-(x)|}{|y - x|^\varepsilon} < \infty$$

oraz $a = \frac{1}{2}(f_+(x) + f_-(x))$,

to $S_k f(x) \to a$ gdy $k \to \infty$. W szczególności jeśli poza skończonym zbiorem punktów $\mathbb{T}$ funkcja f jest ciągła i różniczkowalna oraz f' jest ograniczona, to szereg Fouriera jest zbieżny punktowo do f w każdym punkcie ciągłości f oraz do średniej arytmetycznej granic jednostronnych f w punktach nieciągłości.

Dowód. Każdy następny warunek jest słabszy od poprzedniego, wystarczy więc zbadać ostatni. W kryterium Diniego–Dirichleta mamy

$$\frac{1}{s}\left|\frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} - a\right| \leqslant \left|\frac{f(x+s) - f_+(x)}{s}\right| + \left|\frac{f(x-s) - f_-(x)}{s}\right|$$

i prawa strona jest całkowalna. □

Ćwiczenie 5.9. Badając rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(x) = |x|$, wyznacz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Ćwiczenie 5.10. Badając rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(x) = x$, wyznacz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} + \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}\right).$$

Ćwiczenie 5.11. Znajdź informacje na temat tzw. *efektu Gibbsa.*

Wyniki uzyskane wyżej można nieco uogólnić. Potrzebny do tego jest następujący techniczny lemat.

Lemat 5.12. Jeśli g jest niemalejąca na $(0, \delta)$, $0 \leqslant g(s) \leqslant \varepsilon$ dla $s \in (0, \delta)$ oraz $k \geqslant 0$, to

$$\left|\int_0^\delta g(s) \frac{\sin(ks)}{s}\, ds\right| \leqslant \varepsilon\pi.$$

Dowód. Niech $g_-(s)$ oznacza lewostronną granicę g w s, niech μ będzie miarą na $[0, \delta)$, której dystrybuantą jest g_- (tj. $\mu([0, s)) = g_-(s)$ dla $s \in (0, \delta)$), i niech

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{1 - \cos s}{s} + \int_0^s \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt$$

dla $s \geqslant 0$. Funkcja φ jest ograniczona, osiąga maksimum globalne równe $\varphi(\pi) \in (0, \pi)$ i z tego powodu $0 \leqslant \varphi(s) < \pi$. Na mocy twierdzenia Fubiniego

$$\int_0^\delta g(s) \, \frac{\sin(ks)}{s} \, ds = \int_0^\delta \left(\int_{[0,s)} \mu(dt) \right) k\varphi'(ks) ds = \int_{[0,\delta)} (\varphi(k\delta) - \varphi(kt))\mu(dt).$$

Wobec tego

$$\left| \int_0^\delta g(s) \, \frac{\sin(ks)}{s} \, ds \right| \leqslant \pi\mu([0, \delta)) = \pi g_-(\delta) \leqslant \varepsilon\pi. \qquad \square$$

Twierdzenie 5.13 (*twierdzenie Jordana*). Jeśli $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ jest dystrybuantą pewnej miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, lub ogólniej — funkcją o skończonym wahaniu całkowitym na $[-\pi, \pi]$, to $S_k f$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f^*(x) = \frac{1}{2}(f_+(x) + f_-(x))$, gdzie $f_+(x)$, $f_-(x)$ oznaczają granice jednostronne f w x.

Dowód. Na mocy lematu 5.4 i równości $f_+(y) = f_-(y) = f(y)$ dla wszystkich y poza zbiorem co najwyżej przeliczalnym,

$$\tilde{S}_k f(x) - f^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(f_-(x+s) - f_+(x)) + (f_+(x-s) - f_-(x))}{2 \tan \frac{s}{2}} \, \sin(ks) ds$$

Funkcja $g(s) = (f_-(x + s) - f_+(x)) + (f_+(x - s) - f_-(x))$ ($s \in [0, \pi]$) ma skończone wahanie całkowite i jest lewostronnie ciągła. Wobec tego g jest dystrybuantą pewnej miary zespolonej ν na przedziale $[0, \pi)$, a ponieważ $g_+(0) = 0$, mamy $\nu(\{0\}) = 0$. Gdy wyjściowa funkcja f jest dystrybuantą μ, to $\nu([0, s)) = g(s) = \mu((x, x + s)) + \mu((x - s, x))$.

Na mocy twierdzenia Hahna miarę ν można przedstawić w postaci $\nu = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4$ dla pewnych skończonych miar nieujemnych $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ na $[0, \pi)$, przy czym $\nu_j(\{0\}) = 0$ dla $j = 1, 2, 3, 4$. Niech $g_j(s) = \nu_j([0, s))$. Otrzymujemy zatem

$$|\tilde{S}_k f(x) - f^*(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{4} \left| \int_0^\pi \frac{g_j(s) \sin(ks)}{2 \tan \frac{s}{2}} \, ds \right|.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta \in (0, \pi)$ tak, aby $g_j(\delta) < \varepsilon$ dla $j = 1, 2, 3, 4$. Wówczas

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{g_j(s) \sin(ks)}{2 \tan \frac{s}{2}} \, ds \right| \leqslant & \left| \int_0^\delta g_j(s) \, \frac{\sin(ks)}{s} \, ds \right| \\ & + \left| \int_0^\pi g_j(s) \left(\frac{1}{2 \tan \frac{s}{2}} - \frac{\mathbb{1}_{(0,\delta)}(s)}{s} \right) \sin(ks) ds \right|. \end{aligned}$$

Na mocy lematu 5.12, pierwszy składnik nie przekracza $\varepsilon\pi$. Pokażemy za chwilę, że drugi dąży do zera gdy $k \to \infty$. Wówczas otrzymamy

$$\limsup_{k \to \infty} |\tilde{S}_k f(x) - f^*(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{4} (\varepsilon\pi + 0) = 4\varepsilon,$$

a ponieważ $\varepsilon > 0$ może być dowolnie mały, twierdzenie zostanie udowodnione.

Zauważmy, że $(2 \tan \frac{s}{2})^{-1} - s^{-1} \mathbb{1}_{(0,\delta)}(s)$ jest funkcją ograniczoną na $(0, \pi)$, zatem

$$h_j(x) = g_j(|x|) \left(\frac{1}{2 \tan \frac{x}{2}} - \frac{\mathbb{1}_{(0,\delta)}(|x|)}{x} \right)$$

jest funkcją ograniczoną na $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. Ponadto

$$\int_0^\pi g_j(s) \left(\frac{1}{2\tan\frac{s}{2}} - \frac{\mathbb{1}_{(0,\delta)}(s)}{s} \right) \sin(ks) ds = \tfrac{1}{2}(i\hat{h}_j(-k) - i\hat{h}_j(k)).$$

Zbieżność wyrażenia po lewej stronie do zera wynika z lematu Riemanna–Lebesgue'a. □

Ćwiczenie 5.14. Udowodnij, że szeregi Fouriera funkcji całkowalnych można całkować wyraz po wyrazie nawet wtedy, gdy nie są zbieżne.

Ściślej: udowodnij, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\hat{f}(0)(b-a)}{2\pi} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\{-k,\ldots,k\}\setminus\{0\}} \hat{f}(n) \frac{e^{inb} - e^{ina}}{in},$$

przy czym szereg po prawej stronie jest zbieżny nawet wtedy, gdy szereg Fouriera funkcji f nie jest zbieżny.

Wywnioskuj, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ odpowiada klasycznemu szeregowi Fouriera

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

to nawet jeśli powyższy szereg nie jest zbieżny, zachodzi

$$\int_a^b f(x)dx = a_0(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\sin(nb) - \sin(na)}{n} - b_n \frac{\cos(nb) - \cos(na)}{n} \right)$$

i szereg po prawej stronie jest zbieżny.

Ćwiczenie 5.15. Zapisz analogiczny wzór na $\mu([a,b])$ dla $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ spełniających warunek $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$. Co wyraża ten wzór, gdy μ ma atom w a lub b?

Ćwiczenie 5.16. Zauważ, że dla każdej miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ o własności $\mu(\mathbb{T}) = 0$ istnieje dokładnie jedna dystrybuanta f miary μ, która spełnia warunek $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, tj. $\hat{f}(0) = 0$. Ponadto udowodniliśmy już, że $\hat{f}(n) = \hat{\mu}(n)/(in)$ dla $n \neq 0$. Wprowadźmy oznaczenie $f = I(\mu)$; gdy $\mu(dx) = g(x)dx$, piszemy $f = I(g)$.

(a) Niech $\mu(dx) = \delta_0(dx) - \frac{1}{2\pi}dx$, tj. $\mu(E) = \mathbb{1}_E(0) - \frac{1}{2\pi}|E|$. Udowodnij, że dla $k \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^k \pi I^{2k}(\mu)(0), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \pi I^{2k}(\mu)(\pi),$$

gdzie I^{2k} oznacza $2k$-krotne złożenie operacji I, tj. $I^{2k}(\mu) = I(I(\ldots I(\mu)\ldots))$.

(b) Wyznacz wartości powyższych sum dla $k = 1$ i $k = 2$.

(c) Przy pomocy komputera wyznacz wartości powyższych sum dla kilku większych wartości k.

(d) Podaj analogiczny sposób wyznaczania sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2k}}.$$

Ostatnie twierdzenie tego rozdziału dotyczy zbieżności jednostajnej. Wymaga ono oszacowań współczynników szeregu Fouriera funkcji h z lematu 5.4 — nie wystarcza zbieżność do zera, którą wykorzystywaliśmy powyżej.

Lemat 5.17. Jeśli $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ i $k \geqslant 2$, to

$$\|\tilde{S}_k f - f\|_\infty \leqslant 4\omega_f(\tfrac{2\pi}{k}) + \frac{\omega_f(\frac{\pi}{k})\ln\frac{k}{2}}{\pi} + \frac{\pi^2}{2k}\int_{\pi/k}^{\pi}\frac{\omega_f(s)}{s^2}ds + \frac{\|f\|_\infty}{k}.$$

Wobec tego ciągi $\|\tilde{S}_k f - f\|_\infty/\ln(2+k)$ oraz $\|S_k f - f\|_\infty/\ln(2+k)$ są ograniczone.

Dowód. Niech $x \in \mathbb{T}$ i niech h będzie funkcją z lematu 5.4 dla $a = f(x)$. Na mocy tego lematu,

$$\pi(\tilde{S}_k f(x) - f(x)) = \int_0^\pi h(s)\sin(ks)ds = \int_0^{2\pi/k} h(s)\sin(ks)ds - \int_{\pi/k}^{\pi-\pi/k} h(s+\tfrac{\pi}{k})\sin(ks)ds.$$

Postępując tak, jak w dowodzie lematu 3.11, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
2\pi(\tilde{S}_k f(x) - f(x)) &= \left(\int_0^{\pi/k} + \int_{\pi/k}^{\pi-\pi/k} + \int_{\pi-\pi/k}^{\pi}\right) h(s)\sin(ks)ds \\
&\quad + \int_0^{2\pi/k} h(s)\sin(ks)ds - \int_{\pi/k}^{\pi-\pi/k} h(s+\tfrac{\pi}{k})\sin(ks)ds \\
&= \left(\int_0^{\pi/k} + \int_0^{2\pi/k} + \int_{\pi-\pi/k}^{\pi}\right) h(s)\sin(ks)ds \\
&\quad + \int_{\pi/k}^{\pi-\pi/k} (h(s) - h(s+\tfrac{\pi}{k}))\sin(ks)ds.
\end{aligned}$$

Całki szacujemy osobno. W pierwszej i drugiej mamy $|h(s)| \leqslant \omega_f(s)/\tan\frac{s}{2}$, zatem

$$\begin{aligned}
\left|\left(\int_0^{\pi/k} + \int_0^{2\pi/k}\right) h(s)\sin(ks)ds\right| &\leqslant \left(\int_0^{\pi/k} + \int_0^{2\pi/k}\right)\frac{ks\,\omega_f(s)}{\tan\frac{s}{2}}\,ds \\
&\leqslant 4k\int_0^{2\pi/k}\omega_f(s)ds \leqslant 8\pi\omega_f(\tfrac{2\pi}{k})
\end{aligned}$$

(wykorzystaliśmy tu nierówność $\tan\frac{s}{2} \geqslant \frac{s}{2}$ dla $s \in (0,\pi)$). Trzecia całka spełnia

$$\left|\int_{\pi-\pi/k}^{\pi} h(s)\sin(ks)ds\right| \leqslant \int_{\pi-\pi/k}^{\pi}\frac{2\|f\|_\infty}{\tan\frac{s}{2}}\,ds \leqslant \frac{2\pi\|f\|_\infty}{k\tan(\frac{1}{2}(\pi-\frac{\pi}{k}))} \leqslant \frac{2\pi\|f\|_\infty}{k}.$$

Przy szacowaniu czwartej korzystamy z równości

$$\begin{aligned}
h(s) - h(s+\tfrac{\pi}{k}) &= \frac{(f(x+s) - f(x+s+\frac{\pi}{k})) + (f(x-s) - f(x-s-\frac{\pi}{k}))}{2\tan(\frac{1}{2}(s+\frac{\pi}{k}))} \\
&\quad + \frac{f(x+s) + f(x-s) - 2f(x)}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{s}{2}} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{2}(s+\frac{\pi}{k}))}\right)
\end{aligned}$$

oraz nierówności

$$\left|\frac{1}{\tan\frac{s}{2}} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{2}(s+\frac{\pi}{k}))}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\pi}{2k}}{\sin\frac{s}{2}\sin(\frac{1}{2}(s+\frac{\pi}{k}))}\right| \leqslant \frac{\pi}{2k}\,\frac{\pi}{s}\,\frac{\pi}{s+\frac{\pi}{k}} \leqslant \frac{\pi^3}{2ks^2}$$

(dwukrotnie użyliśmy oszacowania $\sin\frac{s}{2} \geqslant \frac{1}{\pi}s$ dla $s \in (0,\pi)$). Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left|\int_{\pi/k}^{\pi-\pi/k} (h(s) - h(s+\tfrac{\pi}{k}))\sin(ks)ds\right| &\leqslant \int_{\pi/k}^{\pi-\pi/k} \left(\frac{\omega_f(\frac{\pi}{k})}{\tan(\frac{1}{2}(s+\frac{\pi}{k}))} + \frac{\pi^3 \omega_f(s)}{ks^2} \right) ds \\ &\leqslant 2\omega_f(\tfrac{\pi}{k}) \ln\tfrac{k}{2} + \frac{\pi^3}{k}\int_{\pi/k}^{\pi} \frac{\omega_f(s)}{s^2} ds. \qquad \square\end{aligned}$$

Potrzebne będzie oszacowanie całki po prawej stronie nierówności z lematu.

Ćwiczenie 5.18. Przypuśćmy, że f, g są funkcjami borelowskimi na przedziale (a,b), g jest nieujemna,

$$F(s) = \int_s^b f(t)dt, \qquad G(s) = \int_s^b g(t)dt$$

są skończone dla $s \in (a,b)$, $G(s) \to \infty$ gdy $s \to a^+$ oraz $|f(s)|/g(s) \to 0$ gdy $s \to a^+$. Udowodnij, że $|F(s)|/G(s) \to 0$ gdy $s \to a^+$.

Ćwiczenie 5.19. Wywnioskuj, że jeśli h jest rosnąca na $(0,\pi]$ oraz $h(s) \to 0$ gdy $s \to 0^+$, to

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\varepsilon \int_\varepsilon^\pi \frac{h(s)}{s^2} ds \right) = 0.$$

Z lematu i powyższego ćwiczenia natychmiast wynikają następujące dwa rezultaty.

Wniosek 5.20. Jeśli $f \in C(\mathbb{T})$, to

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|S_k f - f\|_\infty}{\ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\|\tilde{S}_k f - f\|_\infty}{\ln k} = 0. \qquad \square$$

Twierdzenie 5.21 (*test Diniego–Lipschitza*). Jeśli $f \in C(\mathbb{T})$ oraz

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\omega_f(\varepsilon) \ln\tfrac{1}{\varepsilon}\right) = 0,$$

to $S_k f$ dąży jednostajnie do f gdy $k \to \infty$. $\square$

Wniosek 5.22. Jeśli $f \in C(\mathbb{T})$ spełnia warunek Höldera z pewnym wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$, to $S_k f$ dąży jednostajnie do f gdy $k \to \infty$. $\square$

Możliwych jest wiele wariantów i uogólnień powyższych kryteriów zbieżności szeregów Fouriera, np. zbieżność w twierdzeniu 5.8 jest jednostajna na każdym przedziale domkniętym, na którym f' istnieje i jest ciągła. Przedstawione powyżej twierdzenia są jednak w pewnym sensie optymalne, o czym świadczyć będzie przykład w rozdziale 7.

Rozdział ten zakończmy uwagami o zbieżności prawie wszędzie i w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$. Na pewno warto wspomnieć o twierdzeniu Carlesona z 1966 roku, choć jego dowód jest zbyt skomplikowany, by go tu zamieścić. W oryginalnym sformułowaniu występuje $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ z informacją o tym, że rozszerzenie do wszystkich $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ dla $p \in (1,\infty)$ jest łatwe. Formalnie dowód dla wszystkich $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ ($p \in (1,\infty)$) został spisany przez Hunta dwa lata później.

Twierdzenie 5.23 (*twierdzenie Carlesona*; bez dowodu). Jeśli $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ dla pewnego $p \in (1, \infty)$, to $S_k f$ dąży do f prawie wszędzie. □

Wciąż skomplikowane, lecz dużo łatwiejsze jest twierdzenie o zbieżności w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$.

Twierdzenie 5.24 (bez dowodu). Jeśli $p \in (1, \infty)$ i $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, to $S_k f$ dąży do f w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$.

Przypadki $p = 1$ oraz $p = \infty$ są zupełnie inne. Widzieliśmy już, że nie ma zbieżności w $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ (dowód był niekonstruktywny, ale można ominąć odwołanie do zasady Banacha–Steinhausa i skonstruować odpowiedni przykład). Z kolei dla dowolnej nieciągłej funkcji $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ ciąg $S_k f$ jest zbieżny do f w $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$, ale z pewnością nie w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$, bowiem granica jednostajna funkcji ciągłych $S_k f$ musiałaby być ciągła. Ponadto w rozdziale 7 podany będzie przykład funkcji całkowalnej, której szereg Fouriera jest prawie wszędzie rozbieżny.

6. **Szeregi Fouriera — średnie Cesàro**

Spośród wielu technik „uzbieżniania niezbieżnych ciągów” średnie Cesàro wyróżniają się prostotą i doskonale stosują się do badań szeregów Fouriera.

Ćwiczenie 6.1. Udowodnij, że jeśli ciąg a_n jest zbieżny do a, to ciąg *średnich Cesàro*

$$b_k = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} a_n$$

również jest zbieżny do a. Uzasadnij, że twierdzenie przeciwne nie jest prawdziwe.

Ćwiczenie 6.2. Dowiedz się o sumowaniu metodą Abela.

Definicja 6.3. Dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ funkcje

$$\sigma_k f(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k} S_l f(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\sum_{n=-l}^{l}\hat{f}(n)e^{inx}$$

nazywamy *sumami Fejéra* funkcji f. Analogicznie definiujemy sumy Fejéra miary μ.

Lemat 6.4. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ i $k \geqslant 0$, to

$$\sigma_k f(x) = \tfrac{1}{2\pi} f * F_k(x),$$

gdzie F_k jest *jądrem Fejéra*,

$$F_k(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{k}\frac{k+1-n}{k+1}\cos(nx) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(k+1)x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}\right)^2.$$

Dowód. Z definicji σ_k oraz własności S_k, $\sigma_k f = \frac{1}{2\pi} f * F_k(x)$ dla

$$F_k(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k} D_l(x).$$

Zdefinicji jądra Dirichleta otrzymujemy

$$F_k(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\sum_{n=-l}^{l} e^{inx} = 1 + \frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{k} 2(k-n+1)\cos(nx).$$

Z kolei ze wzoru na jądro Dirichleta,

$$\begin{aligned}
F_k(x) &= \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\frac{\sin((l+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\frac{e^{i(l+1/2)x} - e^{-i(l+1/2)x}}{2i\sin(\frac{1}{2}x)} \\
&= \frac{1}{k+1}\,\frac{1}{2i\sin(\frac{1}{2}x)}\left(\frac{e^{ix/2}(e^{i(k+1)x}-1)}{e^{ix}-1} - \frac{e^{-ix/2}(e^{-i(k+1)x}-1)}{e^{-ix}-1}\right) \\
&= \frac{1}{k+1}\,\frac{1}{2i\sin(\frac{1}{2}x)}\,\frac{e^{i(k+1)x}+e^{-i(k+1)x}-2}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} = \frac{1}{k+1}\,\frac{2-2\cos((k+1)x)}{4(\sin(\frac{1}{2}x))^2}.
\end{aligned}$$

Teza wynika z tożsamości $1-\cos((k+1)x) = 2(\sin(\frac{1}{2}(k+1)x))^2$. □

Ćwiczenie 6.5. Udowodnij, że gdy $k \geqslant 0$, to

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_k(x)dx = 1.$$

Ćwiczenie 6.6. Udowodnij, że $0 \leqslant F_k(x) \leqslant \min(k+1, \frac{1}{k+1}\pi^2/x^2)$ dla każdego $x \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$.

Ćwiczenie 6.7. Udowodnij, że $F_k(x) \to 0$ gdy $k \to \infty$ dla każdego $x \in \mathbb{T}\setminus\{0\}$.

Ćwiczenie 6.8. Udowodnij, że gdy $0 \leqslant k \leqslant l$, to

$$S_k F_l(x) = \frac{k+1}{l+1} F_k(x) + \frac{l-k}{l+1} D_k(x).$$

Z powyższych własności wynika, że ciąg $\frac{1}{2\pi}F_k$ spełnia poniższą definicję jedności aproksymatywnej (słowo „jedność” dotyczy tu operacji splotu). Spotyka się kilka wariantów tej definicji, na potrzeby późniejszych zastosowań wykorzystamy wersję stosunkowo ogólną.

Definicja 6.9. Ciąg rzeczywistych funkcji $\varphi_k \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ jest *jednością aproksymatywną*, jeśli istnieje zbieżny do zera ciąg ε_k o następujących własnościach:

(A) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x)dx \geqslant 1 - \varepsilon_k$ oraz $\|\varphi_k\|_1 \leqslant 1 + \varepsilon_k$;

(B) $\displaystyle\left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon_k} + \int_{\varepsilon_k}^{\pi}\right)|\varphi_k(x)|dx \leqslant \varepsilon_k$.

Jedność aproksymatywną nazywamy *regularną*, jeśli dodatkowo

(C) $|\varphi_k(x)| \leqslant \varepsilon_k$ dla $x \in [-\pi, -\varepsilon_k] \cup [\varepsilon_k, \pi]$.

Zauważmy, że $1 - \varepsilon_k \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(x)dx \leqslant 1 + \varepsilon_k$. Ponadto jeśli φ_k jest (regularną) jednością aproksymatywną, to $|\varphi_k|$ również jest (regularną) jednością aproksymatywną. Czasem zamiast ciągu φ_k będziemy rozważali rodzinę φ_r, gdzie $r \to 0^+$ lub $r \to 1^-$.

Ćwiczenie 6.10. Uzasadnij, że ciąg $\frac{1}{2\pi}F_k$ spełnia warunek (A) z $\varepsilon_k = 0$, warunek (B) z $\varepsilon_k = \sqrt{\pi/(k+1)}$ oraz warunek (C) z $\varepsilon_k = \sqrt[3]{\pi/(2k+2)}$.

Ćwiczenie 6.11. Udowodnij, że jeśli funkcje $\varphi_k \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ przyjmują wartości rzeczywiste oraz

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\right)\varphi_k(x)dx = 0$$

dla każdego $\varepsilon > 0$, to spełniony jest warunek (B). Sformułuj analogiczne twierdzenie dla warunku (C).

Twierdzenie 6.12. Jeśli φ_k jest jednością aproksymatywną, to:

(a) dla każdego $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ oraz każdego punktu ciągłości $x \in \mathbb{T}$ funkcji f zachodzi $f * \varphi_k(x) \to f(x)$ gdy $k \to \infty$, a jeśli $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T})$, to zbieżność jest jednostajna;

(b) jeśli ponadto funkcje φ_k są parzyste, to dla każdego $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ oraz każdego punktu $x \in \mathbb{T}$ w którym funkcja f ma jednostronne granice $f_-(x)$ i $f_+(x)$ zachodzi $f * \varphi_k(x) \to \frac{1}{2}(f_-(x) + f_+(x))$ gdy $k \to \infty$.

> Jeśli φ_k jest regularną jednością aproksymatywną, to:
> (c) dla każdego $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz każdego punktu ciągłości $x \in \mathbb{T}$ funkcji f zachodzi $f * \varphi_k(x) \to f(x)$ gdy $k \to \infty$;
> (d) jeśli ponadto funkcje φ_k są parzyste, to dla każdego $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz każdego punktu $x \in \mathbb{T}$ w którym funkcja f ma jednostronne granice $f_-(x)$ i $f_+(x)$ zachodzi $f * \varphi_k(x) \to \frac{1}{2}(f_-(x) + f_+(x))$ gdy $k \to \infty$.

Dowód. Niech $x \in \mathbb{T}$ oraz $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$. Przypuśćmy, że f ma w x jednostronne granice $f_-(x)$, $f_+(x)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $\delta > 0$ tak, aby $|f(y) - f_-(x)| < \varepsilon$ gdy $x - \delta < y < x$ oraz $|f(y) - f_+(x)| < \varepsilon$ gdy $x < y < x + \delta$. Niech k będzie tak duże, że $\varepsilon_k < \delta$, $\varepsilon_k \|f\|_\infty < \varepsilon$ oraz $\varepsilon_k < 1$. Wówczas

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{0} \varphi_k(y)(f(x-y) - f_-(x))dy\right| &\leqslant \int_{-\pi}^{-\varepsilon_k} |\varphi_k(y)|\, 2\|f\|_\infty dy + \int_{-\varepsilon_k}^{0} |\varphi_k(y)|\varepsilon dy \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{-\varepsilon_k} |\varphi_k(y)| dy + \varepsilon \int_{-\pi}^{0} |\varphi_k(y)| dy\end{aligned}$$

i analogicznie

$$\left|\int_{0}^{\pi} \varphi_k(y)(f(x-y) - f_+(x))dy\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{\varepsilon_k}^{\pi} |\varphi_k(y)| dy + \varepsilon \int_{0}^{\pi} |\varphi_k(y)| dy.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(y) f(x-y) dy - f_-(x) \int_{-\pi}^{0} \varphi_k(y) dy - f_+(x) \int_{0}^{\pi} \varphi_k(y) dy\right| \\ &\qquad\leqslant 2\|f\|_\infty \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon_k} + \int_{\varepsilon_k}^{\pi}\right) |\varphi_k(y)| dy + \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(y)| dy \\ &\qquad\leqslant 2\|f\|_\infty \varepsilon_k + \varepsilon(1 + \varepsilon_k) < 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Jeśli f jest ciągła, otrzymujemy więc

$$\left| f * \varphi_k(x) - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(y) dy \right| < 4\varepsilon.$$

Stąd

$$|f * \varphi_k(x) - f(x)| < 4\varepsilon + \left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(y) dy - 1\right| |f(x)| \leqslant 4\varepsilon + \varepsilon_k \|f\|_\infty \leqslant 5\varepsilon,$$

o ile k jest dostatecznie duże. Gdy $f \in C(\mathbb{T})$, to wybór δ i k nie zależy od x i otrzymujemy $\|f * \varphi_k - f\|_\infty \leqslant 5\varepsilon$ dla dostatecznie dużych k. To dowodzi części (a) twierdzenia. Podobnie dowodzi się części (b): jeśli φ_k są funkcjami parzystymi, to

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{1}{2\pi} f * \varphi_k(x) - \tfrac{1}{2} f_-(x) - \tfrac{1}{2} f_+(x)\right| \\ &\qquad< 4\varepsilon + \left|\int_{-\pi}^{0} \varphi_k(y) dy - \tfrac{1}{2}\right| |f_-(x)| + \left|\int_{0}^{\pi} \varphi_k(y) dy - \tfrac{1}{2}\right| |f_+(x)| \\ &\qquad\leqslant 4\varepsilon + \tfrac{\varepsilon_k}{2} \|f(x)\|_\infty + \tfrac{\varepsilon_k}{2} \|f\|_\infty \leqslant 5\varepsilon\end{aligned}$$

dla k dostatecznie dużych. Części (c) i (d) mają analogiczne dowody, wystarczy zastąpić warunek $\varepsilon_k \|f\|_\infty < \varepsilon$ warunkami $\varepsilon_k \|f\|_1 < \varepsilon$, $\varepsilon_k |f_-(x)| < \varepsilon$, $\varepsilon_k |f_+(x)| < \varepsilon$ oraz wykorzystać oszacowanie

$$\left|\int_{-\pi}^{-\varepsilon_k} \varphi_k(y)(f(x-y)-f_-(x))dy\right| \leqslant \varepsilon_k \int_{-\pi}^{-\varepsilon_k} |f(x-y)|dy + |f_-(x)| \int_{-\pi}^{-\varepsilon_k} |\varphi_k(y)|dy$$

w miejsce

$$\left|\int_{-\pi}^{-\varepsilon_k} \varphi_k(y)(f(x-y)-f_-(x))dy\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{-\varepsilon_k} |\varphi_k(y)|dy.$$

Szczegóły pozostawiamy jako ćwiczenie. □

Ćwiczenie 6.13. Uzupełnij dowód części (c) i (d) twierdzenia.

Twierdzenie 6.14 (*twierdzenie Fejéra*). Dla każdego $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz każdego punktu ciągłości $x \in \mathbb{T}$ funkcji f zachodzi $\sigma_k f(x) \to f(x)$ gdy $k \to \infty$. Jeśli $f \in C(\mathbb{T})$, to zbieżność jest jednostajna. Ponadto dla każdego $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz każdego punktu $x \in \mathbb{T}$ w którym funkcja f ma jednostronne granice $f_-(x)$ i $f_+(x)$ zachodzi $\sigma_k f(x) \to \frac{1}{2}(f_-(x) + f_+(x))$ gdy $k \to \infty$. □

Wniosek 6.15. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $x \in \mathbb{T}$, f jest ciągła w x oraz $S_k f(x) \to a$ gdy $k \to \infty$, to $a = f(x)$. □

Twierdzenie Fejéra można sprytnie wykorzystać do dowodu zbieżności w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$.

Lemat 6.16. Niech $p \in [1, \infty]$ i niech (X, μ) oraz (Y, ν) będą przestrzeniami miarowymi z nieujemnymi σ-skończonymi miarami μ i ν. Przypuśćmy, że $h_y(x) = h(x, y)$ jest nieujemna i mierzalna na $X \times Y$ i niech $g(x) = \int h_y(x)\nu(dy)$. Wówczas

$$\|g\|_{\mathscr{L}^p(X)} \leqslant \int_Y \|h_y\|_{\mathscr{L}^p(X)} \nu(dy).$$

Dowód. Rozważmy wpierw funkcję h postaci

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{B_j}(y) h_j(x),$$

gdzie $B_1, \ldots, B_n \subseteq Y$ są parami rozłączne. Nierówność przyjmuje postać

$$\left\|\sum_{j=1}^n \nu(B_j) h_j\right\|_{\mathscr{L}^p(X)} \leqslant \sum_{j=1}^n \nu(B_j) \|h_j\|_{\mathscr{L}^p(X)},$$

która jest prostym zastosowaniem nierówności Minkowskiego (tj. nierówności trójkąta dla normy w $\mathscr{L}^p(X)$).

Z odpowiedniej wersji twierdzenia Fubiniego wynika, że nierówność z lematu wystarczy udowodnić dla funkcji będących liniowymi kombinacjami indykatorów zbiorów postaci $A \times B$ dla $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Takie funkcje są postaci rozważanej w pierwszej części dowodu. □

Z powyższego wyniku natychmiast wynika szczególny przypadek nierówności Younga, o której więcej w rozdziale 12.

Wniosek 6.17. Jeśli $p \in [1,\infty]$, $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz $g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, to $f * g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ i $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

Dowód. Stosujemy lemat 6.16 dla $h(x,y) = g(x-y)$ oraz $\nu(dy) = f(y)dy$. □

Twierdzenie 6.18. Niech φ_k będzie jednością aproksymatywną i niech $p \in [1,\infty)$. Dla każdego $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ zachodzi $f * \varphi_k \to f$ w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ gdy $k \to \infty$.

Dowód. Niech $T_y f(x) = f(x+y)$ oraz $F(y) = \|T_y f - f\|_p$. Na mocy lematu 4.4 funkcja F jest ciągła. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(y) f(x-y) dy - f(x)\right| \\ &\qquad\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(y)||f(x-y) - f(x)| dy + \left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(y) dy - 1\right| |f(x)| \\ &\qquad\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(y)||f(x-y) - f(x)| dy + \varepsilon_k |f(x)|.\end{aligned}$$

Wykorzystamy lemat 6.16 dla $X = \mathbb{T}$, $\mu(dx) = dx$ oraz $Y = \mathbb{T}$, $\nu(dy) = |\varphi_k(y)|dy$. Niech $h_y(x) = |f(x-y) - f(x)|$ oraz $g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(y)| h_y(x) dy$. Otrzymujemy

$$\|f * \varphi_k - f\|_p \leqslant \|g + \varepsilon_k |f|\|_p \leqslant \|g\|_p + \varepsilon_k \|f\|_p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(y)| \|h_y\|_p dy + \varepsilon_k \|f\|_p.$$

Ponadto $\|h_y\|_p = \|T_{-y} f - f\|_p = F(-y)$. Wobec tego

$$\|f * \varphi_k - f\|_p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(y)| F(-y) dy + \varepsilon_k \|f\|_p = |\varphi_k| * F(0) + \varepsilon_k \|f\|_p.$$

Z twierdzenia 6.12 (i faktu, że $|\varphi_k|$ jest jednością aproksymatywną) wynika, że $|\varphi_k| * F(0)$ dąży do $F(0) = 0$ gdy $k \to \infty$. □

Twierdzenie 6.19. Jeśli $p \in [1,\infty)$ oraz $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, to $\sigma_k f$ dąży do f w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ gdy $k \to \infty$. □

Wniosek 6.20. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz $\hat{f}(n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$, to $f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{T}$. □

Wniosek 6.21. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ i $S_k f$ jest zbieżny względem miary lub prawie wszędzie gdy $k \to \infty$, to granica jest równa f prawie wszędzie. □

Ćwiczenie 6.22. Niech φ_k będzie jednością aproksymatywną oraz $\tilde{\varphi}_k(x) = \varphi_k(-x)$. Udowodnij, że dla $f \in C(\mathbb{T})$ i $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ zachodzi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mu * \varphi_k(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f * \tilde{\varphi}_k(x) \mu(dx).$$

Wywnioskuj, że jeśli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to $\mu * \varphi_k(x)dx$ dąży *słabo do μ.

Ćwiczenie 6.23. Wywnioskuj z poprzedniego ćwiczenia, że jeśli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to $\sigma_k\mu(x)dx$ dąży *słabo do μ. W szczególności jeśli $\hat{\mu}(n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$, to $\mu = 0$.

Zbieżność $\sigma_k f$ do f prawie wszędzie dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ wyniknie z ogólnych metod omówionych w następnych rozdziałach. Poniżej jedynie formułujemy odpowiednie twierdzenie.

Twierdzenie 6.24 (dowód w rozdziale 13). Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, to $\sigma_k f$ dąży do f prawie wszędzie gdy $k \to \infty$.

7. **Szeregi Fouriera — przykłady szeregów rozbieżnych**

W pierwszej części tego rozdziału skonstruujemy funkcję ciągłą, której szereg Fouriera jest rozbieżny. Opisany niżej pomysł pochodzi of Fejéra. Gdy $1 \leqslant l < k$, określamy

$$f_{k,l}(x) = \sum_{n=1}^{l} \frac{\cos((k+l-n)x) - \cos((k+l+n)x)}{n}.$$

Zauważmy, że $f_{k,l}(0) = 0$. Przypomnijmy, że D_k oznacza jądro Dirichleta.

Ćwiczenie 7.1. Wykaż, że dla $k \geqslant 0$ oraz $x \in (-\pi, \pi)$,

$$\left| \int_0^x D_k(y)dy \right| \leqslant \pi^2.$$

Możesz wykorzystać lemat 5.12.

Ćwiczenie 7.2. Uzasadnij, że

$$f_{k,l}(x) = 2\sin((k+l)x) \sum_{n=1}^{l} \frac{\sin(nx)}{n} = \sin((k+l)x) \left(\int_0^x D_l(y)dy - x \right)$$

i wobec tego $\|f_{k,l}\|_\infty \leqslant \pi(\pi+1)$.

Ćwiczenie 7.3. Udowodnij, że

$$S_{k+l} f_{k,l}(x) = \sum_{n=1}^{l} \frac{\cos((k+l-n)x)}{n}$$

i wobec tego $S_{k+l} f_{k,l}(0) = \sum_{n=1}^{l} \frac{1}{n} \geqslant \ln l$. Wykaż ponadto, że dla wszystkich $x \in \mathbb{T}$, $S_m f_{k,l}(x) = 0$ dla $m < k$ oraz $S_m f_{k,l}(x) = f_{k,l}(x)$ dla $m \geqslant k + 2l$.

Niech a_m będzie sumowalnym ciągiem liczb nieujemnych, zaś k_m i l_m rosnącymi ciągami liczb naturalnych o własności $k_m + 2l_m < k_{m+1}$ dla wszystkich $m \geqslant 1$. Określamy

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m f_{k_m, l_m}(x).$$

Ćwiczenie 7.4. Wykaż, że funkcja g jest poprawnie określona, ciągła i ma następujące własności: $g(0) = 0$, $S_{k_m - 1} g(0) = 0$, $S_{k_m + l_m} g(0) \geqslant a_m \ln l_m$ dla wszystkich $m \geqslant 1$.

Ćwiczenie 7.5. Dobierz ciągi a_m, k_m i l_m w poprzednim ćwiczeniu tak, aby ciąg $S_k g(0)$ był nieograniczony.

Ćwiczenie 7.6. Dla dowolnego nieograniczonego ciągu rosnącego w_k liczb rzeczywistych dobierz a_m, k_m i l_m tak, aby ciąg $(w_k / \ln k) S_k g(0)$ był nieograniczony. Porównaj uzyskany wynik z wnioskiem 5.20.

Druga część tego rozdziału poświęcona jest imponującemu przykładowi funkcji z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, której szereg Fouriera jest rozbieżny prawie wszędzie. Pokazuje on, że twierdzenie Carlesona nie rozszerza się do $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Pierwsza taka funkcja została opisana przez Kołmogorowa w 1923 roku, poniższa konstrukcja jest bardzo podobna.

Załóżmy, że dla każdego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian trygonometryczny f oraz zbiór borelowski $E \subseteq [0, 2\pi)$ o następujących własnościach: $\|f\|_1$ jest ograniczona jednostajnie ze względu na ε, $\hat{f}(0) = 0$, miara E wynosi co najmniej $2\pi(1 - \varepsilon^2)$ oraz dla $x \in E$

zachodzi $|S_l f(x)| > \frac{1}{\varepsilon^2}$ dla pewnego l nie przekraczającego stopnia wielomianu trygonometrycznego f. Istnienie f i E będzie wykazane później.

Dobierzmy funkcje f_k i zbiory E_k zgodnie z powyższymi warunkami do sumowalnego ciągu ε_k o następującej własności:

$$\sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j \|f_j\|_\infty < \frac{1}{2\varepsilon_k}$$

dla wszystkich $k \geqslant 1$. Dobierzmy ponadto ciąg dodatnich liczb całkowitych q_k tak, aby q_{k+1}/q_k było większe od stopnia wielomianu trygonometrycznego f_k. Określamy

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j f_j(q_j x).$$

Skoro ciąg ε_k jest sumowalny, a normy $\|f_j\|_1$ wspólnie ograniczone, szereg po prawej stronie jest zbieżny w $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, więc g jest poprawnie określona i $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

Ćwiczenie 7.7. Niech $h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $q \geqslant 1$ oraz $h_q(x) = h(qx)$. Udowodnij, że $\hat{h}_q(qn) = \hat{h}(n)$ dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $\hat{h}_q(n) = 0$ gdy $n \in \mathbb{Z}$ nie dzieli się przez q. Wywnioskuj, że $S_{ql} h_q(x) = S_l h(qx)$.

Ćwiczenie 7.8. Wykorzystując poprzednie ćwiczenie i definicję q_k, udowodnij, że

$$S_{q_k l} g(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j f_j(q_j x) + \varepsilon_k S_l f_k(q_k x).$$

gdy $l \leqslant q_{k+1}/q_k$.

Ćwiczenie 7.9. Dla $E \subseteq [0, 2\pi)$ niech $\frac{1}{q}E$ oznacza zbiór liczb z przedziału $[0, 2\pi)$ postaci $\frac{x+2n\pi}{q}$ dla $x \in E$ i $n \in \mathbb{Z}$. Zauważ, że $\frac{1}{q}E$ ma tę samą miarę, co E. Wykorzystując poprzednie ćwiczenie oraz definicję ε_j, udowodnij, że jeśli $x \in \frac{1}{q_k}E_k$, to istnieje l takie, że $|S_{q_k l} g(x)| > 1/(2\varepsilon_k)$.

Ćwiczenie 7.10. Wywnioskuj, że jeśli x należy do nieskończenie wielu spośród zbiorów $\frac{1}{q_k}E_k$, to ciąg $S_k g(x)$ jest rozbieżny. Wykorzystując własność zbiorów E_k, udowodnij, że szereg Fouriera g jest rozbieżny dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{T}$.

Poniżej konstruujemy funkcję f i zbiór E o żądanych własnościach. Przypomnijmy, że D_k i F_k oznaczają jądra Dirichleta i Fejéra oraz że gdy $0 \leqslant k \leqslant l$, to $S_k F_l = \frac{k+1}{l+1} F_l + \frac{l-k}{l+1} D_l$. Ustalmy $k \geqslant 1$. Dla $j = 0, 1, .., k$ określamy

$$x_j = 2\pi \, \tfrac{2j}{2k+1}$$

i definiujemy

$$f(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} F_{l_j}(x - x_j),$$

gdzie $l_1, ..., l_k$ jest ustalonym ciągiem, spełniającym następujące warunki: $l_j \geqslant k^4$, $l_{j+1} > 2l_j$ oraz $2l_j + 1$ jest podzielne przez $2k + 1$. Na przykład możemy obrać $l_j = 3^j k^4 (2k + 1) + k$, choć dokładna postać l_j nie będzie nam potrzebna (ważna natomiast będzie postać x_j). Ponadto określamy przedziały

$$I_j = (x_{j-1} + \tfrac{1}{k^2}, x_j - \tfrac{1}{k^2}).$$

Oczywiście f jest nieujemna i ma całkę 2π. Szukaną funkcją będzie $f(x) - 1$. Zauważmy, że zerowy współczynnik szeregu Fouriera funkcji $f(x) - 1$ wynosi zero i ponadto $\|f - 1\|_1 \leqslant 4\pi$. Ponadto $f - 1$ jest wielomianem trygonometrycznym stopnia l_k.

Ćwiczenie 7.11. Zauważ, że gdy $2k+1$ dzieli $2l+1$, to $\sin((l+\frac{1}{2})n(x-x_j)) = \sin((l+\frac{1}{2})nx)$.

Ćwiczenie 7.12. Udowodnij, że jesli I jest przedziałem, $c \in (0, \frac{1}{2})$, $a > 2\pi/(c|I|)$, $b \in \mathbb{R}$ to zbiór E tych $x \in I$ dla których $|\sin(a(x - b))| < c$ ma miarę mniejszą niż $c|I|$.

Ćwiczenie 7.13. Zauważ, że jeśli $1 \leqslant n < k$, to

$$S_{l_n} f(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} F_{l_j}(x - x_j) + \frac{1}{k} \sum_{j=n+1}^{k} \frac{l_n + 1}{l_j + 1} F_{l_n}(x - x_j) + \frac{1}{k} \sum_{j=n+1}^{k} \frac{l_j - l_n}{l_j + 1} D_{l_n}(x - x_j).$$

Ćwiczenie 7.14. Udowodnij, że jeśli $1 \leqslant n < k$ oraz $x \in I_n$, to

$$0 \leqslant \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} F_{l_j}(x - x_j) + \frac{1}{k} \sum_{j=n+1}^{k} \frac{l_n + 1}{l_j + 1} F_{l_n}(x - x_j) \leqslant \pi^2$$

(wykorzystaj oszacowania jądra Fejéra, definicję I_j oraz $l_j \geqslant k^4$). Wywnioskuj (wykorzystując podzielność $2l_j + 1$ przez $2k + 1$), że

$$|S_{l_n} f(x)| \geqslant \frac{1}{k} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \frac{l_j - l_n}{l_j + 1} \frac{\sin((l_n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}(x - x_j))} \right| - \pi^2.$$

Ćwiczenie 7.15. Udowodnij, że jeśli $1 \leqslant n < k - \sqrt{k}$ oraz $x \in I_n$, to

$$\begin{aligned} |S_{l_n} f(x)| &\geqslant \frac{|\sin((l_n + \frac{1}{2})x)|}{k} \sum_{j=n+1}^{k} \frac{1}{x_j - x_{n-1}} - \pi^2 \\ &\geqslant \frac{|\sin((l_n + \frac{1}{2})x)|}{4\pi} \left(\tfrac{1}{2} \ln k - 1\right) - \pi^2 \end{aligned}$$

(wykorzystaj definicję x_j oraz $l_{j+1} \geqslant 2l_j$).

Ćwiczenie 7.16. Niech $\varepsilon = (\ln k)^{-1/5}$ i niech E będzie zbiorem tych $x \in [0, 2\pi)$, dla których $|S_{l_n} f(x)| > \frac{1}{\varepsilon^2} + 1$ dla pewnego n. Udowodnij, że jeśli k jest dostatecznie duże oraz $1 \leqslant n < k - \sqrt{k}$, to miara zbióru $I_n \setminus E$ wynosi co najwyżej $\frac{1}{2}\varepsilon^2 |I_n|$. Wywnioskuj, że dla dostatecznie dużych k miara E wynosi co najmniej $2\pi(1 - \varepsilon^2)$.

Wobec tego jeśli k jest dostatecznie duże, funkcja $f - 1$ oraz zbiór E mają żądane własności dla $\varepsilon = (\ln k)^{-1/5}$.

8. **Transformata Fouriera na $\mathbb{R}^d$ — definicje i własności**

Teorię szeregów Fouriera można uogólniać na wiele sposobów, których nie będziemy tu omawiać (np. funkcje prawie okresowe). Skupimy się na najważniejszym pojęciu: transformacie Fouriera w przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$. Później krótko omówimy teorię dla lokalnie zwartych grup topologicznych.

Przez $x \cdot y$ oznaczamy iloczyn skalarny wektorów $x, y \in \mathbb{R}^d$, zaś przez $B(x,r)$ oznaczamy otwartą kulę o środku w $x \in \mathbb{R}^d$ i promieniu $r > 0$. Przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych oznaczamy przez $C_b(\mathbb{R}^d)$. Nośnik funkcji f, oznaczany $\operatorname{supp} f$, to domknięcie zbioru $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$. Zbiór funkcji ciągłych o ograniczonym (i przez to zwartym) nośniku oznaczamy $C_c(\mathbb{R}^d)$. Jego domknięcie w $C_b(\mathbb{R}^d)$ (w normie jednostajnej) to przestrzeń $C_0(\mathbb{R}^d)$ funkcji ciągłych zbieżnych do zera w nieskończoności.

Definicja transformaty Fouriera jest podobna do definicji szeregu Fouriera, zamiast funkcji $e_k(x) = e^{ikx}$ mamy funkcje $e_\xi(x) = e^{i\xi x}$.

Definicja 8.1. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, i $\xi \in \mathbb{R}^d$, to określamy *transformatę Fouriera* funkcji f:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx.$$

Analogicznie jeśli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ i $\xi \in \mathbb{R}^d$, to określamy *transformatę Fouriera* miary μ:

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{T}} e^{-i\xi\cdot x} \mu(dx).$$

Przyporządkowanie funkcji lub mierze jej transformaty Fouriera to transformacja Fouriera. Proste własności transformacji Fouriera są zawarte w następujących ćwiczeniach.

Ćwiczenie 8.2. Zauważ, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$, to $\hat{f}, \hat{\mu} \in C_b(\mathbb{R}^d)$ i $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$, $\|\hat{\mu}\|_\infty \leqslant \|\mu\|$, zatem transformacja Fouriera jest ograniczonym operatorem liniowym z $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ w $C_b(\mathbb{R}^d)$ oraz z $\mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ w $C_b(\mathbb{R}^d)$.

Ćwiczenie 8.3. Sprawdź, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $g(x) = \overline{f(x)}$ oraz $h(x) = f(-x)$, to $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$ oraz $\hat{h}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$.

Ćwiczenie 8.4. Sprawdź, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $a \in \mathbb{R}^d$ oraz $g(x) = f(a+x)$, $h(x) = f(a-x)$, to $\hat{g}(\xi) = e^{i\xi\cdot a}\hat{f}(\xi)$, $\hat{h}(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}\hat{f}(-\xi)$.

Ćwiczenie 8.5. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $r > 0$ oraz $g(x) = r^d f(rx)$, to $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi/r)$. Ogólniej, udowodnij, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, A jest niezdegenerowaną macierzą $d \times d$ oraz $g(x) = |\det A| f(Ax)$, to $\hat{g}(\xi) = \hat{f}((A^{-1})^T \xi)$. Wywnioskuj, że jeśli $f(x) = g(|x|)$ i $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to $\hat{f}(\xi) = h(|\xi|)$ dla pewnej funkcji h. Poczytaj o transformacji Hankela.

Ćwiczenie 8.6. Przypuśćmy, że $f_1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^{d_1})$, $f_2 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^{d_2})$ i określmy $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ dla $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$. Udowodnij, że $\hat{f}(\xi) = \hat{f_1}(\xi_1)\hat{f_2}(\xi_2)$ dla $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $\xi_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$.

Ćwiczenie 8.7. Przypuśćmy, że $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $v \in \mathbb{R}^d$ oraz

$$f(x + tv) - f(x) = \int_0^t g(x + sv) ds$$

(w szczególności tak jest, gdy v jest j-tym wektorem bazowym, pochodna cząstkowa $\partial_j f$ istnieje oraz $g = \partial_j f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$). Udowodnij, że $\hat{g}(\xi) = iv \cdot \xi \hat{f}(\xi)$.

Ćwiczenie 8.8. Przypuśćmy, że $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $g(\xi) = -i\xi_j f(\xi)$ oraz $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Udowodnij, że pochodna $\partial_j \hat{f}$ istnieje i jest transformatą Fouriera g.

Splot funkcji f oraz g to funkcja $f * g$ dana wzorem

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

wszędzie tam, gdzie całka ma sens. Z twierdzenia Fubiniego wynika, że jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to $f * g$ jest określona prawie wszędzie i $f * g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ oraz $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, to $f * g$ jest określona wszędzie i $f * g \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, a nawet $f * g \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ na mocy wniosku 4.5 (z minimalną zmianą). Podobnie jeśli $f, g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, to $f * g$ jest określona prawie wszędzie i $f * g \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, a nawet $f * g \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$.

LEMAT 8.9. Jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i $h = f * g$, to $\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

Dowód. Na mocy twierdzenia Fubiniego,

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x)e^{-i\xi\cdot x}dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-i\xi\cdot y}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-i\xi\cdot(x-y)}dx\right)dy \\ &= \hat{f}(\xi)\int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-i\xi\cdot y}g(y)dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

□

LEMAT 8.10. Jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi.$$

Dowód. Ponownie na mocy twierdzenia Fubiniego,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi\right)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx\right)g(\xi)d\xi.$$

□

Bardziej zaawansowane własności transformaty Fouriera można uzyskać w rozmaity sposób. Jednym z najprostszych jest wykorzystanie jądra Gaussa–Weierstrassa, zdefiniowanego dla $r > 0$ i $x \in \mathbb{R}^d$ wzorem

$$K_r(x) = \frac{1}{(4\pi r)^{d/2}}e^{-|x|^2/(4r)}.$$

LEMAT 8.11. Zachodzi $\hat{K}_r(\xi) = \exp(-r|\xi|^2)$.

Dowód. Rozważmy najpierw przypadek $d = 1$ oraz $r = 1/2$. Zauważmy, że

$$e^{\xi^2/2}\hat{K}_{1/2}(\xi) = \frac{e^{\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2}dx.$$

Funkcja $\exp(-z^2/2)$ jest holomorficzna względem $z \in \mathbb{C}$, zatem na mocy tw. Cauchy'ego dla brzegu prostokąta $[-R, R] \times [0, \xi]$,

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}dx + \int_0^{\xi} e^{-(R+iy)^2/2}idy - \int_{-R}^{R} e^{-(x+i\xi)^2/2}dx - \int_0^{\xi} e^{-(-R+iy)^2/2}idy.$$

Ponieważ $|e^{-(\pm R+iy)^2/2}| = e^{-(R^2-y^2)/2} \leqslant e^{-(R^2-4r^2)/2}$ dla $y \in [0, \xi]$, druga i czwarta całka dążą do zera gdy $R \to \infty$. Wobec tego

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2}dx.$$

Całkując we współrzędnych biegunowych, otrzymujemy

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dydx = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}dr = 2\pi.$$

Otrzymujemy zatem

$$e^{\xi^2/2}\hat{K}_{1/2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 1.$$

Lemat dla $d = 1$ i $r = 1/2$ został udowodniony.

Gdy $d = 1$ i $r > 0$, zachodzi $K_r(x) = (1/\sqrt{2r})K_{1/2}(x/\sqrt{2r})$, zatem

$$\hat{K}_r(\xi) = \hat{K}_{1/2}(\xi\sqrt{2r}) = e^{-(\xi\sqrt{2r})^2/2} = e^{-r\xi^2}.$$

W przypadku wielowymiarowym $K_r(x) = \tilde{K}_r(x_1)\tilde{K}_r(x_2)...\tilde{K}_r(x_d)$ dla $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$, gdzie $\tilde{K}_r$ jest jądrem Gaussa–Weierstrassa w $\mathbb{R}^1$, przez co

$$\hat{K}_r(\xi) = \hat{\tilde{K}}_r(\xi_1)\hat{\tilde{K}}_r(\xi_2)...\hat{\tilde{K}}_r(\xi_d) = e^{-r\xi_1^2}e^{-r\xi_2^2}...e^{-r\xi_d^2}$$

dla $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_d)$. □

Udowodnimy, że K_r jest regularną jednością aproksymatywną gdy $r \to 0^+$, zgodnie z odpowiednio zmodyfikowaną definicją 6.9. Ściślej, rodzinę funkcji φ_r nazywamy regularną jednością aproksymatywną, jeśli istnieją liczby $\varepsilon_r > 0$ zbieżne do zera gdy $r \to 0^+$ o następujących własnościach:

(A) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(x)dx \geqslant 1 - \varepsilon_r$ oraz $\|\varphi_r\|_1 \leqslant 1 + \varepsilon_r$;

(B) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\varepsilon_r)} |\varphi_r(x)|dx \leqslant \varepsilon_r$;

(C) $|\varphi_r(x)| \leqslant \varepsilon_r$ dla $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0, \varepsilon_r)$.

Jeśli spełnione są tylko pierwsze dwa z powyższych warunków, mówimy po prostu, że φ_r jest jednością aproksymatywną.

Widzimy, że $K_r(x) \geqslant 0$ oraz $\int_{\mathbb{R}^d} K_r(x)dx = \hat{\varphi}_r(0) = 1$. Pozostałe własności wynikają z ogólniejszego faktu.

> Lemat 8.12. Niech $\alpha(r)$ będzie funkcją o wartościach dodatnich, zbieżną do zera gdy $r \to 0^+$. Dowolny układ funkcji φ_r postaci $\varphi_r(x) = (\alpha(r))^{-d}f(x/\alpha(r))$, gdzie $f(x) \geqslant 0$ oraz $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = 1$, jest jednością aproksymatywną. Aby zachodził warunek (III), wystarczy założyć dodatkowo, że $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ (czyli np. $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$).

Dowód. Oczywiście spełniony jest warunek (A). Ponadto dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_r(x)dx = \lim_{r\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\varepsilon/\alpha(r))}(x)dx = 0$$

na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. Niech więc $r_0(\varepsilon) > 0$ będzie największą liczbą o własności

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_r(x)dx < \varepsilon$$

dla wszystkich $r \in (0, r_0(\varepsilon))$ (dopuszczamy $r_0(\varepsilon) = \infty$). Oczywiście r_0 jest rosnącą funkcją $\varepsilon > 0$. Określmy $\varepsilon_r = 2\inf\{\varepsilon > 0 : r_0(\varepsilon) > r\}$. Wówczas dla dowolnego $r > 0$ zachodzi $r \in (0, r_0(\varepsilon_r))$, a więc spełniony jest warunek (B). Ponadto dla każdego $\varepsilon > 0$ jeśli $r_0(\varepsilon) > r$, to $\varepsilon_r \leqslant 2\varepsilon$, zatem ε_r dąży do zera gdy $r \to 0^+$ (powyższy argument jest rozwiązaniem ćw. 6.11).

Gdy $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, to analogicznie otrzymujemy

$$\lim_{r\to 0^+} \sup\{\varphi_r(x) : x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)\} = 0$$

dla każdego $\varepsilon > 0$ i w powyższej konstrukcji określamy $r_0(\varepsilon)$ tak, aby dla $r \in (0, r_0(\varepsilon))$ dodatkowo

$$\sup\{\varphi_r(x) : x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)\} < \varepsilon.$$ □

Poniższe twierdzenie zostało udowodnione (w nieco rozszerzonej wersji, uwzględniającej pewne funkcje nieciągłe) dla funkcji określonych na $\mathbb{T}$ jako twierdzenia 6.12 i 6.18. Dowód wersji euklidesowej w zasadzie nie różni się niczym.

Twierdzenie 8.13. (a) Jeśli φ_r jest jednością aproksymatywną, to dla każdego $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ oraz każdego punktu ciągłości $x \in \mathbb{R}^d$ funkcji f zachodzi $f * \varphi_r(x) \to f(x)$ gdy $r \to 0^+$. Jeśli $f \in C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$, to zbieżność jest jednostajna na zwartych podzbiorach $\mathbb{R}^d$, a jeśli f jest jednostajnie ciągła (np. $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$), to zbieżność jest jednostajna.

(b) Jeśli φ_r jest regularną jednością aproksymatywną, to dla każdego $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ oraz każdego punktu ciągłości $x \in \mathbb{R}^d$ funkcji f zachodzi $f * \varphi_r(x) \to f(x)$ gdy $r \to 0^+$.

(c) Jeśli φ_r jest jednością aproksymatywną oraz $p \in [1,\infty)$, to dla każdego $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ zachodzi $f * \varphi_r \to f$ w $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ gdy $r \to 0^+$. □

Ćwiczenie 8.14. Sprawdzić, że w dowodzie odpowiednich twierdzeń w rozdziale 6 wystarczy zamienić $\mathbb{T}$ na $\mathbb{R}^d$ i usunąć część dotyczącą funkcji nieciągłych, by uzyskać dowód twierdzenia 8.13.

Powyższe twierdzenie stosuje się w szczególności do jądra Gaussa–Weierstrassa.

Twierdzenie 8.15 (*lemat Riemanna–Lebesgue'a*). Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Dowód. Transformata Fouriera $f_r = f * K_r$ jest równa $\hat{f}_r(\xi) = \exp(-r|\xi|^2)\hat{f}(\xi)$, więc $\hat{f}_r \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Ponadto $\|\hat{f}_r - \hat{f}\|_\infty \leqslant \|f_r - f\|_1 \to 0$ gdy $r \to 0^+$. □

Twierdzenie 8.16 (*wzór na transformatę odwrotną*). Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to w sensie zbieżności w $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$f(x) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-r|\xi|^2} \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi,$$

a jeśli ponadto $\hat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to powyższa zbieżność jest jednostajna względem $x \in \mathbb{R}^d$ oraz

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$. Innymi słowy, w tym przypadku $f(-x)$ jest transformatą Fouriera funkcji $\hat{f}(\xi)$. W szczególności $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Dowód. Niech $f_x(y) = f(x-y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}^d$. Zachodzi $\hat{f_x}(\xi) = e^{-i\xi\cdot x}\hat{f}(-\xi)$, zatem dla $t > 0$,

$$f * \hat{K}_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_x(y)\hat{K}_t(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f_x}(\xi)K_t(\xi)d\xi.$$

Zauważmy, że $\hat{K}_t(x) = \exp(-t|x|^2) = (\pi/t)^{d/2}K_{1/(4t)}(x)$ oraz $K_t(\xi) = (4\pi t)^{-d/2}\hat{K}_{1/(4t)}(\xi)$. Przyjmując $r = 1/(4t)$, otrzymujemy

$$\pi^{d/2}t^{-d/2} f * K_r(x) = (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f_x}(\xi)\hat{K}_r(\xi)d\xi,$$

czyli

$$f * K_r(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f_x}(\xi)\hat{K}_r(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x}\hat{f}(-\xi)e^{-r\xi^2}d\xi.$$

Wraz z twierdzeniem 8.13 kończy to dowód pierwszej części. Gdy $\hat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, drugi wzór z twierdzenia wynika z pierwszego na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. Ponadto

$$|f(x) - f * K_r(x)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{r|\xi|^2})|\hat{f}(\xi)|d\xi,$$

a prawa strona nie zależy od x i dąży do zera gdy $r \to 0^+$ na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. Oznacza to, że zbieżność w pierwszym wzorze z twierdzenia jest jednostajna. □

Wniosek 8.17. Jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ oraz $\hat{f} = \hat{g}$ prawie wszędzie, to $f = g$ prawie wszędzie. □

Poniższe ćwiczenia zawierają kolejne proste własności transformaty Fouriera.

Ćwiczenie 8.18. Udowodnij, że $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ma wartości rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$.

Ćwiczenie 8.19. Udowodnij, że $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ jest funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\hat{f}(-\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\cos(\xi\cdot x)dx.$$

Ćwiczenie 8.20. Udowodnij, że $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ jest funkcją nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-\hat{f}(-\xi) = \hat{f}(\xi) = i\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\sin(\xi\cdot x)dx.$$

W następnym dowodzie wykorzystamy zbieżność $f * K_r$ do f w $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dla $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Twierdzenie 8.21 (*twierdzenie Plancherela*). Jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, to $f\bar{g} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.$$

Wobec tego transformacja Fouriera rozszerza się do ciągłego operatora $\mathscr{F}$ na $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i $(2\pi)^{-d/2}\mathscr{F}$ jest operatorem unitarnym na $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Dowód. Niech $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Zauważmy, że dla $r > 0$, funkcja $f * g * K_r$ oraz jej transformata Fouriera, tj. $\hat{f}\hat{g}\hat{K}_r$, należą do $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Na mocy wzoru na transformatę odwrotną,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g * K_r(-x) dx = f * g * K_r(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)e^{-r|\xi|^2} d\xi.$$

Przypuśćmy, że ponadto $f, g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Gdy $r \to 0^+$, $g * K_r$ dąży do g w $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, zatem lewa strona dąży do $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(-x)dx$. Rozważmy $g(x) = \overline{f(-x)}$. Wówczas $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$, zatem na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-r|\xi|^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

W szczególności $\hat{f} \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i $\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f\|_2$. Wobec tego dla ogólnych $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(-x)dx = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-r|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) d\xi.$$

Twierdzenie Plancherela uzyskujemy, zastępując funkcję $g(x)$ przez $\overline{g(-x)}$. □

Zauważmy, że $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ nie jest podzbiorem $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Choć rozróżnienie między transformacją Fouriera na $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ oraz na $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ często jest nieistotne, będziemy konsekwentnie oznaczać transformatę Fouriera $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ przez $\hat{f}$, zaś transformatę Fouriera $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ przez $\mathscr{F}f$.

WNIOSEK 8.22. Jeśli $f, g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ oraz $h = fg$, to $\hat{h} = (2\pi)^{-d}\mathscr{F}f * \mathscr{F}g$.

Dowód. Niech $g_\xi(x) = e^{i\xi x}\overline{g(x)}$. Na mocy twierdzenia Plancherela,

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g_\xi(x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}f(\eta)\overline{\mathscr{F}g_\xi(\eta)}d\eta.$$

Pozostaje zauważyć, że $\mathscr{F}g_\xi(\eta) = \overline{\mathscr{F}g(\xi - \eta)}$ (wzór ten zachodzi dla $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i rozszerza się przez ciągłość do $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$). □

TWIERDZENIE 8.23 (*wzór na transformatę odwrotną na $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$*). Jeśli $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, to w sensie zbieżności w $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$f(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-r|\xi|^2} \mathscr{F}f(\xi)e^{i\xi \cdot x} d\xi,$$

a jeśli ponadto $\hat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to powyższa zbieżność jest jednostajna względem $x \in \mathbb{R}^d$ oraz

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$. Innymi słowy, w tym przypadku $f(-x)$ jest transformatą Fouriera funkcji $\mathscr{F}f(\xi)$. W szczególności $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Dowód. Jeśli $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $g = \mathscr{F}f$ i $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, a więc $\mathscr{F}g = \hat{g}$. Stąd wynika drugi wzór z twierdzenia.

Na mocy wniosku 8.22, transformatą Fouriera $K_r * f$ jest całkowalna funkcja $e^{-r|\xi|^2}\mathscr{F}f(\xi)$. Ponadto $f * K_r$ dąży do f w $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Wraz z wykazanym już drugim wzorem z twierdzenia dowodzi to pierwszego wzoru. Jednostajności zbieżności dowodzi się tak samo, jak w dowodzie wzoru na transformatę odwrotną na $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. □

Ćwiczenie 8.24. Sformułuj i udowodnij odpowiedniki ćwiczeń 8.3–8.8 dla transformaty Fouriera na $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Ćwiczenie 8.25. Udowodnij, że $\mathscr{F}^2 f(x) = (2\pi)^d f(-x)$ dla $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ oraz że $(2\pi)^{-2d}\mathscr{F}^4$ jest operatorem jednostkowym na $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Ćwiczenie 8.26. Wywnioskuj z twierdzenia spektralnego, że $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ rozkłada się na ortogonalną sumę prostą czterech podprzestrzeni liniowych H_1, H_i, H_{-1}, H_{-i}, na których $(2\pi)^{-d/2}\mathscr{F}$ działa jako operator mnożenia odpowiednio przez 1, i, -1, $-i$.

Udowodniliśmy, że transformacja Fouriera jest ciągłym operatorem liniowym z $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ oraz z $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ w $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Pisząc $\tilde{\mathscr{F}}f = \hat{f}_1 + \mathscr{F}f_2$ dla $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, możemy rozszerzyć $\mathscr{F}$ do przestrzeni $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) + \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Rozszerzenie to jest jednoznaczne, bowiem jeśli $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, $f_1, g_1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $f_2, g_2 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, to $h = f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ jest funkcją z $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, a więc

$$\hat{f}_1 + \mathscr{F}f_2 = (\hat{f}_1 - \hat{h}) + (\mathscr{F}f_2 + \mathscr{F}h) = \hat{g}_1 + \mathscr{F}g_2.$$

Wobec tego $\tilde{\mathscr{F}}f$ nie zależy od wyboru f_1, f_2.

W szczególności więc $\tilde{\mathscr{F}}$ określone jest na każdej przestrzeni $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in [1,2]$. Wrócimy do tego tematu później, w rozdziale 12 udowodnimy m.in., że $\tilde{\mathscr{F}}$ jest operatorem ograniczonym z $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ w $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$, gdzie $p \in [1,2]$, $q \in [2,\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Okazuje się jednak, że dla $p > 2$ operator $\mathscr{F}$ nie może zostać w sposób ciągły rozszerzony na $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

Lemat 8.27. Niech $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ oraz $f(x) = K_r(x)e^{ia|x|^2}$. Wówczas

$$\hat{f}(\xi) = (\sqrt{1 - 4iar})^{-d} e^{-r|\xi|^2/(1-4iar)}.$$

Dowód. Dowód przebiega identycznie, jak wyznaczanie transformaty Fouriera K_r w lemacie 8.11, lecz zamiast funkcji $\exp(-z^2/2)$ występuje $\exp(-(1-2ia)z^2/2)$. □

Lemat 8.28. Niech $p, q \in [1,\infty]$. Dla funkcji f z poprzedniego lematu zachodzi $\|f\|_p = \|K_r\|_p$ oraz $\|\hat{f}\|_q = (1 + 16a^2r^2)^{-d/4}\|\hat{K}_\varrho\|_q$ dla $\varrho = r/(1 + 16a^2r^2)$. W szczególności dla pewnego $c > 0$ (zależącego od wymiaru i q),

$$\|\hat{f}\|_q \geqslant c r^{-d/(2q)}(1 + 16a^2r^2)^{d/(2q)-d/4}.$$

Dowód. Ponieważ $|\hat{f}(\xi)| = (1 + 16a^2r^2)^{-d/4}\hat{K}_\varrho(\xi)$, pierwsza część wynika wprost z poprzedniego lematu. Druga (dla $q \in [1,\infty)$) jest konsekwencją oszacowania

$$\|\hat{K}_\varrho\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-q\varrho|\xi|^2} d\xi \geqslant \int_{B(0,1/\sqrt{q\varrho})} e^{-q\varrho|\xi|^2} d\xi \geqslant \frac{|B(0,1)|}{e(q\varrho)^{d/2}}.$$ □

Badając $r = 1$ oraz $a \to \infty$, natychmiast otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 8.29. Niech $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, 2)$. Transformacja Fouriera nie rozszerza się do ograniczonego operatora z $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ do $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$. □

Ćwiczenie 8.30. Niech $p, q \in [1, \infty]$ i przypuśćmy, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \neq 1$. Rozważając funkcje postaci $f(rx)$ dla dowolnej niezerowej $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, wykaż, że transformacja Fouriera nie rozszerza się do ograniczonego operatora z $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ do $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$.

Ćwiczenie 8.31. Rozważmy funkcję f z lematu 8.27. Do czego dąży $r^{d/2}\hat{f}$ gdy $r \to \infty$? W jaki sposób można interpretować transformatę Fouriera funkcji $e^{ia|x|^2}$?

9. **Transformata Fouriera — rozszerzenia**

Badanie zbieżności transformaty odwrotnej dla funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ jest zagadnieniem podobnym do badania zbieżności szeregów Fouriera. Wpierw zajmiemy się teraz analogami braku zbieżności sum częściowych oraz zbieżności średnich Cesàro. Niech $I_t = [-t, t]^d$ oznacza d-wymiarową kostkę.

Lemat 9.1. Transformatą Fouriera funkcji $\mathbb{1}_{I_t}$ jest

$$t^d \prod_{j=1}^{d} \frac{2\sin(t\xi_j)}{t\xi_j},$$

zaś transformatą Fouriera funkcji $\prod_{j=1}^d \max(1 - \frac{|x_j|}{t}, 0)$ jest

$$t^d \prod_{j=1}^{d} \frac{2(1-\cos(t\xi_j))}{t^2\xi_j^2}.$$

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek $d = 1$. Wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{I_t}(x) e^{i\xi x} dx = 2\int_0^t \cos(\xi x) dx = \frac{2\sin(t\xi)}{\xi}.$$

Całkując przez części, otrzymujemy analogicznie

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \max(1 - \tfrac{|x|}{t}) e^{i\xi x} dx &= 2\int_0^t (1 - \tfrac{x}{t}) \cos(\xi x) dx \\ &= \frac{2}{\xi t}\int_0^r \sin(\xi x) dx = \frac{2(1-\cos(\xi t))}{\xi^2 t}.\end{aligned}$$

□

Jednym z analogów sum częściowych są wyrażenia występujące w poniższym wyniku.

Twierdzenie 9.2. Istnieje funkcja $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ dla której układ funkcji

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-t,t]^d} \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi$$

nie jest zbieżny w $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ (a wręcz normy $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ tych funkcji są nieograniczone) gdy $t \to \infty$.

Dowód. Ze wzoru na transformatę odwrotną na $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, funkcja $\mathbb{1}_{I_t}$ jest transformatą Fouriera funkcji

$$f_t(x) = \frac{t^d}{(2\pi)^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{2\sin(tx_j)}{tx_j},$$

która nie jest całkowalna, ale należy do $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ oraz $C_0(\mathbb{R}^d)$. Ustalmy $t > 0$. Układ funkcji $f_t * K_r$ (K_r jest jądrem Gaussa–Weierstressa) dąży punktowo (a nawet jednostajnie) do f_t gdy $r \to 0^+$. Gdyby normy $\|f_t * K_r\|_1$ były ograniczone gdy $r \to 0^+$, to z lematu Fatou wynikałoby, że $f_t \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Wobec tego $\|f_t * K_r\|_1$ może być dowolnie duże.

Dla każdego $t > 0$ istnieją zatem liczby $r(t)$ oraz $s(t)$ takie, że $\|\mathbb{1}_{I_{s(t)}} \cdot (f_t * K_{r(t)})\|_1 > t$. Określmy operator A_t wzorem $A_t f(x) = \mathbb{1}_{I_{s(t)}}(x) f_t * f(x)$. Wówczas A_t jest ograniczonym operatorem z $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ w $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, bowiem

$$\|A_t f\|_1 \leqslant \|I_{s(t)}\|_2 \, \|f_t * f\|_2 \leqslant \|I_{s(t)}\|_2 \, \|f_t\|_2 \, \|f\|_1$$

na mocy nierówności Schwarza oraz wniosku 6.17. Udowodniliśmy już, że norma operatora A_t przekracza t. Wobec zasady Banacha–Steinhausa istnieje funkcja $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ dla której norma $\|A_t f\|_1$ jest nieograniczona gdy $t \to \infty$. Ponieważ $\|f * f_t\|_1 \geqslant \|A_t f\|_1$, również normy $\|f * f_t\|_1$ są nieograniczone. Z drugiej strony $f * f_t$ jest funkcją z $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ o transformacie Fouriera $\mathbb{1}_{I_t}(\xi)\hat{f}(\xi)$, zatem ze wzoru na transformatę odwrotną na $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$,

$$f * f_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-t,t]^d} \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi. \qquad \square$$

Przy powyższej analogii sum częściowych, odpowiednikiem średnich Cesàro są wyrażenia w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 9.3. Dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, w sensie zbieżności w $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$,

$$f(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\prod_{j=1}^d \max(1 - \tfrac{|\xi_j|}{t}, 0) \right) \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi.$$

Dowód. Ze wzoru na odwracanie, funkcja $\prod_{j=1}^d \max(1 - \frac{|\xi_j|}{t}, 0)$ jest transformatą Fouriera funkcji

$$g_t(x) = \frac{t^d}{(2\pi)^d} \prod_{j=1}^d \frac{2(1-\cos(t\xi_j))}{t^2 \xi_j^2}.$$

Funkcje g_t tworzą jedność aproksymatywną gdy $t \to \infty$: są nieujemne, $g_t(x) = t^d g_1(tx)$ oraz $\|g_t\|_1 = \hat{g}_t(0) = 1$. Wobec tego $f * g_t$ dąży do f w $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Ponadto $f * g_t$ należy do $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i ma transformatę Fouriera równą

$$\left(\prod_{j=1}^d \max(1 - \tfrac{|\xi_j|}{t}, 0) \right) \hat{f}(\xi).$$

Teza wynika ze wzoru na odwracanie. $\square$

Ćwiczenie 9.4. Udowodnij, że przy oznaczeniach z twierdzenia 9.2 zachodzi $K_1 * f_t \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ dla wszystkich $t > 0$.

Ćwiczenie 9.5. Udowodnij twierdzenia analogiczne do powyższych dla granic

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \max(1 - \tfrac{|\xi|}{t}, 0) \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi$$

(istnieje w $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i jest równa f) oraz

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0,t)} \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi$$

(nie musi istnieć w $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$).

Ćwiczenie 9.6. Poszukaj informacji o zbiorach Kakeyi/Bezikowicza i ich zastosowaniu do badania zbieżności granicy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0,t)} \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi$$

w $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in (1, \infty)$.

Dowód twierdzenia 9.3 jest uniwersalny: po prawej stronie można zamienić czynnik $\prod_{j=1}^d \max(1-\frac{|\xi_j|}{t}, 0)$ transformatą Fouriera dowolnej jedności aproksymatywnej. Ważnym przykładem takiej jedności aproksymatywnej jest *jądro Poissona* (lub *jądro Cauchy'ego*), zdefiniowane wzorem

$$P_t(x) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(d+1)/2}}$$

dla $t > 0$ oraz $x \in \mathbb{R}^d$. Potrzebny nam będzie następujący wynik. Dowód dla $d = 1$ można uprościć, wykorzystując metody całki zespolonej. W ogólnym przypadku pomocny jest trik polegający na wyrażeniu $P_t(x)$ jako całkowej średniej jądra Gaussa–Weierstrassa $K_r(x)$ względem $r > 0$.

Lemat 9.7. Zachodzi $\hat{P}_t(\xi) = e^{-t|\xi|}$.

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych $a, b > 0$, stosując podstawienie $u = a\sqrt{v} - b/\sqrt{v}$ otrzymujemy

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (av^{-1/2} + bv^{-3/2}) e^{-(a\sqrt{v} - b/\sqrt{v})^2} dv.$$

Ponadto podstawienie $v = b^2/(a^2 w)$ daje

$$\int_0^{\infty} av^{-1/2} e^{-(a\sqrt{v} - b/\sqrt{v})^2} dv = \int_0^{\infty} bw^{-3/2} e^{-(b/\sqrt{w} - a\sqrt{w})^2} dw,$$

zatem

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{\infty} bv^{-3/2} e^{-(a\sqrt{v} - b/\sqrt{v})^2} dv.$$

Niech $g_t(r) = (4\pi)^{-1/2} t r^{-3/2} \exp(-t^2/(4r))$ dla $t, r > 0$. Otrzymujemy

$$e^{t|\xi|} \int_0^{\infty} g_t(r) e^{-r|\xi|^2} dr = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{\infty} t r^{-3/2} e^{-(|\xi|\sqrt{r} - t/(2\sqrt{r}))^2} dr = 1,$$

czyli

$$\int_0^{\infty} g_t(r) \hat{K}_r(\xi) dr = e^{-t|\xi|}.$$

W szczególności $\int_0^{\infty} g_t(r) dr = 1$. Z drugiej strony, stosując podstawienie $r = (t^2 + |x|^2)/(4s)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g_t(r) K_r(x) dr &= \frac{t}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \int_0^{\infty} r^{-(d+3)/2} e^{-(t^2+|x|^2)/(4r)} dr \\ &= \frac{1}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(d+1)/2}} \int_0^{\infty} s^{(d-1)/2} e^{-s} ds = P_t(x). \end{aligned}$$

Teza wynika z twierdzenia Fubiniego. □

Ponieważ $P_t(x) = t^d P_1(tx)$, $P_t(x) \geqslant 0$ oraz $\int_{\mathbb{R}^d} P_t(x)dx = \hat{P}_t(0) = 1$, jądro Poissona jest jednością aproksymatywną (gdy $t \to 0^+$). Stąd natychmiast wynika zbieżność $f * P_t$ do f w $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ gdy $t \to 0^+$ dla wszystkich $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ i dla każdego $p \in [1, \infty)$.

Ćwiczenie 9.8. Niech $\tilde{P}_t(x) = \frac{1}{\pi} x/(t^2 + x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$ (jest to *sprzężone jądro Poissona*). Zauważ, że $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, ale $f \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Udowodnij, że $\mathscr{F}\tilde{P}_t(\xi) = (-i \operatorname{sign} \xi) e^{-t|\xi|}$.

Ćwiczenie 9.9. Wykonaj analogiczny rachunek w $\mathbb{R}^d$ dla $\tilde{P}_{j,t}(x) = (x_j/t) P_t(x)$, gdzie $1 \leqslant j \leqslant d$ oraz P_t jest jądrem Poissona w $\mathbb{R}^d$.

W podobny sposób wyznacza się transformatę Fouriera tzw. jądra potencjału Riesza. Wynik ten można rozszerzyć do $\alpha \in (0, d)$ przy odpowiedniej interpretacji transformaty Fouriera.

Lemat 9.10. Transformatą Fouriera funkcji $f(x) = |x|^{-d+\alpha}$ dla $\alpha \in (0, \frac{d}{2})$ jest $c_\alpha |\xi|^{-\alpha}$ dla pewnej stałej $C_\alpha > 0$.

Dowód. Ponieważ $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) + \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, transformata f jest poprawnie określona i należy do $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) + \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ponadto $r^d f(rx) = r^\alpha f(x)$, zatem $\tilde{\mathscr{F}} f(\xi/r) = r^\alpha \tilde{\mathscr{F}} f(\xi)$. Ponieważ $f(x)$ jest funkcją $|x|$, również $\tilde{\mathscr{F}} f(\xi)$ jest funkcją $|\xi|$. Ostatecznie $\tilde{\mathscr{F}} f(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \tilde{\mathscr{F}} f(\xi/|\xi|)$ dla $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ oraz $\tilde{\mathscr{F}} f(\xi/|\xi|)$ nie zależy od $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. □

Ćwiczenie 9.11. Uzasadnij, że funkcja f z lematu 9.10 spełnia

$$f(x) = \frac{2^\alpha \pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d-\alpha}{2})} \int_0^\infty r^{-1+\alpha/2} K_r(x) dr.$$

Wynacz stałą C_α z tego lematu.

Wszystkie rozważane powyżej metody odwracania transformaty Fouriera, które są zbieżne w $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, są również zbieżne w $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in [1, 2]$ oraz prawie wszędzie. Pierwsze stwierdzenie wynika łatwo z własności splotu i dwóch wzorów na odwracanie: w $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Drugie stwierdzenie jest konsekwencją następującego wyniku.

Twierdzenie 9.12 (dowód w rozdziale 13). Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, zaś $\varphi_r(x)$ jest jednością aproksymatywną taką, jak w lemacie 8.12, to $f * \varphi_r$ dążą do f prawie wszędzie gdy $r \to 0^+$.

W dalszej części tego rozdziału zajmiemy się związkami pomiędzy regularnością i szybkością zaniku f i analogicznymi własnościami $\hat{f}$.

Definicja 9.13. Mówimy, że funkcja f jest *szybko malejąca*, jeśli $(1+|x|^2)^n f(x)$ jest funkcją ograniczoną dla każdego $n \geqslant 0$. Mówimy, że funkcja f jest *klasy Schwartza*, jeśli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ oraz f i wszystkie jej pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) są szybko malejące. Klasę funkcji Schwartza oznaczamy symbolem $\mathscr{S}$.

Twierdzenie 9.14. Jeśli $f \in \mathscr{S}$, to $\hat{f} \in \mathscr{S}$.

Dowód. Niech $Af = f - \Delta f = f - (\partial_1^2 + \partial_2^2 f + \ldots + \partial_d^2 f)$. Z definicji klasy Schwartza wynika, że $Af \in \mathscr{S}$, ponadto transformatą Fouriera Af jest $(1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_d^2)\hat{f}(\xi)$, a więc $(1+|\xi|^2)\hat{f}(\xi)$

jest funkcją ograniczoną. Przez indukcję dowodzimy, że $(1+|\xi|^2)^n \hat{f}(\xi)$ jest ograniczona dla dowolnego $n \geqslant 0$, a więc $\hat{f}$ jest szybko malejąca.

Również z definicji klasy Schwartza wynika, że $\xi_j f(\xi)$ jest funkcją klasy Schwartza, a więc $\partial_j \hat{f}$ istnieje i jest szybko malejąca. Przez indukcję dowodzi się, że wszystkie pochodne cząstkowe $\hat{f}$ istnieją i są szybko malejące, co kończy dowód. □

Ponieważ $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}$, klasa Schwartza jest gęstym podzbiorem $C_0(\mathbb{R}^d)$ oraz $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in [1, \infty)$. Ponadto jądro Gaussa–Weierstrassa K_r składa się z funkcji z klasy Schwartza. Łatwo sprawdzić, że $f * g \in \mathcal{S}$ jeśli $f \in \mathcal{S}$ i g jest szybko malejąca. Podobnie $f \cdot g \in \mathcal{S}$ jeśli $f \in \mathcal{S}$ i $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ma wszystkie pochodne cząstkowe ograniczone. W szczególności zatem $(f * K_r) \cdot \hat{K}_q$ oraz $(f \cdot \hat{K}_q) * K_r$ są funkcjami klasy Schwartza dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) + \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Często wygodnie jest dowodzić wpierw twierdzeń dla funkcji z $\mathcal{S}$, a następnie uogólniać je do np. $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, wykorzystując ciągłość.

Definicja 9.15. Dla $s \in [0, \infty)$ określamy *przestrzeń Sobolewa* $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ jako zbiór funkcji $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ takich, że $(1+|\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F} f(\xi)$ jest w $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Na $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ określamy *normę Sobolewa*

$$\|f\|_{\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\mathscr{F} f(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} .$$

Tak, jak w przypadku $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ w przestrzeni $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ utożsamiamy funkcje równe prawie wszędzie.

Lemat 9.16. Przypuśćmy, że $p \in [1, \infty)$, $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $Q \geqslant 1$, w jest ciągłą, nieujemną funkcją o własności $w(x+y) \leqslant Q(w(x)+w(y))$ dla $x, y \in \mathbb{R}^d$ oraz $f \cdot w \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Przypuśćmy ponadto, że φ_r jest jednością aproksymatywną, która dodatkowo spełnia warunek

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \varepsilon_r)} |\varphi_r(x)| w(x) dx < \varepsilon_r$$

(gdzie $\varepsilon_r \longrightarrow 0$ gdy $r \longrightarrow 0^+$ jest takie, jak w definicji jedności aproksymatywnej). Wówczas $w \cdot (f * \varphi_r)$ dąży do $w \cdot f$ w $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

Dowód. Zachodzi

$$\|w \cdot (f * \varphi_r) - w \cdot f\|_p \leqslant \|w \cdot (f * \varphi_r) - (w \cdot f) * \varphi_r\|_p + \|(w \cdot f) * \varphi_r - w \cdot f\|_p.$$

Ponieważ $w \cdot f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$, drugi składnik po prawej stronie dąży do zera gdy $r \longrightarrow 0^+$. Ponadto na mocy lematu 6.16,

$$\begin{aligned}
&\|w \cdot (f * \varphi_r) - (w \cdot f) * \varphi_r\|_p \\
&\quad = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (w(x) - w(x-y)) f(x-y) |\varphi_r(y)| dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&\quad \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |(w(x) - w(x-y)) f(x-y)|^p dx \right)^{1/p} |\varphi_r(y)| dy \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |w(z+y) - w(z)|^p |f(z)|^p dz \right)^{1/p} |\varphi_r(y)| dy.
\end{aligned}$$

Wobec nierówności $0 \leqslant w(z+y) \leqslant Q(w(z)+w(y))$, zachodzi

$$|w(z+y)-w(z)|^p \leqslant Q^p(w(z)+w(y))^p \leqslant (2Q)^p((w(z))^p+(w(y))^p).$$

Zatem funkcja

$$g(y)=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|w(z+y)-w(z)|^p|f(z)|^p dz\right)^{1/p}$$

jest ograniczona przez $2Q(\|w\cdot f\|_p + w(y)\|f\|_p)$ i ciągła (na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej). Ponadto $g(0)=0$. Ustalmy $\varepsilon>0$. Zachodzi zatem

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g(y)|\varphi_r(y)|dy &\leqslant \sup\{g(y) : y\in B(0,\varepsilon_r)\}\int_{B(0,\varepsilon_r)}|\varphi_r(y)|dy \\ &\quad + 2Q\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\varepsilon_r)}(\|w\cdot f\|_p + w(y)\|f\|_p)|\varphi_r(y)|dy \\ &\leqslant \varepsilon_r \sup\{g(y) : y\in B(0,\varepsilon_r)\} + 2Q\varepsilon_r(\|w\cdot f\|_p+\|f\|_p).\end{aligned}$$

Gdy $r\to 0^+$, prawa strona dąży do zera. □

LEMAT 9.17. Jeśli $s\in[0,\infty)$ oraz $f\in\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$, zaś K_r jest jądrem Gaussa–Weierstrassa, to $f * K_r$ oraz $f\cdot \hat{K}_r$ dążą do f w $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ gdy $r\to 0^+$.

Dowód. Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej,

$$\|f*K_r - f\|^2_{\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|\mathscr{F}f(\xi)|^2(1-\hat{K}_\xi(\xi))^2 d\xi \to 0$$

gdy $r\to 0^+$. To dowodzi pierwszej części. Niech $w(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}$ oraz $g(\xi)=\mathscr{F}f(\xi)$. Ponieważ $\mathscr{F}(f\cdot\hat{K}_r)=g*K_r$, z poprzedniego lematu otrzymujemy zbieżność

$$\|f\hat{K}_r - f\|_{\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \|w\cdot\mathscr{F}(f\hat{K}_r) - w\cdot\mathscr{F}f\|_2 = \|w\cdot(g*K_r)-w\cdot g\|_2$$

do zera gdy $r\to 0^+$. □

LEMAT 9.18. Klasa Schwartza $\mathscr{S}$ jest gęstym podzbiorem $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ dla każdego $s\in[0,\infty)$. Co więcej, dla każdych $s,t\in[0,\infty)$ oraz dla każdej funkcji $f\in\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ takiej, że $\mathscr{F}f\in\mathscr{H}^t(\mathbb{R}^d)$ istnieje ciąg $f_n\in\mathscr{S}$ taki, że $f_n\to f$ w $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ oraz $\mathscr{F}f_n\to\mathscr{F}f$ w $\mathscr{H}^t(\mathbb{R}^d)$.

Dowód. Oczywiście funkcje klasy Schwartza (oraz ich transformaty Fouriera) należą do $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ dla każdego $s\in[0,\infty)$. Gęstość $\mathscr{S}$ w $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ wynika z drugiej części lematu, zastosowanej dla $t=0$.

Jeśli f spełnia warunki lematu i $r>0$, to niech $f_{q,r}=(f\cdot\hat{K}_q)*K_r$, gdzie K_r jest jądrem Gaussa–Weierstrassa. Zauważmy, że $\mathscr{F}f_{q,r}=((\mathscr{F}f)*K_q)\cdot\hat{K}_r$. Wiemy już, że $f_{q,r}\in\mathscr{S}$. Na mocy poprzedniego lematu,

$$\lim_{r\to 0^+}\|f_{q,r}-f\cdot\hat{K}_q\|_{\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)}=0, \qquad \lim_{r\to 0^+}\|\mathscr{F}f_{q,r}-(\mathscr{F}f)*K_q\|_{\mathscr{H}^t(\mathbb{R}^d)}=0.$$

Ponadto, znów na mocy poprzedniego lematu,

$$\lim_{q\to 0^+}\|f\cdot\hat{K}_q - f\|_{\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)}=0, \qquad \lim_{r\to 0^+}\|(\mathscr{F}f)*K_q-\mathscr{F}f\|_{\mathscr{H}^t(\mathbb{R}^d)}=0.$$

Stosując metodę przekątniową, znajdujemy szukany ciąg $f_n=f_{q_n,r_n}$. □

Dla informacji przytoczmy jeden z najważniejszych wyników dotyczących przestrzeni Sobolewa. Wynika z niego, że szybkość zaniku $\hat{f}$ w nieskończoności oznacza odpowiednią całkowalność i regularność f. Warto podkreślić, że jest wiele rozmaitych uogólnień tego twierdzenia.

Twierdzenie 9.19 (zanurzenie Sobolewa; bez dowodu).
(a) Niech $s \in [0, \infty)$ i $p \in [2, \infty]$ będą takie, że $\frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{s}{d}$. Wówczas $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ jest podzbiorem $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$, a odpowiednia norma Sobolewa jest słabsza od normy $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$.
(b) Niech $s \in [0, \infty)$, $n \geqslant 0$ oraz $\alpha \in (0, 1]$ będą takie, że $s - n - \alpha \geqslant \frac{d}{2}$. Wówczas $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^d)$ jest podzbiorem $C^{n,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, tj. klasy funkcji, których wszystkie pochodne cząstkowe rzędu nie większego od n spełniają warunek Höldera z wykładnikiem α. □

Wykorzystując lemat 9.18, udowodnimy matematyczne sformułowanie słynnej zasady nieoznaczoności Heisenberga.

Twierdzenie 9.20 (zasada nieoznaczoności). Jeśli $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, to

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |\mathscr{F} f(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \geqslant \tfrac{d}{2} \, \|f\|_2^2.$$

W szczególności jeśli f ma pierwsze pochodne cząstkowe oraz $f, x_j f, \partial_j f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dla wszystkich $j = 1, \ldots, d$, to

$$\|xf\|_2 \|\nabla f\|_2 \geqslant \tfrac{d}{2} \, \|f\|_2^2;$$

tutaj norma funkcji wektorowej to norma euklidesowa wektora norm współrzędnych.

Dowód. Niech $f \in \mathscr{S}$. Na mocy wzoru na całkowanie przez części,

$$\begin{aligned} d\|f\|_2^2 = \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{f(x)} dx &= -\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} x_j (\overline{f(x)} \partial_j f(x) + f(x) \partial_j \overline{f}(x)) dx \\ &\leqslant 2 \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} |x_j| |f(x)| |\partial_j f(x)| dx \end{aligned}$$

Z nierówności Schwarza i tożsamości Plancherela otrzymujemy

$$\begin{aligned} d\|f\|_2^2 &\leqslant 2 \left(\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} |x_j|^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{2}{(2\pi)^{d/2}} \left(\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} |x_j|^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi_j|^2 |\mathscr{F} f(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zatem nierówność zachodzi dla $f \in \mathscr{S}$. Ponadto oczywiście nierówność z twierdzenia zachodzi, gdy jej lewa strona jest nieskończona.

Przypuśćmy, że $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, zaś $|x|^2 |f(x)|^2$ oraz $|\xi|^2 |\mathscr{F} f(\xi)|^2$ są całkowalne. Na mocy lematu 9.18 istnieje ciąg $f_n \in \mathscr{S}$ taki, że $(1+|x|^2)^{1/2} f_n(x)$ dąży do $(1+|x|^2)^{1/2} f(x)$ w $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ oraz $(1+|\xi|^2)^{1/2} \mathscr{F} f_n(\xi)$ dąży do $(1+|\xi|^2)^{1/2} \mathscr{F} f(\xi)$ w $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Nierówność została już udowodniona dla f_n, przejście graniczne daje nierówność dla f. □

ĆWICZENIE 9.21. Dla jakich f zachodzi równość w powyższym twierdzeniu?

Inna wersja zasady nieoznaczoności Heisenberga mówi, że f i $\mathscr{F}f$ nie mogą jednocześnie mieć zwartego nośnika. Udowodnimy nawet więcej.

TWIERDZENIE 9.22 (twierdzenie Paley–Wienera). Jeśli $R > 0$, $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ oraz $f(x) = 0$ gdy $|x| > R$, to $\hat{f}$ rozszerza się do funkcji holomorficznej na $\mathbb{C}^d$ oraz

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant e^{R|\operatorname{Im}\xi|}\|f\|_1$$

dla $\xi \in \mathbb{C}^d$. Przeciwnie, jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i $\hat{f}$ rozszerza się do funkcji holomorficznej na $\mathbb{C}^d$, która spełnia

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant ce^{R|\operatorname{Im}\xi|},$$

to $f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$, które spełniają $|x| > R$.

Dowód. Funkcja

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x} f(x)dx = \int_{B(0,R)} e^{-(\operatorname{Im}\xi)\cdot x} e^{i(\operatorname{Re}\xi)\cdot x} f(x)dx$$

jest poprawnie określona dla $\xi \in \mathbb{C}^d$ i, z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, holomorficzna. Ponadto

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{B(0,R)} e^{-(\operatorname{Im}\xi)\cdot x}|f(x)|dx \leqslant e^{R|\operatorname{Im}\xi|}\|f\|_1.$$

Dowód przeciwnej implikacji wykorzystuje wzór na transformatę odwrotną: gdy $|x| > R/(1-\varepsilon)$ oraz $\eta = \frac{\varepsilon x}{r}$, to

$$\begin{aligned}
|f * K_r(x)| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-r(\xi+i\eta)\cdot(\xi+i\eta)}\hat{f}(\xi+i\eta)e^{i(\xi+i\eta)\cdot x}d\xi\right| \\
&\leqslant \frac{c}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-r|\xi|^2+r|\eta|^2}e^{R|\eta|}e^{-\eta\cdot x}d\xi \\
&= \frac{c}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-r|\xi|^2+(\varepsilon^2/r)|x|^2}e^{(\varepsilon R/r)|x|}e^{-(\varepsilon/r)|x|^2}d\xi \\
&= \frac{2^{d/2}c}{\pi^{d/2}}\, r^{-d/2}e^{-\varepsilon|x|((1-\varepsilon)|x|-R)/r} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

gdy $r \to 0^+$; szczegóły pomijamy. □

Znane są rozmaite warianty powyższego twierdzenia; jeden z najważniejszych dotyczy funkcji na półprostej.

TWIERDZENIE 9.23 (twierdzenie Paley–Wienera; bez dowodu). Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ oraz $f(x) = 0$ gdy $x < 0$, to $\hat{f}$ rozszerza się do ograniczonej funkcji holomorficznej w dolnej półpłaszczyźnie $\{\xi \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\xi < 0\}$, ciągłej na brzegu. Przeciwnie, gdy takie rozszerzenie $\hat{f}$ istnieje, to $f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x < 0$. □

WNIOSEK 9.24. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ma nośnik zwarty, to zbiór miejsc zerowych funkcji $\hat{f}$ w $\mathbb{R}^d$ ma puste wnętrze. W szczególności $\hat{f}$ nie może mieć zwartego nośnika.

Dowód. Przypuśćmy, że $\hat{f}(\xi) = 0$ dla ξ z pewnej (być może nieograniczonej) kostki $I_1 \times \ldots \times I_d$. Wówczas dla ustalonych $\xi_j \in I_j$, $j = 2, \ldots, d$, funkcja $f(\xi)$ zmiennej ξ_1 jest holomorficzna na $\mathbb{C}$ i zbiór jej miejsc zerowych ma punkt skupienia. Wobec tego jest ona stale równa zero. Można zatem I_1 zastąpić przez $\mathbb{R}$. Powtarzając to rozumowanie d razy, uzyskujemy równość $\hat{f}(\xi) = 0$ dla ξ z kostki $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$. $\square$

10. **Transformata Fouriera na grupach**

Teorię szeregów i transformaty Fouriera można dalej uogólniać w rozmaity sposób. W poniższym rozdziale bardzo skrótowo przedstawimy ogólne idee dotyczące grup topologicznych.

DEFINICJA 10.1. Zbiór G z działaniem i topologią nazywamy *grupą topologiczną*, jeśli G jest grupą, topologia rozdziela punkty, a działanie jest ciągłe, tj. funkcja $f(x, y) = x - y$ jest ciągła z $G \times G$ (z topologią produktową) do G. Grupę topologiczną nazywamy:

- *lokalnie zwartą*, jeśli pewne otoczenie 0 ma zwarte domknięcie;
- *zwartą*, jeśli G jest przestrzenią zwartą;
- *dyskretną*, jeśli G jest przestrzenią dyskretną (tj. wszystkie podzbiory G są otwarte).

Będziemy się zajmować wyłącznie grupami przemiennymi. Przykłady przemiennych grup lokalnie zwartych to:

- $\mathbb{R}$ (z dodawaniem) i ogólniej $\mathbb{R}^d$;
- $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ (z dodawaniem modulo 2π) i ogólniej $\mathbb{T}^d$;
- $\mathbb{Z}$ (z dodawaniem) i ogólniej $\mathbb{Z}^d$;
- $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ (z dodawaniem modulo p).

Kolejne dwa przykłady zawarte są w następujących ćwiczeniach.

ĆWICZENIE 10.2. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dla $x \in \mathbb{Q}$ niech $|x|_p = p^{-n}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$ ma następującą własność: licznik i mianownik liczby $p^{-n}x$ (zapisanej w postaci nieskracalnej) nie dzielą się przez p. Przyjmujemy ponadto $|0|_p = 0$. Udowodnij, że $d_p(x, y) = |x-y|_p$ jest metryką na $\mathbb{Q}$, w której działania dodawania i mnożenia są ciągłe.

ĆWICZENIE 10.3. Zbiór *liczb p-adycznych* $\mathbb{Q}_p$ to uzupełnienie przestrzeni metrycznej $\mathbb{Q}$ z metryką d_p. Udowodnij, że elementy $\mathbb{Q}_p$ można w naturalny sposób utożsamić z *formalnymi* szeregami $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p^n$, w których $a_n \in \{0, 1, ..., p-1\}$ oraz $a_n = 0$ dla dostatecznie *małych n*. Wykaż ponadto, że działania dodawania i mnożenia są zgodne z naturalnymi definicjami, tj. dodawanie odbywa się z przeniesieniem po współrzędnych, zaś mnożenie jest iloczynem Cauchy'ego szeregów z przeniesieniem. Wywnioskuj, że $\mathbb{Q}_p$ jest grupą lokalnie zwartą, a także ciałem liczbowym (z wyżej opisanymi definicjami dodawania i mnożenia).

ĆWICZENIE 10.4. Zbiór *całkowitych liczb p-adycznych* $\mathbb{Q}_p^*$ (zwany często *odometrem*) to analogiczne uzupełnienie zbioru $\mathbb{Z}$ w metryce d_p, czyli równoważnie — domknięcie zbioru $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}_p$. Wykaż, że $\mathbb{Q}_p^*$ jest zwartą grupą topologiczną.

Wśród podanych przykładów zwartymi grupami są $\mathbb{T}^d$, $\mathbb{Z}_p$ i $\mathbb{Q}_p^*$, zaś dyskretnymi — $\mathbb{Z}^d$ i $\mathbb{Z}_p$. Odtąd G oznacza przemienną grupą lokalnie zwartą.

ĆWICZENIE 10.5. Niech D będzie dowolnym symetrycznym otoczeniem 0 o zwartym domknięciu, zaś G' najmniejszą domkniętą podgrupą G zawierającą D. Udowodnij, że jeśli $D_1 = D$, $D_{n+1} = D + D_n = \{x + y : x \in D, y \in D_n\}$, to $G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, wobec czego G' jest zbiorem otwarto-domkniętym, σ-zwartym (tj. będącym sumą przeliczalnie wielu zbiorów zwartych).

Twierdzenie 10.6 (A. Weil; bez dowodu). Istnieje *miara Haara* na G: nieujemna miara borelowska μ na G taka, że $\mu(K) < \infty$ dla dowolnego zwartego $K \subseteq G$, $\mu(K) > 0$ dla pewnego (równoważnie: dowolnego) K o niepustym wnętrzu oraz $\mu(x + E) = \mu(E)$ dla dowolnego $x \in G$ i wszystkich borelowskich $E \subseteq G$. Ponadto miara μ jest wyznacznona jednoznacznie, z dokładnością do przemnożenia przez czynnik stały. □

Ćwiczenie 10.7. Wskaż miary Haara na $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}^d$, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ i $\mathbb{Q}_p^*$.

Ćwiczenie 10.8. Udowodnij, że miara Haara jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy G jest zwarta.

Ćwiczenie 10.9. Udowodnij, że miara Haara jest σ-skończona (tj. jest sumą przeliczalnie wielu miar skończonych) wtedy i tylko wtedy, gdy G jest σ-zwarta (tj. jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów zwartych).

Ćwiczenie 10.10. Udowodnij, że miara Haara jest symetryczna, tj. $\mu(E) = \mu(-E)$ dla wszystkich borelowskich E.

W szeregach Fouriera kluczową rolę odgrywały funkcje e^{inx}, w transformacie Fouriera — funkcje $e^{i\xi \cdot x}$. W przypadku przemiennych grup lokalnie zwartych tę funkcję pełnią tzw. charaktery.

Definicja 10.11. Dowolny ciągły homomorfizm $\varphi : G \to \mathbb{T}$ nazywamy *charakterem* na G. Zbiór wszystkich charakterów oznaczamy $\hat{G}$ i nazywamy *grupą dualną do* G lub *grupą charakterów na* G. Ponadto na $\hat{G}$ określamy topologię zbieżności jednostajnej na zwartych podzbiorach G (tj. bazą topologii są zbiory $U(K, \varepsilon, \varphi_0) = \{\varphi \in \hat{G} : |\varphi(x) - \varphi_0(x)| < \varepsilon \text{ dla } x \in K\}$) oraz działanie $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$.

Bardzo często charakterem nazywa się funkcje postaci $e^{i\varphi(x)}$, gdzie φ jest charakterem w rozumieniu powyższej definicji.

Ćwiczenie 10.12. Udowodnij, że $\hat{G}$ jest grupą topologiczną.

Ćwiczenie 10.13. Niech $D \subseteq G$ będzie otoczeniem 0 i $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, oraz niech $\hat{K} = \{\varphi \in \hat{G} : \varphi(x) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \text{ dla } x \in D\}$ (utożsamiamy $\mathbb{T}$ z przedziałem $[-\pi, \pi)$). Uzasadnij, że dla $n \geqslant 1$ istnieje otoczenie zera D_n o zwartym domknięciu i takie, że $D_n + D_n + \ldots + D_n \subseteq D$ (n składników po lewej stronie). Dowiedź, że $|\varphi(x)| \in [-\frac{\varepsilon}{n}, \frac{\varepsilon}{n}]$ dla $x \in D_n$ oraz $\varphi \in \hat{K}$. Wywnioskuj, że funkcje z $\hat{K}$ są jednakowo ciągłe i wobec tego $\hat{K}$ jest zwarty na mocy twierdzenia Arzeli–Ascoliego. Wywnioskuj, że grupa $\hat{G}$ jest lokalnie zwarta.

Ćwiczenie 10.14. Niech $x \in G$ oraz $\psi_x : \hat{G} \to \mathbb{T}$, $\psi_x(\varphi) = \varphi(x)$. Udowodnij, ψ_x jest charakterem na $\hat{G}$.

Ćwiczenie 10.15. Udowodnij, że jeśli G jest zwarta, to funkcje $e^{i\psi(x)}$, gdzie $\psi \in \hat{G}$, są wzajemnie ortogonalne względem miary Haara. Wywnioskuj, że w tej sytuacji $\hat{G}$ jest grupą dyskretną.

We wszystkich przykładach podanych powyżej grupę dualną stosunkowo łatwo wyznaczyć. Potrzebne są do tego pewne proste fakty topologiczne. W poniższych ćwiczeniach $\mathbb{T}$ jest przedziałem $[0, 2\pi)$ z topologią utożsamiającą 0 i 2π. (W nawiasach będziemy podawać sformułowania dla $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, tj. gdy $\mathbb{T}$ jest rodziną warstw podgrupy $2\pi\mathbb{Z}$ grupy $\mathbb{R}$).

Ćwiczenie 10.16. Udowodnij, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ jest ciągła, to istnieje ciągła funkcja $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x)$ przystaje do $\tilde{f}(x)$ modulo 2π (tzn. $f(x) = \tilde{f}(x) + 2\pi\mathbb{Z}$). Wykaż, że funkcja $\tilde{f}$ jest wyznaczona jednoznacznie, jeśli zażądamy, by $f(0) \in [0, 2\pi)$. Przy tym założeniu udowodnij (rozważając funkcję $\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)$), że jeśli f jest homomorfizmem, to również $\tilde{f}$ jest homomorfizmem.

Ćwiczenie 10.17. Udowodnij, że wszystkie charaktery na $\mathbb{R}$ są postaci $\varphi_\xi(x) = \xi x \pmod{2\pi}$ (tzn. $\varphi_\xi(x) = \xi x + 2\pi\mathbb{Z}$) dla pewnego $\xi \in \mathbb{R}$. Wywnioskuj, że $\hat{\mathbb{R}}$ jest izomorficzna z $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie 10.18. Udowodnij, że wszystkie charaktery na $\mathbb{T}$ są postaci $\varphi_n(x) = nx \pmod{2\pi}$ (tzn. $\varphi_\xi(x + 2\pi\mathbb{Z}) = nx + 2\pi\mathbb{Z}$) dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$. Wywnioskuj, że $\hat{\mathbb{T}}$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$.

Ćwiczenie 10.19. Zauważ, że wszystkie charaktery na $\mathbb{Z}$ są postaci $\varphi_\xi(k) = \xi k \pmod{2\pi}$ (tzn. $\varphi_\xi(k) = \xi k + 2\pi\mathbb{Z}$) dla pewnego $\xi \in [0, 2\pi)$. Wywnioskuj, że $\hat{\mathbb{Z}}$ jest izomorficzna z $\mathbb{T}$.

Ćwiczenie 10.20. Zauważ, że wszystkie charaktery na $\mathbb{Z}_p$ są postaci $\varphi_n(k) = nk \pmod{p}$ (tzn. $\varphi_n(k) = nk + p\mathbb{Z}$) dla pewnego $n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Wywnioskuj, że $\hat{\mathbb{Z}}_p$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_p$.

Ćwiczenie 10.21. Udowodnij, że grupa dualna do G^d jest kanonicznie izomorficzna z $\hat{G}^d$.

Ćwiczenie 10.22. Opisz grupy dualne do $\mathbb{Q}_p$ i $\mathbb{Q}_p^*$.

Wymienione wyżej wyniki sugerują, że grupa dualna do grupy dualnej do G jest izomorficzna do G. Mówi o tym twierdzenie Pontriagina.

Twierdzenie 10.23 (twierdzenie Pontriagina; bez dowodu).
(a) Charaktery rozdzielają punkty: dla każdego $x \in G$ istnieje $\varphi \in \hat{G}$ taki, że $\varphi(x) \neq 0$.
(b) Grupa dualna do $\hat{G}$ jest kanonicznie izomorficzna z G przez przyporządkowanie elementowi $x \in G$ charakteru $\psi_x(\varphi) = \varphi(x)$ na $\hat{G}$.
(c) Grupa G jest dyskretna wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{G}$ jest zwarta. Grupa G jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{G}$ jest dyskretna.

Zauważmy, że w przypadku $\mathbb{R}^d$ i kilku innych przykładów grup lokalnie zwartych twierdzenie Pontriagina zostało udowodnione w ćwiczeniach poprzedzających sformułowanie twierdzenia. Najtrudniejszą częścią dowodu w ogólnym przypadku jest istnienie dostatecznie wielu charakterów, tj. pierwszy punkt twierdzenia.

Za pomocą charakterów określa się transformatę Fouriera na G. W dalszej części ustalamy pewną miarę Haara na G i oznaczamy ją symbolem μ. Analogicznie ustalamy pewną miarę Haara na $\hat{G}$ i oznaczamy ją symbolem ν.

Definicja 10.24. Dla $f \in \mathscr{L}^1(G)$ (tj. f całkowalnych względem μ) określamy *transformatę Fouriera* funkcji f wzorem

$$\hat{f}(\varphi) = \int_G f(x) e^{-i\varphi(x)} \mu(dx).$$

Przekształcenie Fouriera lub *transformacja Fouriera* to przyporządkowanie funkcji $f \in \mathscr{L}^1(G)$ jej transformaty Fouriera $\hat{f}$.

Ćwiczenie 10.25. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(G)$, to $\hat{f} \in C(\hat{G})$.

Ćwiczenie 10.26. Niech $f \in \mathscr{L}^1(G)$ i niech $\tau_x(f)(y) = f(x+y)$. Udowodnij (wykorzystując gęstość $C_c(G)$ w $\mathscr{L}^1(G)$), że $\|\tau_x f - f\|_1 \to 0$ gdy $x \to 0$ w G.

Ćwiczenie 10.27. Udowodnij *lemat Riemanna–Lebesgue'a*: jeśli $f \in \mathscr{L}^1(G)$, to $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$ (tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $\hat{K} \subseteq \hat{G}$ taki, że $|\hat{f}(\varphi)| < \varepsilon$ gdy $\varphi \in \hat{G} \setminus \hat{K}$). W tym celu rozważ otoczenie zera $D_\varepsilon \subseteq G$ dla którego $\|\tau_x f - f\|_1 < \varepsilon$.

Transformacja Fouriera na G ma wiele własności znanych z teorii szeregów Fouriera i transformaty Fouriera na $\mathbb{R}^d$.

Twierdzenie 10.28 (bez dowodu).

(a) Transformacja Fouriera jest operatorem różnowartościowym z $\mathscr{L}^1(G)$ w $C_0(\hat{G})$.

(b) Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(G) \cap \mathscr{L}^2(G)$, to $\hat{f} \in \mathscr{L}^2(\hat{G})$ i ponadto $\|\hat{f}\|_2 = C\|f\|_2$ dla pewnej stałej C. W szczególności przekształcenie Fouriera rozszerza się do operatora $\mathscr{F}$ unitarnego (z dokładnością do czynnika C) z $\mathscr{L}^2(G)$ w $\mathscr{L}^2(\hat{G})$.

(c) Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(G)$ oraz $\hat{f} \in \mathscr{L}^1(\hat{G})$, to dla $x \in G$ zachodzi wzór

$$f(x) = \frac{1}{C^2} \int_{\hat{G}} \hat{f}(x) e^{i\varphi(x)} \nu(d\varphi),$$

definiujący *odwrotne przekształcenie Fouriera.* □

Na zakończenie zauważmy, że definicja i własności splotu funkcji uogólniają się w prosty sposób na przemienne grupy lokalnie zwarte.

Definicja 10.29. Określamy *splot* $f * g$ funkcji f, g wzorem

$$f * g(x) = \int_G f(y) g(x-y) \mu(dy)$$

dla tych $x \in G$, dla których całka jest zbieżna.

Ćwiczenie 10.30. Udowodnij, że jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(G)$, to splot $f * g(x)$ jest poprawnie określony dla prawie wszystkich $x \in G$ i wówczas $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

Ćwiczenie 10.31. Zauważ, że jeśli $f, g \in \mathscr{L}^2(G)$ lub $f \in \mathscr{L}^1(G)$ i $g \in \mathscr{L}^\infty(G)$, to splot $f * g(x)$ jest poprawnie określony dla wszystkich $x \in G$ i $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$ albo $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Ćwiczenie 10.32. Zauważ, że splot jest przemienny i łączny.

Ćwiczenie 10.33. Udowodnij, że jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(G)$, to transformatą Fouriera $f * g$ jest $\hat{f}(\varphi)\hat{g}(\varphi)$.

11. **Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza**

Niech X będzie przestrzenią miarową z miarą μ. Przypomnijmy, że $\mathscr{L}^p(X)$ oznacza zbiór wszystkich (klas równoważności) funkcji f, dla których $\|f\|_p < \infty$, gdzie

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p}$$

gdy $p \in [1, \infty)$ oraz $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|$. Analogiczne definicje wprowadza się również dla $p \in (0, 1)$, lecz wtedy otrzymuje się przestrzenie, które nie są przestrzeniami Banacha.

Przez $\mathbb{1}_\varphi$ oznaczmy funkcję równą 1 gdy φ jest prawdziwe, 0 gdy φ jest fałszywe. W tym rozdziale stosujemy oznaczenie

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}).$$

Z twierdzenia Fubiniego wynika, że dla $p \in (0, \infty)$,

$$\|f\|_p^p = \int_X \int_0^\infty \mathbb{1}_{|f(x)|^p > s} ds \mu(dx) = \int_0^\infty \mu_f(s^{1/p}) ds = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda. \tag{11.1}$$

Widzimy więc, że $f \in \mathscr{L}^p(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda^p \mu_f(\lambda)$ jest całkowalna na $(0, \infty)$ względem miary $\lambda^{-1} d\lambda$. Ponadto μ_f jest funkcją nierosnącą, a więc

$$\|f\|_p^p \geqslant p \int_0^\Lambda \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda \geqslant \Lambda^p \mu_f(\Lambda)$$

dla każdego $\Lambda > 0$.

Definicja 11.1. Mówimy, że f należy do *słabego* $\mathscr{L}^p$ ($p \in (0, \infty)$), jeśli $t^p \mu_f(t)$ należy do $\mathscr{L}^\infty(0, \infty)$. Piszemy wówczas $f \in \mathscr{L}^{p,\infty}(X)$. Określamy ponadto *kwazinormę*

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup\{\lambda(\mu_f(\lambda))^{1/p} : \lambda > 0\}.$$

Ponadto definiujemy $\mathscr{L}^{\infty,\infty}(X) = \mathscr{L}^\infty(X)$ i $\|f\|_{\infty,\infty} = \|f\|_\infty$.

Ogólniej definiuje się *przestrzenie Lorentza* $\mathscr{L}^{p,q}(X)$ jako przestrzeń tych (klas równoważności) funkcji f, dla których $p^{1/q}\lambda(\mu_f(\lambda))^{1/p}$ należy do przestrzeni $\mathscr{L}^q((0, \infty))$, gdzie na $(0, \infty)$ rozpatrujemy miarę $\lambda^{-1} d\lambda$; zatem $\mathscr{L}^p(X) = \mathscr{L}^{p,p}(X)$. Nie będziemy jednak wykorzystywać przestrzeni innych niż $\mathscr{L}^p(X)$ i $\mathscr{L}^{p,\infty}(X)$.

Oczywiście $\mathscr{L}^{p,\infty}(X)$ zawiera $\mathscr{L}^p(X)$ oraz $\|f\|_{p,\infty} \leqslant \|f\|_p$. Funkcja $\|\cdot\|_{p,\infty}$ dla $p \in (0, \infty)$ nie jest normą; spełnia jednak warunek kwazinormy, tj.

$$\|f + g\|_{p,\infty} \leqslant c(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}),$$

gdzie $c = 2$ dla $p \in [1, \infty)$ oraz $x = 2^{1/p}$ dla $p \in (0, 1)$. W istocie,

$$(2t)^p \mu_{f+g}(2t) \leqslant 2^p t^p \mu(\{x : |f(x)| > t\} \cup \{x : |g(x)| > t\}) \tag{11.2}$$

$$\leqslant 2^p(\|f\|_{p,\infty}^p + \|g\|_{p,\infty}^p) \leqslant (2^{\max(1,1/p)}(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}))^p. \tag{11.3}$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia na obcięcia funkcji z góry i z dołu:

$$f_\lambda(x) = f(x)\mathbb{1}_{|f(x)| \leqslant \lambda}, \qquad f^\lambda(x) = f(x)\mathbb{1}_{|f(x)| > \lambda}.$$

Ćwiczenie 11.2. Udowodnij, że jeśli μ nie składa się ze skończenie wielu atomów, to $\mathscr{L}^{p,\infty}(X)$ jest istotnie większe od $\mathscr{L}^p(X)$.

Ćwiczenie 11.3. Udowodnij, że dla $p \in (0, \infty)$ kwazinorma $\|\cdot\|_{p,\infty}$ nie spełnia nierówności trójkąta.

Ćwiczenie 11.4. Udowodnij, że jeśli $0 < p_0 < p < p_1 \leqslant \infty$, to $\mathscr{L}^{p_0,\infty}(X) \cap \mathscr{L}^{p_1,\infty}(X)$ jest podzbiorem $\mathscr{L}^p(X)$.

Ćwiczenie 11.5. Udowodnij, że jeśli $\lambda > 0$, $0 < p_0 < p < p_1 \leqslant \infty$ oraz $f \in \mathscr{L}^{p,\infty}(X)$, to $f_\lambda \in \mathscr{L}^{p_1}(X)$ oraz $f^\lambda \in \mathscr{L}^{p_0}(X)$.

Ćwiczenie 11.6. Udowodnij, że jeśli $p \in (1, \infty)$, to kwazinorma $\|\cdot\|_{p,\infty}$ jest jednostajnie równoważna normie

$$\sup\left\{(\mu(E))^{1/p-1}\int_E |f(x)|\mu(dx) : E \subseteq X,\ \mu(E) \in (0,\infty)\right\},$$

w której $\mathscr{L}^{p,\infty}(X)$ jest przestrzenią Banacha.

W niniejszym rozdziale badamy operatory działające z przestrzeni $\mathscr{L}^p(X)$ w przestrzeń $\mathscr{L}^q(Y)$ lub $\mathscr{L}^{q,w}(Y)$; miarę na przestrzeni miarowej Y oznaczamy przez ν i analogicznie do $\mu_f(\lambda)$ definiujemy $\nu_{Tf}(\lambda)$. Rozważane operatory nie muszą być liniowe, będziemy zakładali *kwaziliniowość*:

$$|T(f+g)(x)| \leqslant Q(|Tf(x)| + |Tg(x)|)$$

dla wszystkich f, g z dziedziny operatora i wszystkich $x \in X$ oraz dla pewnej stałej Q.

Definicja 11.7. Mówimy, że operator T jest *mocnego typu p, q* jeśli $\|Tf\|_q \leqslant A\|f\|_p$ dla wszystkich $f \in \mathscr{L}^p(X)$ z dziedziny T i pewnego A. Najmniejszą liczbę A o tej własności nazywamy normą T i oznaczamy $\|T\|_{p\to q}$.

Mówimy, że T jest *słabego typu p, q*, jeśli $\|Tf\|_{q,\infty} \leqslant A\|f\|_p$ dla wszystkich $f \in \mathscr{L}^p(X)$ z dziedziny T i pewnego A. Najmniejszą liczbę A o tej własności również nazywamy normą T i oznaczamy $\|T\|_{p\to q,\infty}$.

W poniższym twierdzeniu $\mathscr{L}^{p_0}(X)+\mathscr{L}^{p_1}(X)$ oznacza zbiór wszystkich sum funkcji z $\mathscr{L}^{p_0}(X)$ i funkcji z $\mathscr{L}^{p_1}(X)$. W szczególności zbiór ten zawiera $\mathscr{L}^p(X)$ dla wszystkich $p \in (p_0, p_1)$.

Twierdzenie 11.8 (Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza). Przypuśćmy, że $0 < p_0 < p < p_1 \leqslant \infty$, kwaziliniowy operator T jest określony na $\mathscr{L}^{p_0}(X) + \mathscr{L}^{p_1}(X)$ i jest słabego typu p_0, p_0 oraz słabego typu p_1, p_1, z normami A_0 i A_1. Wówczas T jest mocnego typu p, p, z normą co najwyżej $\gamma A_0^\alpha A_1^\beta$, gdzie

$$\alpha = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}, \qquad \beta = \frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}, \qquad \gamma = 2Q\left(\frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right)\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}\right)}\right)^{1/p}.$$

Przyjmujemy tu, że $\frac{1}{\infty} = 0$, zaś Q jest stałą kwaziliniowości T.

Dowód. Przypuśćmy wpierw, że $p_1 < \infty$. Niech $r > 0$. Podstawiając $t = 2rQ\lambda$ w miejsce λ we wzorze (11.1), otrzymujemy

$$\|Tf\|_p^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\nu_{Tf}(t)dt = p(2rQ)^p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu_{Tf}(2rQ\lambda)d\lambda.$$

Szacując tak, jak w (11.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\nu_{Tf}(2rQ\lambda) &= \nu(\{y : |Tf(y)| > 2rQ\lambda\})\\ &\leqslant \nu(\{y : Q(|Tf_\lambda(y)| + |Tf^\lambda(y)|) > 2rQ\lambda\})\\ &\leqslant \nu(\{y : |Tf_\lambda(y)| > r\lambda\}) + \nu(\{y : |Tf^\lambda(y)| > r\lambda\})\\ &= \nu_{Tf_\lambda}(r\lambda) + \nu_{Tf^\lambda}(r\lambda).\end{aligned}$$

Ponadto $f_\lambda \in \mathscr{L}^{p_1}(X)$ oraz $f^\lambda \in \mathscr{L}^{p_0}(X)$, zatem

$$\begin{aligned}\nu_{Tf_\lambda}(r\lambda) &\leqslant (r\lambda)^{-p_1}\|Tf_\lambda\|_{p_1,\infty}^{p_1} \leqslant (r\lambda)^{-p_1}A_1^{p_1}\|f_\lambda\|_{p_1}^{p_1},\\ \nu_{Tf^\lambda}(\lambda) &\leqslant (r\lambda)^{-p_0}\|Tf^\lambda\|_{p_0,\infty}^{p_0} \leqslant (r\lambda)^{-p_0}A_0^{p_0}\|f^\lambda\|_{p_0}^{p_0}.\end{aligned}$$

Prawe strony wyrażamy ponownie za pomocą wzoru (11.1),

$$\begin{aligned}\|f_\lambda\|_{p_1}^{p_1} &= p_1\int_0^\lambda t^{p_1-1}\mu_f(t)dt - p_1\int_0^\lambda t^{p_1-1}\mu_f(\lambda)dt,\\ \|f^\lambda\|_{p_0}^{p_0} &= p_0\int_0^\lambda t^{p_0-1}\mu_f(\lambda)dt + p_0\int_{p_0}^\infty t^{p_0-1}\mu_f(t)dt.\end{aligned}$$

Podsumowując,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &\leqslant p(2rQ)^p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{A_1^{p_1}}{(r\lambda)^{p_1}}\|f_\lambda\|_{p_1}^{p_1} + \frac{A_0^{p_0}}{(r\lambda)^{p_0}}\|f^\lambda\|_{p_0}^{p_0}\right)d\lambda\\ &= \frac{pp_1A_1^{p_1}(2rQ)^p}{r^{p_1}}\int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1}\left(\int_0^\lambda t^{p_1-1}\mu_f(t)dt\right)d\lambda\\ &\quad - \frac{pp_1A_1^{p_1}(2rQ)^p}{r^{p_1}}\int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1}\left(\int_0^\lambda t^{p_1-1}\mu_f(\lambda)dt\right)d\lambda\\ &\quad + \frac{pp_0A_0^{p_0}(2rQ)^p}{r^{p_0}}\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\left(\int_0^\lambda t^{p_0-1}\mu_f(\lambda)dt\right)d\lambda\\ &\quad + \frac{pp_0A_0^{p_0}(2rQ)^p}{r^{p_0}}\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\left(\int_\lambda^\infty t^{p_0-1}\mu_f(t)dt\right)d\lambda.\end{aligned}$$

Zmieniając kolejność całkowania w pierwszej i ostatniej całce, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\|Tf\|_p^p}{(2Q)^p} &\leqslant \frac{pp_1A_1^{p_1}}{(p_1-p)r^{p_1-p}}\int_0^\infty t^{p-1}\mu_f(t)dt - \frac{pA_1^{p_1}}{r^{p_1-p}}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda)d\lambda\\ &\quad + pr^{p-p_0}A_0^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda)d\lambda + \frac{pp_0r^{p-p_0}A_0^{p_0}}{p-p_0}\int_0^\infty t^{p-1}\mu_f(t)dt\\ &= \left(\frac{p_1A_1^{p_1}}{(p_1-p)r^{p_1-p}} - \frac{A_1^{p_1}}{r^{p_1-p}} + r^{p-p_0}A_0^{p_0} + \frac{p_0r^{p-p_0}A_0^{p_0}}{p-p_0}\right)\|f\|_p^p\\ &= \left(\frac{pA_1^{p_1}}{(p_1-p)r^{p_1-p}} + \frac{pr^{p-p_0}A_0^{p_0}}{p-p_0}\right)\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Obierzmy r tak, by $r^{p_1-p_0} = A_1^{p_1}/A_0^{p_0}$. Wówczas

$$\frac{pA_1^{p_1}}{(p_1-p)r^{p_1-p}} + \frac{pr^{p-p_0}A_0^{p_0}}{p-p_0} = \frac{pA_1^{p_1}A_0^{p_0(p_1-p)/(p_1-p_0)}}{(p_1-p)A_1^{p_1(p_1-p)/(p_1-p_0)}} + \frac{pA_0^{p_0}A_1^{p_1(p-p_0)/(p_1-p_0)}}{(p-p_0)A_0^{p_0(p-p_0)/(p_1-p_0)}}$$

$$= pA_0^{p\alpha} A_1^{p\beta} \left(\frac{1}{p_1 - p} + \frac{1}{p - p_0} \right) = A_0^{p\alpha} A_1^{p\beta} \frac{\frac{1}{p}(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})}{(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1})(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})}.$$

Stąd otrzymujemy tezę twierdzenia.

Gdy $p_1 = \infty$ dowód jest nieco prostszy. Jak poprzednio, dla $r > 0$,

$$\|Tf\|_p^p = p(2rQ)^p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu_{Tf}(2rQ\lambda) d\lambda,$$

przy czym

$$\nu_{Tf}(2rQ\lambda) \leqslant \nu_{Tf_\lambda}(r\lambda) + \nu_{Tf^\lambda}(r\lambda).$$

Tym razem $\|Tf_\lambda\|_\infty \leqslant A_1 \|f_\lambda\|_\infty \leqslant A_1 \lambda$, zatem dla $r = A_1$ zachodzi $\nu_{Tf_\lambda}(r\lambda) = 0$. Drugi składnik szacujemy tak, jak poprzednio. Otrzymujemy (jak poprzednio)

$$\|Tf\|_p^p \leqslant p(2rQ)^p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \frac{A_0^{p_0}}{(r\lambda)^{p_0}} \|f^\lambda\|_{p_0}^{p_0} d\lambda = (2Q)^p \frac{pr^{p-p_0} A_0^{p_0}}{p - p_0} \|f\|_p^p.$$

Skoro $r = A_1$, mamy

$$\|Tf\|_p^p \leqslant (2Q)^p A_0^{p_0} A_1^{p-p_0} \frac{p}{p - p_0} \|f\|_p^p = (2Q)^p A_0^{p\alpha} A_1^{p\beta} \frac{\frac{1}{p_0}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}},$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza ma mnóstwo uogólnień, przede wszystkim na operatory słabego typu p_0, q_0 oraz słabego typu p_1, q_1, gdzie $p_0 \leqslant q_0$, $p_1 \leqslant q_1$, $q_0 \neq q_1$: operatory takie są mocnego typu p, q, gdzie

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{q_0} + \frac{\vartheta}{q_1}.$$

Dowód jest bardzo podobny, ale wykorzystuje ucięcia f na poziomie innym niż λ. Inne uogólnienie dotyczy przestrzeni Lorentza. Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza jest wreszcie podstawą rzeczywistej interpolacji między przestrzeniami Banacha.

Ćwiczenie 11.9. Udowodnij, że jeśli $p, q > 0$, $f \in \mathscr{L}^p(X)$, $g \in \mathscr{L}^q(X)$, to $fg \in \mathscr{L}^r(X)$ oraz $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$ dla r takiego, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Udowodnij ponadto, że

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \|fg\|_r : g \in \mathscr{L}^q(X), \|g\|_q = 1 \right\}.$$

Ćwiczenie 11.10. Udowodnij *słabą nierówność Höldera*: jeśli $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathscr{L}^{p,\infty}$, $g \in \mathscr{L}^{q,\infty}$, to

$$\|fg\|_{1,\infty} \leqslant \left((\tfrac{p}{q})^{1/p} + (\tfrac{q}{p})^{1/q} \right) \|f\|_{p,\infty} \|g\|_{q,\infty}.$$

Ćwiczenie 11.11. Wywnioskuj, że jeśli $p, q > 0$, $f \in \mathscr{L}^{p,\infty}(X)$, $g \in \mathscr{L}^{q,\infty}(X)$, to $fg \in \mathscr{L}^{r,\infty}(X)$ dla r takiego, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

12. **Twierdzenie interpolacyjne Riesza–Thorina**

Niech $I = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$. Mówimy, że φ jest holomorficzna na I jeśli jest holomorficzna we wnętrzu I i ciągła na I.

Lemat 12.1 (lemat Phragmena–Lindelöfa). Jeśli φ jest ograniczoną funkcją holomorficzną na I, to dla wszystkich $s \in [0,1]$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(s+it)| \leqslant \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(it)|\right)^{1-s} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(1+it)|\right)^{s}.$$

Dowód. Niech $M_s = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(s+it)|$ dla $s \in [0,1]$. Przypuśćmy wpierw, że $M_0 \leqslant 1$ i $M_1 \leqslant 1$, oraz że

$$\lim_{t\to\pm\infty} \sup\{|\varphi(s+it)| : s \in [0,1]\} = 0.$$

Wówczas dla dostatecznie dużych t_0, wartości $|\varphi|$ na brzegu prostokąta $\{s+it : s \in [0,1],\ |t| \leqslant t_0\}$ są ograniczone przez 1. Z zasady maksimum modułu wynika, że $|\varphi|$ jest ograniczona przez 1 na każdym takim prostokącie, i wobec tego $|\varphi|$ jest ograniczona przez 1 na I.

Rozważmy teraz ogólny przypadek. Niech $\varepsilon > 0$ oraz niech

$$\tilde{\varphi}(z) = e^{\varepsilon(z^2-z)}(M_0+\varepsilon)^{1-z}(M_1+\varepsilon)^{z}\varphi(z).$$

Wówczas $\tilde{\varphi}$ jest holomorficzna w I oraz

$$|\tilde{\varphi}(s+it)| = e^{\varepsilon(s^2-s-t^2)}(M_0+\varepsilon)^{-(1-s)}(M_1+\varepsilon)^{-s}|\varphi(s+it)|$$

dla $s \in [0,1]$, $t \in \mathbb{R}$. W szczególności $\tilde{\varphi}$ jest ograniczona na I i spełnia warunki pierwszej części dowodu. Wobec tego $|\tilde{\varphi}|$ jest ograniczona przez 1 na I. Oznacza to, że

$$|\varphi(s+it)| \leqslant e^{-\varepsilon(s^2-s-t^2)}(M_0+\varepsilon)^{1-s}(M_1+\varepsilon)^{s}.$$

Przechodząc do granicy $\varepsilon \to 0^+$, otrzymujemy $|\varphi(s+it)| \leqslant M_0^{1-s}M_1^{s}$. □

Ćwiczenie 12.2. Udowodnij, że w powyższym lemacie wystarczy założyć, że φ jest ograniczona na brzegu I oraz $|\varphi(z)| \leqslant c_1 e^{c_2|\operatorname{Im} z|}$ dla $z \in I$.

Ćwiczenie 12.3. Udowodnij, że lemat nie zachodzi, jeśli założymy wyłącznie, że φ jest ograniczona na brzegu I.

W dalszej części rozdziału X i Y są pewnymi przestrzeniami miarowymi, z miarami oznaczanymi odpowiednio przez μ i ν. Jeśli $p \in [1,\infty]$, to przez $\tilde{p}$ oznaczamy wykładnik hölderowsko sprzężony, tj. taki, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} = 1$.

Przypomnijmy, że funkcje proste to funkcje postaci $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$, gdzie A_k są parami rozłącznymi zbiorami o skończonej mierze.

Twierdzenie 12.4 (twierdzenie interpolacyjne Riesza–Thorina). Niech $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [1,\infty]$, $\vartheta \in [0,1]$ oraz $\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{q_0} + \frac{\vartheta}{q_1}$. Przypuśćmy, że T jest określony na $\mathscr{L}^{p_0}(X) + \mathscr{L}^{p_1}(X)$ i jest ograniczonym operatorem liniowym z $\mathscr{L}^{p_0}(X)$ do $\mathscr{L}^{q_0}(Y)$ z normą M_0 oraz z $\mathscr{L}^{p_1}(X)$ do $\mathscr{L}^{q_1}(Y)$ z normą M_1. Wówczas T jest ograniczonym operatorem liniowym z $\mathscr{L}^{p}(X)$ do $\mathscr{L}^{q}(X)$ z normą co najwyżej $M_0^{1-\vartheta}M_1^{\vartheta}$.

Dowód. Wybierzmy parami rozłączne zbiory $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$, $B_1, \ldots, B_m \subseteq Y$ oraz niezerowe współczynniki $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_m$ i określmy

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x), \qquad g(y) = \sum_{l=1}^{m} b_l \mathbb{1}_{B_l}(y).$$

Niech $p(z)$, $q(z)$ i $\tilde{q}(z)$ będą dane wzorami

$$\tfrac{1}{p(z)} = \tfrac{1-z}{p_0} + \tfrac{z}{p_1}, \qquad \tfrac{1}{q(z)} = \tfrac{1-z}{q_0} + \tfrac{z}{q_1}, \qquad \tfrac{1}{\tilde{q}(z)} = \tfrac{1-z}{\tilde{q}_0} + \tfrac{z}{\tilde{q}_1}.$$

Zauważmy, że $\tilde{q}(s)$ jest wykładnikiem sprzężonym do $q(s)$ dla $s \in [0, 1]$. Niech wreszcie

$$f_z(x) = \tfrac{f(x)}{|f(x)|} |f(x)|^{1/p(z)} \mathbb{1}_{f(x) \neq 0}, \qquad g_z(y) = \tfrac{g(y)}{|g(y)|} |g(y)|^{1/\tilde{q}(z)} \mathbb{1}_{g(y) \neq 0}$$

dla $z \in I$. Rozważmy

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_Y T f_z(y) g_z(y) \nu(dy) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \tfrac{a_k}{|a_k|} |a_k|^{1/p(z)} \tfrac{b_l}{|b_l|} |b_l|^{1/\tilde{q}(z)} \int_Y T \mathbb{1}_{A_k}(y) \mathbb{1}_{B_l}(y) \nu(dy). \end{aligned}$$

Ponieważ $\mathbb{1}_{A_k} \in \mathscr{L}^{p_0}(X)$, więc $T\mathbb{1}_{A_k} \in \mathscr{L}^{q_0}(Y)$, a skoro $\mathbb{1}_{B_l} \in \mathscr{L}^{\tilde{q}_0}(Y)$, to $T\mathbb{1}_{A_k}(y)\mathbb{1}_{B_l}(y)$ jest całkowalna względem $\nu(dy)$. Zatem φ jest poprawnie określona i holomorficzna na I. Ponieważ $\operatorname{Re} p(z), \operatorname{Re} \tilde{q}(z) \in [0, 1]$, φ jest ograniczona na I. Ponadto na mocy nierówności Höldera,

$$|\varphi(it)| \leqslant \|T f_{it}\|_{q_0} \|g_{it}\|_{\tilde{q}_0} \leqslant M_0 \|f_{it}\|_{p_0} \|g_{it}\|_{\tilde{q}_0} = M_0 \|f\|_1^{1/p_0} \|g\|_1^{1/\tilde{q}_0}.$$

Analogicznie

$$|\varphi(1 + it)| \leqslant M_1 \|f\|_1^{1/p_1} \|g\|_1^{1/\tilde{q}_1}.$$

Z lematu Phragmena–Lindelöfa wynika, że

$$|\varphi(s)| \leqslant M_0^{1-s} M_1^s \|f\|_1^{1/p(s)} \|g\|_1^{1/\tilde{q}(s)} = M_0^{1-s} M_1^s \|f_s\|_{p(s)} \|g_s\|_{\tilde{q}(s)}.$$

Zbiór wszystkich funkcji g_s rozważanej postaci to zbiór wszystkich funkcji prostych. Jest on gęsty w $\mathscr{L}^{\tilde{q}(s)}(Y)$, a więc na mocy lematu Fatou,

$$\left| \int_Y T f_s(y) g(y) \nu(dy) \right| \leqslant M_0^{1-s} M_1^s \|f_s\|_{p(s)} \|g\|_{\tilde{q}(s)}$$

dla wszystkich $g \in \mathscr{L}^{\tilde{q}(s)}(Y)$. Wybierając g (o niezerowej normie) tak, by zachodziła równość w nierówności Höldera zastosowanej do całki po lewej stronie, otrzymujemy

$$\|T f_s\|_{q(s)} \leqslant M_0^{1-s} M_1^s \|f_s\|_{p(s)}.$$

Zbiór wszystkich funkcji f_s rozważanej postaci to ponownie zbiór wszystkich funkcji prostych. Biorąc $s = \vartheta$, otrzymujemy tezę twierdzenia dla wszystkich funkcji prostych f.

Z gęstości zbioru funkcji prostych w $\mathscr{L}^p(X)$ wynika, że zawężenie T do przestrzeni funkcji prostych ma jednoznaczne ciągłe rozszerzenie do $\mathscr{L}^p(X)$ o normie nie przekraczającej $M_0^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta}$. Teza dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^p(X)$ wynika z równości granicy w $\mathscr{L}^q(Y)$ i $\mathscr{L}^{q_j}(Y)$: na zbiorze $\mathscr{L}^p(X) \cap \mathscr{L}^{p_j}(X)$ ciągłe rozszerzenie w sensie zbieżności w $\mathscr{L}^q(Y)$ jest zgodne z ciągłym rozszerzeniem w sensie zbieżności w $\mathscr{L}^{q_j}(Y)$, które jest zgodne z definicją operatora T, a przy tym $\mathscr{L}^p(X) \subseteq \mathscr{L}^{p_0}(X) + \mathscr{L}^{p_1}(X)$. □

Ćwiczenie 12.5 (twierdzenie interpolacyjne Steina). Udowodnij, że operator T w twierdzeniu Riesza–Thorina można zastąpić rodziną operatorów T_z, $z \in I$, pod warunkiem, że funkcje $\varphi_{A,B}(z) = \int T_z \mathbb{1}_A(y)\mathbb{1}_B(y)\nu(dy)$ są holomorficzne i ograniczone na I, operatory T_{it} przekształcają $\mathscr{L}^{p_0}(X)$ w $\mathscr{L}^{q_0}(Y)$ i ich normy są ograniczone przez M_0, zaś operatory T_{1+it} przekształcają $\mathscr{L}^{p_1}(X)$ w $\mathscr{L}^{q_1}(Y)$, z normami ograniczonymi przez M_1.

Ćwiczenie 12.6. Sformułuj i udowodnij wersję twierdzenia Riesza–Thorina dla przestrzeni Sobolewa $H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in [0, \infty)$.

Ćwiczenie 12.7. Poczytaj o interpolacji zespolonej między przestrzeniami Banacha.

Twierdzenie 12.8 (nierówność Younga). Jeśli $p, q, r \in [1, \infty]$ spełniają równość $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, to dla wszystkich $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ oraz $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dowód. Niech $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ oraz $Tg = f * g$. Z twierdzenia Fubiniego wiemy, że $\|Tg\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$, zaś z prostego oszacowania całki wynika, że $\|Tg\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty$. Z twierdzenia Riesza–Thorina wynika, że $\|Tg\|_p \leqslant \|f\|_1\|g\|_p$ dla wszystkich $p \in [1, \infty]$ (fakt ten został już udowodniony innymi metodami we wniosku 6.17).

Niech teraz $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ dla pewnego $p \in [1, \infty]$ i niech ponownie $Tg = f * g$. Wiemy już, że $\|Tg\|_p \leqslant \|f\|_p\|g\|_1$. Ponadto z nierówności Höldera wynika, że $\|Tg\|_\infty \leqslant \|f\|_p\|g\|_{\tilde{p}}$, gdzie $\tilde{p}$ jest wykładnikiem sprzężonym do p. Wobec tego $\|Tg\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$, o ile dla pewnego $\vartheta \in [0, 1]$ zachodzi

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{1} + \frac{\vartheta}{\tilde{p}}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\vartheta}{p} + \frac{\vartheta}{\infty}, \qquad \frac{1}{\tilde{p}} = 1 - \frac{1}{p}.$$

Eliminując z układu ϑ i $\tilde{p}$, otrzymujemy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. □

Twierdzenie 12.9. Niech $k(y, x)$ będzie jądrem operatora T, tj.

$$Tf(y) = \int_X k(y, x) f(x)\mu(dx),$$

dla wszystkich f, dla których całka ma sens. Jeśli

$$\int_X |k(y, x)|\mu(dx) \leqslant M_0, \qquad \int_Y |k(y, x)|\nu(dy) \leqslant M_1,$$

to T jest operatorem ograniczonym z $\mathscr{L}^p(X)$ do $\mathscr{L}^p(Y)$, z normą nie przekraczającą $M_0^{1-1/p} M_1^{1/p}$.

Dowód. Z prostego oszacowania całki wynika, że $\|Tf\|_\infty \leqslant M_0\|f\|_\infty$, zaś z twierdzenia Fubiniego — $\|Tf\|_1 \leqslant M_1\|f\|_1$. Z twierdzenia Riesza–Thorina otrzymujemy $\|Tf\|_p \leqslant M_0^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta} \|f\|_p$ gdy $\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{\infty} + \frac{\vartheta}{1}$. □

Twierdzenie 12.10 (nierówność Hausdorffa–Younga). Jeśli $p \in [1, 2]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$, to $\|\tilde{\mathscr{F}} f\|_q \leqslant (2\pi)^{d/q}\|f\|_p$

Dowód. Operator $\tilde{\mathscr{F}}$ ma normę 1 jako operator z $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ do $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ oraz normę $(2\pi)^{d/2}$ jako operator z $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ w $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Na mocy twierdzenia Riesza–Thorina, $\tilde{\mathscr{F}}$ jest operatorem ograniczonym z $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ do $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$, gdzie $\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{1} + \frac{\vartheta}{2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{\infty} + \frac{\vartheta}{2}$, a norma tego operatora nie przekracza $(2\pi)^{d\vartheta/2}$. □

Twierdzenie 12.11 (nierówność Hausdorffa–Younga dla szeregów Fouriera). Jeśli $p \in [1,2]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, to $\|\hat{f}\|_q \leqslant (2\pi)^{1/q}\|f\|_p$. Jeśli zaś $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz $\hat{f} \in \ell^p$, to $\|f\|_q \leqslant (2\pi)^{-1/p}\|\hat{f}\|_p$.

Dowód. Dowód pierwszej części jest taki sam, jak w przestrzeniach euklidesowych. Druga wynika podobnie, bowiem $\|f\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-1}\|\hat{f}\|_1$ oraz $\|f\|_2 = (2\pi)^{-1/2}\|\hat{f}\|_2$. □

13. **Operator maksymalny**

Jednym z najważniejszych zastosowań twierdzenia Marcinkiewicza jest oszacowanie norm $\mathscr{L}^p$ operatora maksymalnego Hardy'ego-Littlewooda. Poniżej rozważamy przypadek funkcji określonych na $\mathbb{R}^d$; teoria dla $\mathbb{T}$ (i innych grup lokalnie zwartych) jest niemal identyczna. Mówimy, że funkcja f jest *lokalnie całkowalna* na $\mathbb{R}^d$, jeśli f jest borelowska i $f\mathbb{1}_K \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ dla każdego zbioru zwartego K. Zbiór wszystkich funkcji lokalnie całkowalnych oznaczamy $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Definicja 13.1. *Operator maksymalny Hardy'ego-Littlewooda* jest określony wzorem

$$Mf(x) = \sup\left\{\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy : r > 0\right\}.$$

dla $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Funkcja Mf przyjmuje wartości z przedziału $[0,\infty]$.

Oznaczmy $\psi_r(x) = |B(0,r)|^{-1}\mathbb{1}_{B(0,r)}(x)$. Wówczas

$$Mf(x) = \sup\{|f| * \psi_r(x) : r > 0\}.$$

Ponadto $|f| * \psi_r(x) = (|f|\mathbb{1}_{B(x_0,2r)}) * \psi_r(x)$ dla $x \in B(x_0,r)$, zaś $|f|\mathbb{1}_{B(x_0,2r)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, zatem $|f| * \psi_r(x)$ jest ciągła. Wobec tego zbiór

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > t\right\} = \bigcup_{r>0}\left\{x \in \mathbb{R}^d : |f| * \psi_r(x) > t\right\}$$

jest otwarty. W szczególności Mf jest funkcją borelowską.

Wprost z definicji wynika, że $M(f+g)(x) \leqslant Mf(x) + Mg(x)$, a więc M jest operatorem kwaziliniowym ze stałą $Q = 1$ (inaczej mówiąc — operatorem podaddytywnym). Ponadto jeśli f jest ograniczona, to również Mf jest ograniczona i $\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, czyli M jest mocnego (lub równoważnie słabego) typu ∞,∞.

Lemat 13.2 (lemat pokryciowy Vitalego). Przypuśćmy, że B_i, $i \in I$, jest rodziną kul (w dowolnej przestrzeni metrycznej), których promienie są ograniczone od góry. Wówczas istnieje podrodzina B_j, $j \in J$, $J \subseteq I$, o własnościach:

(a) kule B_j, $j \in J$, są parami rozłączne;
(b) $\bigcup_{i\in I} B_i \subseteq \bigcup_{j\in J} B'_j$, gdzie B'_j oznacza kulę o tym samym środku, co B_j, lecz o pięciokrotnie większym promieniu.

Dowód. Przypuśćmy, że $B_i = B(x_i,r_i)$ oraz $M = \sup\{r_i : i \in I\}$. Zbiór J konstruujemy indukcyjnie. Przyjmujemy $J_0 = \varnothing$. Przypuśćmy, że mamy już określony zbiór J_{n-1}. Niech I_n będzie zbiorem tych i, dla których $B_i \cap \bigcup_{j\in J_{n-1}} B_j = \varnothing$ oraz $r_i > 2^{-n}M$. Niech K_n będzie dowolnym maksymalnym podzbiorem I_n takim, że B_i dla $i \in K_n$ są parami rozłączne (istnienie K_n wynika z lematu Kuratowskiego–Zorna). Przyjmujemy $J_n = J_{n-1} \cup K_n$. Ponadto określamy $J = \bigcup_{n=1}^\infty J_n$.

Przypuśćmy, że $x \in B_i$ dla pewnego $i \in I$ i dobierzmy n tak, by $2^{-n}M < r_i \leqslant 2^{-n+1}M$. Jeśli $i \in K_n$, to oczywiście $i \in J$, zatem $x \in \bigcup_{j\in J} B'_j$. Gdy $i \notin K_n$, to B_i przecina się z pewnym B_k, $k \in K_n$ lub z pewnym B_j, $j \in J_{n-1}$. W pierwszym przypadku $x \in B'_k$, w drugim — $x \in B'_j$. Zatem zawsze $x \in \bigcup_{j\in J} B'_j$. □

Twierdzenie 13.3. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to $Mf \in \mathscr{L}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ oraz $\|Mf\|_{1,\infty} \leqslant 5^d\|f\|_1$, tj. M jest słabego typu $1,1$.

Dowód. Ustalmy $t > 0$ i rozważmy zbiór $E = \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > t\}$. Dla każdego $x \in E$ istnieje kula $B_x = B(x, r_x)$ taka, że $|B_x|^{-1} \int_{B_x} |f(y)|dy > t$. Wybierzmy podrodzinę kul B_x, $x \in F$, zgodnie z lematem pokryciowym Vitalego. Otrzymujemy

$$\sum_{x \in F} |B_x| t \leqslant \sum_{x \in F} \int_{B_x} |f(y)|dy = \int_{\bigcup_{x \in F} B_x} |f(y)|dy \leqslant \|f\|_1.$$

Z drugiej strony jeśli $B'_x = B(x, 5r_x)$, to $E \subseteq \bigcup_{x \in F} B'_x$, a więc

$$\sum_{x \in F} |B_x| = 5^{-d} \sum_{x \in F} |B'_x| \geqslant 5^{-d} |E|.$$

Stąd $t|E| \leqslant 5^d \|f\|_1$. □

Z twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza wynika natychmiast, że M jest operatorem mocnego typu p, p dla wszystkich $p \in (1, \infty)$.

Ćwiczenie 13.4. Udowodnij, że M nie jest mocnego typu 1, 1. Udowodnij ponadto, że jeśli $Mf \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to $f = 0$ prawie wszędzie.

Ćwiczenie 13.5. Rozważa się czasami ucięty operator maksymalny, dany wzorem $M_R f(x) = \sup\{|f| * \psi_r(x) : r \in (0, R)\}$. Oczywiście $0 \leqslant M_R f(x) \leqslant Mf(x)$. Udowodnij, że również M_R nie jest mocnego typu 1, 1, lecz tym razem $M_R f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ dla wszystkich funkcji $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

Operator maksymalny jest jednym z fundamentalnych pojęć analizy harmonicznej, niezwykle użytecznym przy dowodzeniu zbieżności prawie wszędzie. W szczególności udowodnimy zbieżność prawie wszędzie średnich Cesàro transformat i szeregów Fouriera. Przypomnijmy, że $\psi_r(x) = |B(0, r)|^{-1} \mathbb{1}_{B(0,r)}(x)$. Wprowadźmy oznaczenie:

$$\vartheta f(x) = \limsup_{r \to 0^+} |\psi_r * f(x) - f(x)|.$$

Zauważmy, że $\vartheta(f + g)(x) \leqslant \vartheta f(x) + \vartheta g(x)$ i $\vartheta f(x) \leqslant |f(x)| + Mf(x)$. Ponieważ ψ_r jest jednością aproksymatywną, dla wszystkich $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ funkcje $f * \psi_r$ dążą do f punktowo (a nawet jednostajnie na zbiorach zwartych), zatem $\vartheta f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$. Oznacza to, że gęstość miary o ciągłej gęstości można odzyskać przez "różniczkowanie na kulach". Poniższe twierdzenie podaje analogiczny wynik dla ogólniejszych miar.

Twierdzenie 13.6. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, to $f * \psi_r(x)$ dąży do $f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$.

Dowód. Przypuśćmy wpierw, że $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Ustalmy $t > 0$ i rozważmy zbiór $E = \{x \in \mathbb{R}^d : \vartheta f(x) > t\}$. Dla dowolnej funkcji $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$E \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \vartheta(f - g)(x) > t\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x) - g(x)| + M(f - g)(x) > t\},$$

a więc $t|E| \leqslant \||f - g| + M(f - g)\|_{1,\infty} \leqslant c\|f - g\|_1$ dla pewnego $c > 0$. Prawa strona może być dowolnie mała, skąd otrzymujemy $|E| = 0$. Tak jest dla wszystkich $t > 0$, a więc $\vartheta f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$.

Dla ogólnych $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ oczywiście $\vartheta f(x) = \vartheta(\mathbb{1}_{B(x_0,2)} f)(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in B(x_0, 1)$. Pozostaje zauważyć, że przestrzeń $\mathbb{R}^d$ można pokryć przeliczalną liczbą kul $B(x_0, 1)$. □

Powyższe twierdzenie mówi, że średnia wartość $(f(y) - f(x))$ dla $y \in B(x,r)$ przy ustalonym $x \in \mathbb{R}^d$ i $r \to 0^+$ dąży do zera — dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$. Wynik ten można wzmocnić przez dodanie wartości bezwzględnej.

Definicja 13.7. Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ nazywamy *punktem Lebesgue'a* funkcji $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ jeśli

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

Twierdzenie 13.8. Zbiór E_f punktów Lebegue'a dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ jest pełnej miary, tj. $|\mathbb{R}^d \setminus E_f| = 0$.

Dowód. Dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$ zbiór $F_s = \{x \in \mathbb{R}^d : \vartheta(|f - s|)(x) > 0\}$ jest zbiorem miary zero. Niech $F = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}} F_s$ oraz $E = \mathbb{R} \setminus F$. Oczywiście $|F| = 0$. Ponadto jeśli $x \in E$, $u = f(x)$ oraz $s \in \mathbb{Q}$, to

$$\begin{aligned}\vartheta(|f-u|)(x) &\leqslant \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - s| dy + |s-u| \\ &= \vartheta(|f-s|)(x) + |s-u| = |s-u|.\end{aligned}$$

Prawa strona może być dowolnie mała, a więc $\vartheta(f-u)(x) = 0$, tj.

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - u| dy = 0.$$

Wobec tego x jest punktem Lebesgue'a, czyli $E \subseteq E_f$. □

Z twierdzenia o punktach Lebesgue'a wynika możliwość różniczkowania względem dowolnego ciągu zbiorów "dobrze zbieżnego" do x.

Ćwiczenie 13.9. Jeśli x jest punktem Lebesgue'a funkcji $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ oraz ciąg $E_n \subseteq \mathbb{R}^d$ zbiorów mierzalnych spełnia następujący warunek: istnieje stała $C > 0$ i ciąg $r_n > 0$ zbieżny do 0, dla których $|E_n \setminus B(x,r_n)|/|B(x,r_n)| \to 0$ oraz $|E_n \cap B(x,r_n)| \geqslant C|B(x,r_n)|$ gdy $n \to \infty$, to $\frac{1}{|E_n|}\int_{E_n} f(y)dy$ dąży do $f(x)$.

Ćwiczenie 13.10. Jeśli x jest punktem Lebesgue'a funkcji $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ oraz ciąg $E_n \subseteq \mathbb{R}^d$ zbiorów mierzalnych spełnia następujący warunek: istnieje stała $C > 0$ i ciąg $r_n > 0$ zbieżny do 0, dla których $E_n \subseteq B(x,r_n)$ oraz $|E_n| \geqslant C|B(x,r_n)|$, to $\frac{1}{|E_n|}\int_{E_n} f(y)dy$ dąży do $f(x)$.

Funkcje ψ_r można zastąpić dużo ogólniejszą jednością aproksymatywną. Rozważmy funkcje φ_r, $r > 0$ i określmy

$$\varphi_r^*(s) = \sup\{|\varphi_r(x)| : |x| \geqslant s\}.$$

Będziemy zakładali, że φ_r jest jednością aproksymatywną gdy $r \to 0^+$ oraz dla pewnego $I > 0$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r^*(|x|) dx \leqslant I$$

dla wszystkich $r > 0$. Niech

$$\tilde{\vartheta} f(x) = \limsup_{r\to 0^+} |f * \varphi_r(x) - f(x)|.$$

Lemat 13.11. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to

$$|f * \varphi_r(x)| \leqslant IMf(x) \qquad \text{oraz} \qquad \tilde{\vartheta} f(x) \leqslant |f(x)| + IMf(x).$$

Dowód. Zauważmy, że funkcja φ_r^* jest malejąca i lewostronnie ciągła, jest więc ogonem dystrybuanty pewnej nieujemnej miary μ_r na $(0,\infty)$, tj. $\varphi_r^*(s) = \mu_r([s,\infty))$ dla $s > 0$. Zachodzi

$$\begin{aligned}|f * \varphi_r(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\varphi_r^*(|y|)dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\mu_r([|y|,\infty))dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{[|y|,\infty)}(s)|f(x-y)|\mu_r(ds)dy.\end{aligned}$$

Z twierdzenia Fubiniego wynika, że

$$\begin{aligned}|f * \varphi_r(x)| &\leqslant \int_{(0,\infty)}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[|y|,\infty)}(s)|f(x-y)|dy\mu_r(ds) \\ &= \int_{(0,\infty)}\int_{B(0,s)} |f(x-y)|dy\mu_r(ds) = \int_{(0,\infty)}\int_{B(x,s)} |f(z)|dz\mu_r(ds).\end{aligned}$$

Wobec tego

$$|f * \varphi_r(x)| \leqslant Mf(x)\int_{(0,\infty)} |B(0,s)|\mu_r(ds).$$

Wykonując analogiczne kroki w odwrotnej kolejności otrzymujemy

$$\begin{aligned}|f * \varphi_r(x)| &\leqslant Mf(x)\int_{(0,\infty)}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[|y|,\infty)}(s)dy\mu_r(ds) \\ &= Mf(x)\int_{\mathbb{R}^d} \mu_r([|y|,\infty))dy = Mf(x)\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(|y|)dy \leqslant IMf(x).\end{aligned}$$

To dowodzi pierwszej części lematu. Druga wynika z pierwszej i definicji $\tilde{\vartheta} f(x)$. □

Przypomnijmy, że $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) + \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ oznacza zbiór sum funkcji z $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i z $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Zawiera on wszystkie przestrzenie $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in [1,\infty]$.

Twierdzenie 13.12. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) + \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, to $f * \varphi_r(x)$ dąży do $f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$. Co więcej, dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)-f(x)||\varphi_r(y-x)|dy = 0.$$

Dowód. Dowód pierwszej części jest całkiem analogiczny do dowodu twierdzenia 13.6. Niech $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $t > 0$ oraz $E = \{x \in \mathbb{R}^d : \tilde{\vartheta} f(x) > t\}$. Dla dowolnej funkcji $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$E \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \tilde{\vartheta}(f-g)(x) > t\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)-g(x)| + IM(f-g)(x) > t\},$$

a więc $t|E| \leqslant \||f-g| + IM(f-g)\|_{1,\infty} \leqslant C\|f-g\|_1$ dla pewnej stałej $C > 0$. Stąd $|E| = 0$. Tak jest dla wszystkich $t > 0$, a więc $\tilde{\vartheta} f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$.

Dowolną funkcję $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) + \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ możemy zapisać w postaci $f = f_1 + f_\infty$, gdzie $f_1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $f_\infty \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Łatwo sprawdzić, że $\tilde{\vartheta} f(x) = \tilde{\vartheta}(f_1 + \mathbb{1}_{B(x_0,2)} f_2)(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in B(x_0,1)$. Ponieważ przestrzeń $\mathbb{R}^d$ można pokryć przeliczalną liczbą kul $B(x_0,1)$, pierwsza część twierdzenia została udowodniona. Dowód drugiej części niczym nie różni się od dowodu twierdzenia 13.8. □

ĆWICZENIE 13.13. Wykaż, że zbieżności w twierdzeniu 13.12 zachodzą w każdym punkcie Lebesgue'a funkcji f.

ĆWICZENIE 13.14. Załóżmy dodatkowo, że $\tilde{\varphi}_r$ mają nośnik zawarty w pewnym ustalonym zbiorze zwartym K. Udowodnij, że wówczas powyższe twierdzenie zachodzi dla wszystkich $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia 13.12 jest zbieżność prawie wszędzie we wzorach na transformatę odwrotną, takich jak twierdzenie 9.3. Odpowiednie modyfikacje pozwalają uzyskać analogiczny wynik także dla szeregów Fouriera. Szczegóły pozostawiamy jako ćwiczenie.

ĆWICZENIE 13.15. Sformułuj odpowiedniki twierdzeń 13.6 i 13.12 dla funkcji $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ (a więc dla 2π-okresowych funkcji lokalnie całkowalnych). Wykorzystaj je do udowodnienia twierdzenia 6.24: średnie Cesàro $\sigma_k f$ szeregów Fouriera funkcji $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ dążą do f prawie wszędzie.

Przypuśćmy, że $\varphi_r(x) = \varphi_r^*(|x|)$, a więc że funkcje $\varphi_r(x)$ są radialne i maleją ze wzrostem $|x|$. Rozważmy operator maksymalny związany z jednością aproksymatywną φ_r, czyli

$$\tilde{M}f(x) = \sup\{|f| * \varphi_r(x) : r > 0\}.$$

Lemat 13.11 dowodzi, że $\tilde{M}f(x) \leqslant IMf(x)$. Z drugiej strony

$$|B(0,s)|\,|f| * \psi_s(x) \leqslant (\varphi_r^*(s))^{-1}|f| * \varphi_r(x) \leqslant (\varphi_r^*(s))^{-1}\tilde{M}f(x),$$

wobec czego

$$\tilde{M}f(x) \geqslant |B(0,1)| \inf\left\{s^d \sup\{\varphi_r^*(s) : r > 0\} : s > 0\right\} \tilde{M}f(x).$$

Jeśli np. $\varphi_r = K_r$ jest jądrem Gaussa–Weierstrassa, otrzymujemy

$$CMf(x) \leqslant \tilde{M}f(x) \leqslant Mf(x),$$

gdzie $C = (\frac{d}{2\pi})^{d/2}e^{-d/2}|B(0,1)|$. Taka sama nierówność zachodzi dla jądra Poissona $\varphi_r = P_r$, ze stałą $C = \Gamma(\frac{d+1}{2})\pi^{-(d+1)/2}(d+1)^{d/2}(d+2)^{-(d+1)/2}|B(0,1)|$. W tym (i w wielu innych przypadkach) operatory maksymalne $\tilde{M}$ są więc porównywalne z operatorem Hardy'ego–Littlewooda M i można korzystać z tego operatora, który w danej sytuacji jest najwygodniejszy. Jeszcze inny rodzaj operatora maksymalnego zostanie opisany w kolejnym rozdziale.

14. **Rozkład Calderóna–Zygmunda**

Dla $k \in \mathbb{Z}$ niech $\mathcal{Q}_k$ oznacza rodzinę elementarnych kostek o wierzchołkach w punktach kratowych $2^{-k}\mathbb{Z}^d$. Ściślej mówiąc, kostki z $\mathcal{Q}_k$ są przesunięciami kostki $[0, 2^{-k})^d$ o wektory z kraty $2^{-k}\mathbb{Z}^d$. Oznaczmy przez $\mathcal{Q}$ sumę wszystkich rodzin $\mathcal{Q}_k$.

Dla $x \in \mathbb{R}^d$ niech $Q_k(x)$ oznacza jedyną kostkę z $\mathcal{Q}_k$, która zawiera x. Dla funkcji $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ określamy

$$f_k(x) = 2^{kd} \int_{Q_k(x)} |f(y)| dy.$$

Jeśli $\lambda > 0$, to określamy

$$Q_{f,\lambda}(x) = \begin{cases} Q_k(x) & \text{jeśli } f_j(x) \leqslant \lambda \text{ dla } j < k \text{ oraz } f_k(x) > \lambda, \\ \varnothing & \text{jeśli } f_j(x) \leqslant \lambda \text{ dla wszystkich } j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ponieważ f jest całkowalna, dla dostatecznie dużych ujemnych $j \in \mathbb{Z}$ zachodzi $f_j(x) \leqslant \lambda$, zatem $Q_{f,\lambda}(x)$ jest poprawnie określone. Rodzinę wszystkich niepustych zbiorów $Q_{f,\lambda}(x)$ oznaczamy $\mathcal{Q}_{f,\lambda}$, zaś ich sumę — $Q_{f,\lambda}$. Zauważmy, że kostki z $\mathcal{Q}_{f,\lambda}$ są parami rozłączne.

Ćwiczenie 14.1. Udowodnij, że każda kostka $Q \in \mathcal{Q}$ albo zawiera się w $Q_{f,\lambda}$, albo jest (przeliczalną) rozłączną sumę kostek z $\mathcal{Q}_{f,\lambda}$ (dających w sumie $Q \cap Q_{f,\lambda}$) oraz kostek z $\mathbb{Q}$, które są rozłączne z $Q_{f,\lambda}$ (dających w sumie $Q \setminus Q_{f,\lambda}$).

Definicja 14.2. *Rozkładem Calderóna–Zygmunda* funkcji f nazywamy rozkład $f = f_\lambda^{\text{good}} + f_\lambda^{\text{bad}}$, gdzie

$$f_\lambda^{\text{good}}(x) = f(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus Q_{f,\lambda}}(x) + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{f,\lambda}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right) \mathbb{1}_Q(x),$$

$$f_\lambda^{\text{bad}}(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{f,\lambda}} \left(f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right) \mathbb{1}_Q(x).$$

Z powyższym podziałem naturalnie związany jest *diadyczny operator maksymalny*:

$$M_{\mathrm{d}} f(x) = \sup\{f_k(x) : k \in \mathbb{Z}\} = \sup \left\{ \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} |f(y)| dy : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ćwiczenie 14.3. Znajdź rozkład Calderóna–Zygmunda funkcji $f(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $g(x) = x^{-1/2} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ oraz $h(x) = x^{-2} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Ćwiczenie 14.4. Wykorzystując własności operatora maksymalnego Hardy'ego–Littlewooda i odpowiednie rozważania geometryczne, uzasadnij, że operator M_{d} jest słabego typu 1, 1.

Z powyższego ćwiczenia, a także z ćwiczeń dotyczących dobrej zbieżności w poprzednim rozdziale, wynika natychmiast wiele własności diadycznego operatora maksymalnego. Można jednak te własności udowodnić bezpośrednio. Będzie to dobrą rozgrzewką przed badaniem całek singularnych.

Twierdzenie 14.5. Operator M_{d} jest słabego typu $1,1$ i mocnego typu p,p dla każdego $p \in (1,\infty]$.

Dowód. Oczywiście M_{d} jest mocnego typu ∞,∞. Na mocy twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza wystarczy zatem dowieść, że M_{d} jest słabego typu $1,1$.

Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ przyjmuje wartości nieujemne. Zauważmy, że każda kostka $Q \in \mathscr{Q}_{f,\lambda}$ jest jedną z 2^d kostek składających się na pewną większą kostkę Q'. Mówiąc ściślej, jeśli $Q \in \mathscr{Q}_k$, to Q' jest tą kostką z $\mathscr{Q}_{k-1}$, która zawiera Q. Wobec definicji $\mathscr{Q}_{f,\lambda}$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx \leqslant \frac{2^d}{|Q'|}\int_{Q'} f(x)dx \leqslant 2^d\lambda,$$

czyli f_λ^{good} jest ograniczona przez $2^d\lambda$ na $Q_{f,\lambda}$. Wartość średnia f_λ^{good} na każdej kostce z $\mathscr{Q}_{f,\lambda}$ nie przekracza zatem $2^d\lambda$. Ponadto $f_\lambda^{\text{good}} = f$ na każdej kostce z $\mathscr{Q}$, która jest rozłączna z $Q_{f,\lambda}$, zatem wartość średnia f_λ^{good} na takich kostkach nie przekracza λ. Oznacza to, że na dowolnej kostce z $\mathscr{Q}$ wartość średnia f_λ^{good} nie przekracza $2^d\lambda$.

Z kolei wartość średnia funkcji f_λ^{bad} na każdej kostce z $\mathscr{Q}_{f,\lambda}$ wynosi zero, zatem jeśli kostka $Q \in \mathscr{Q}$ nie zawiera się w $Q_{f,\lambda}$, to wartość średnia f_λ^{bad} na Q wynosi zero. Udowodniliśmy zatem, że dla dowolnej kostki $Q \in \mathscr{Q}$ która nie jest zawarta w $Q_{f,\lambda}$ zachodzi

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q f_\lambda^{\text{good}}(x)dx \leqslant 2^d\lambda.$$

Oznacza to, że $M_{\mathrm{d}}f(x) \leqslant 2^d\lambda$ dla $x \notin Q_{f,\lambda}$.

Z drugiej strony

$$\int_Q |f(x)|dx \geqslant \lambda|Q|,$$

zatem $|Q_{f,\lambda}| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$. To dowodzi, że M_{d} jest słabego typu $1,1$. □

Ćwiczenie 14.6. Wykorzystując powyższe twierdzneie i odpowiednie rozważania geometryczne, uzasadnij, że operator maksymalny Hardy'ego–Littlewooda jest słabego typu $1,1$.

Powtarzając dowód twierdzenia 13.6 (lub wykorzystując ćwiczenia o dobrej zbieżności z poprzedniego rozdziału) otrzymujemy następujący wynik. W szczególności wynika z niego, że $|f(x)| \leqslant \lambda$ dla prawie wszystkich $x \notin Q_{f,\lambda}$.

Wniosek 14.7. Jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, to

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} 2^{kd}\int_{Q_k(x)} f(y)dy$$

dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$. □

Ciekawy i bardzo krótki dowód powyższych wyników można uzyskać z nierówności maksymalnych dla martyngałów i twierdzeń o zbieżności martyngałów.

Rozkład Calderóna–Zygmunda wykorzystuje się przede wszystkim do badania własności całek singularnych. Udowodnimy tylko to, co będzie nam potrzebne do badania transformaty Hilberta i transformat Riesza, zaś ogólniejszy wynik pozostawimy bez dowodu.

Twierdzenie 14.8. Niech $K \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ będzie funkcją o następujących własnościach:
(a) $\mathscr{F}K \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$;
(b) istnieje C takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,2|x|)} |K(x+z) - K(z)| dz \leqslant C.$$

Wówczas operator splotu z K jest słabego typu 1, 1 i jest ograniczony na $\mathscr{L}^p$ dla $p \in (1,\infty)$, z ograniczeniami na normy zależącymi tylko od wymiaru d, normy $\|\mathscr{F}K\|_\infty$ oraz stałej C (lecz nie zależącymi od $\|K\|_2$).

Drugie założenie nazywane jest zwykle *warunkiem Hörmandera.*

Dowód. Niech $Tf = f * K$ dla $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1,2]$. Na mocy twierdzenia Plancherela T jest ograniczony na $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ z normą $\|\mathscr{F}K\|_\infty$. Poniżej wykażemy, że T jest słabego typu $1,1$, z ograniczeniem zależącym wyłącznie od d i C. Na mocy twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza oznacza to, że T jest ograniczony na $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in (1,2)$. Przypuśćmy, że $p \in (2,\infty)$ oraz $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Wówczas $q \in (1,2)$. Na mocy twierdzenia Plancherela dla wszystkich $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ oraz $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^d} Tf(x)g(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}K(\xi)\mathscr{F}f(\xi)\mathscr{F}g(-\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)T\tilde{g}(-x)dx,$$

gdzie $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Na mocy nierówności Höldera zachodzi

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} Tf(x)g(x)dx\right| \leqslant \|f\|_p\|T\tilde{g}\|_q \leqslant \|f\|_p\|T\|_{q\to q}\|g\|_q,$$

zaś aproksymując przy pomocy g funkcję, dla której zachodzi równość w nierówności Höldera po lewej stronie powyższej nierówności, otrzymujemy $\|Tf\|_p \leqslant \|f\|_p\|T\|_{q\to q}$. Oznacza to, że T jest ograniczony na $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ z tą samą normą, co na $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$. Pozostaje zatem dowieść, że T jest słabego typu 1, 1.

Przypuśćmy, że $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i $\lambda > 0$. Ponieważ $\|f_\lambda^{\text{good}}\|_\infty \leqslant 2^d\lambda$, zachodzi

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : |Tf_\lambda^{\text{good}}(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{\|f_\lambda^{\text{good}}\|_2^2}{\lambda^2} \leqslant \frac{2^d\|f_\lambda^{\text{good}}\|_1}{\lambda}.$$

Niech $Q \in \mathcal{Q}_{f,\lambda}$ i niech Q' oznacza kostkę o tym samym środku y_Q, co Q, lecz powiększoną $(2\sqrt{d})$-krotnie. Oznaczmy dla wygody $g = f_\lambda^{\text{bad}}\mathbb{1}_Q$. Jeśli $x \notin Q'$, to

$$\begin{aligned} |g * K(x)| = \left|\int_Q f_\lambda^{\text{bad}}(y)K(y-x)dy\right| &= \left|\int_Q f_\lambda^{\text{bad}}(y)(K(y-x) - K(y_Q - x))dy\right| \\ &\leqslant \int_Q |f_\lambda^{\text{bad}}(y)||K(y-x) - K(y_Q - x)|dy, \end{aligned}$$

przez co

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'} |g * K(x)|dx \leqslant \int_Q |f_\lambda^{\text{bad}}(y)| \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'} |K(y-x) - K(y_Q - x)|dx\,dy$$
$$\leqslant \int_Q |f_\lambda^{\text{bad}}(y)|dy \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,2|y-y_Q|)} |K(y-y_Q+z) - K(z)|dz \leqslant C\|g\|_1.$$

Sumując powyższe nierówności dla wszystkich $Q \in \mathcal{Q}_{f,\lambda}$ otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'_{\lambda,f}} |f_\lambda^{\text{bad}} * K(x)|dx \leqslant C\|f_\lambda^{\text{bad}}\|_1,$$

gdzie $Q'_{\lambda,f}$ jest sumą kostek Q' dla wszystkich $Q \in \mathcal{Q}_{\lambda,f}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : |Tf_\lambda^{\text{bad}}(x)| > \lambda\}| \leqslant |Q'_{\lambda,f}| + \frac{C\|f_\lambda^{\text{bad}}\|_1}{\lambda} \leqslant \frac{(4d)^{d/2}\|f\|_1}{\lambda} + \frac{C\|f_\lambda^{\text{bad}}\|_1}{\lambda}.$$

Z udowodnionych wyżej nierówności wynika, że

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : |Tf(x)| > 2\lambda\}| \leqslant \frac{2^d\|f_\lambda^{\text{good}}\|_1}{\lambda} + \frac{(4d)^{d/2}\|f\|_1}{\lambda} + \frac{C\|f_\lambda^{\text{bad}}\|_1}{\lambda}.$$

Pozostaje zauważyć, że $\|f_\lambda^{\text{good}}\|_1 \leqslant \|f\|_1$ oraz $\|f_\lambda^{\text{bad}}\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|f_\lambda^{\text{good}}\|_1 \leqslant 2\|f\|_1$. □

TWIERDZENIE 14.9 (bez dowodu). Niech K będzie mierzalną funkcją o następujących własnościach:

(a) istnieje C_1 takie, że $|K(x)| \leqslant C_1|x|^{-d}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$;
(b) jeśli $R > r > 0$, to
$$\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} K(x)dx = 0;$$
(c) istnieje C_2 takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi
$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,2|x|)} |K(x+z) - K(z)|dz \leqslant C_2.$$

W szczególności powyższe warunki są spełnione, jeśli $K(x) = |x|^{-d}k(\frac{x}{|x|})$ dla pewnej hölderowsko ciągłej funkcji k na sferze jednostkowej. Dla $\varepsilon > 0$ niech $K_\varepsilon = K\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\varepsilon)}$ i niech T_ε będzie operatorem splotu z K_ε. Rozważmy granicę

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} T_\varepsilon f(x)$$

Wówczas:

(1) dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in (1,\infty)$ powyższa granica istnieje prawie wszędzie i w $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ i określa ograniczony operator na $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$;
(2) dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ powyższa granica istnieje prawie wszędzie i określa operator słabego typu 1, 1. □

Pierwsze dwa założenia można zastąpić warunkiem $\mathscr{F}K \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, jeśli operator splotu z K oraz transformata Fouriera K rozumiane są w sensie dystrybucyjnym.

Analogiczne twierdzenia są prawdziwe dla funkcji z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$: rozkład Calderóna–Zygmunda definiuje się analogicznie, wykorzystując diadyczny podział $\mathbb{T}$, zaś dowód twierdzenie 14.8 praktycznie nie wymaga zmian.

15. **Transformata Hilberta i transformaty Riesza**

Jeśli $1 \leqslant j \leqslant d$ oraz $t > 0$, to transformatą Fouriera *sprzężonego jądra Poissona*

$$\tilde{P}_{j,t}(x) = \frac{x_j}{t} P_t(x) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{x_j}{(t^2 + |x|^2)^{(d+1)/2}}$$

jest $\mathscr{F}\tilde{P}_{j,t}(\xi) = (-i\frac{\xi_j}{|\xi|})e^{-t|\xi|}$. W szczególności $|\mathscr{F}\tilde{P}_{j,t}(\xi)| \leqslant 1$. Ponadto łatwo sprawdzić, że $|\nabla \tilde{P}_{j,t}(\xi)| \leqslant C|x|^{-d-1}$ dla pewnej stałej C zależącej tylko od wymiaru d, przez co

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,2|x|)} |\tilde{P}_{j,t}(x+z) - \tilde{P}_{j,t}(z)| dz \leqslant \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,2|x|)} C|x||z|^{-d-1} dz = \frac{Cd\,|B(0,1)|}{2}.$$

Zatem $\tilde{P}_{j,t}$ spełnia warunek Hörmandera. Na mocy twierdzenia 14.8 oznacza to, że dla każdego $p \in (1, \infty)$ splot z $\tilde{P}_{j,t}$ jest operatorem ograniczonym na $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$, z normą ograniczoną przez stałą zależącą wyłącznie od p oraz od wymiaru d. Podobnie splot z $\tilde{P}_{j,t}$ jest operatorem słabego typu 1, 1, z normą ograniczoną przez stałą zależącą wyłącznie od wymiaru d.

Ćwiczenie 15.1. Uzasadnij, że norma operatora splotu z $\tilde{P}_{j,t}$ na $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ nie zależy ani od t, ani od j.

Lemat 15.2. Jeśli $p \in [1, \infty]$ oraz $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$, to dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi

$$\lim_{t \to 0^+} \left(f * \tilde{P}_{j,t}(x) - \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{(d+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,t)} \frac{y_j f(x-y)}{|y|^{d+1}}\, dy \right) = 0.$$

Dowód. W poniższym dowodzie przez C_n oznaczamy stałe zależące tylko od wymiaru d. Niech $g_{t,j}(y) = \pi^{-(d+1)/2}\Gamma(\frac{d+1}{2}) y_j / |y|^{d+1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,t)}(x)$. Zauważmy, że

$$\left| \frac{y_j}{(t^2 + |y|^2)^{(d+1)/2}} - \frac{y_j}{|y|^{d+1}} \right| = \frac{(d+1)|y|}{2} \int_0^{t^2} \frac{1}{(s + |y|^2)^{(d+3)/2}}\, ds \leqslant \frac{(d+1)t^2}{|y|^{d+2}},$$

czyli $|\tilde{P}_{t,j}(y) - g_{t,j}(y)| \leqslant C_1 t^2 / |y|^{d+2}$ dla $y \in \mathbb{R}^d \setminus B(0,t)$. Ponadto oczywiście

$$\frac{y_j}{(t^2 + |y|^2)^{(d+1)/2}} \leqslant \frac{1}{(t^2 + |y|^2)^{d/2}} \leqslant \frac{1}{t^d},$$

zatem $|\tilde{P}_{t,j}(y) - g_{t,j}(y)| \leqslant C_2 t^{-d}$ dla $y \in B(0,t)$. Oznacza to, że

$$|\tilde{P}_{t,j}(y) - g_{t,j}(y)| \leqslant \frac{\max(C_1, C_2)}{t^d} \min(1, (t/|y|)^{d+2}).$$

Przy odpowietniej wartości C_3 jeśli oznaczymy prawą stronę powyższej nierówności przez $C_3 \varphi_t(y)$, to φ_t jest jednością aproksymatywną na $\mathbb{R}^d$ przy $t \to 0^+$, spełniającą założenia twierdzenia 13.12. Z nieparzystości jądra $\tilde{P}_{j,t} - g_{j,t}$ wynika, że

$$\begin{aligned} |f * \tilde{P}_{j,t}(x) - f * g_{j,t}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\tilde{P}_{t,j}(y) - g_{t,j}(y))(f(x-y) - f(x)) dy \right| \\ &\leqslant C_3 \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| \varphi_t(y) dy, \end{aligned}$$

a prawa strona dąży do zera gdy $t \to 0^+$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$ na mocy twierdzenia 13.12. □

Twierdzenie 15.3. Rozważmy granice

$$R_j f(x) = \lim_{t\to 0^+} f * \tilde{P}_{j,t}(x) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{(d+1)/2}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{y_j f(x-y)}{|y|^{d+1}}\, dy.$$

Wówczas:

(1) dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in (1,\infty)$ powyższe granice istnieją (i na mocy lematu 15.2 są sobie równe) prawie wszędzie i w $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ oraz określają ograniczony operator R_j na $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$;
(2) dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ powyższe granice istnieją prawie wszędzie i określają operator R_j słabego typu 1, 1;
(3) dla $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ zachodzi $\mathscr{F}(R_j f)(\xi) = (-i\frac{\xi_j}{|\xi|})\mathscr{F}f(\xi)$.

Operatory R_j są nazywane *transformatami Riesza* i są jednym z najważniejszych obiektów w analizie harmonicznej. Gdy $d = 1$ operator $H = R_1$ nosi nazwę *transformata Hilberta*.

Dowód. Niech $1 \leqslant j \leqslant d$, $p \in (1,\infty)$ oraz $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Na mocy twierdzenia 14.8 normy $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ funkcji $f * \tilde{P}_{j,t}$ są ograniczone przez stałą zależącą wyłącznie od p i wymiaru d. Na mocy twierdzenia Banacha–Alaoglu istnieje zbieżny do zera ciąg t_n taki, że ciąg funkcji $f * \tilde{P}_{j,t_n}$ jest $*$-słabo zbieżny w $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ do pewnej funkcji $g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ (bowiem $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ jest przestrzenią dualną do $\mathscr{L}^q(\mathbb{T})$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Zauważmy, że $\tilde{P}_{j,t} * P_s = \tilde{P}_{j,t+s}$. Wobec tego $f * \tilde{P}_{j,t_n+t} = (f * \tilde{P}_{j,t_n}) * P_t$. Niech q będzie wykładnikiem hölderowsko sprzężonym do p, tj. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Ponieważ $P_t \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$ oraz $\tilde{P}_{j,t_n+t}$ dąży do $\tilde{P}_{j,t}$ w $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$ gdy $n \to \infty$ (obie te własności zachodzą dla dowolnego $q \in (1,\infty]$), otrzymujemy

$$g * P_t(x) = \lim_{n\to\infty} (f * \tilde{P}_{j,t_n}) * P_t(x) = \lim_{n\to\infty} f * \tilde{P}_{j,t_n+t}(x) = f * \tilde{P}_{j,t}(x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$.

Ponieważ P_t jest jednością aproksymatywną spełniającą warunki twierdzenia 13.12, funkcje $f*\tilde{P}_{j,t} = g*P_t$ dążą do g w $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ i prawie wszędzie. To dowodzi pierwszej części twierdzenia.

Dowód drugiej części wymaga powtórzenia pewnych elementów dowodu twierdzenia 14.8. Niech $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Dla $\lambda > 0$ niech $f = f_\lambda^{\mathrm{good}} + f_\lambda^{\mathrm{bad}}$ będzie rozkładem Calderóna–Zygmunda i niech $\mathcal{Q}_{f,\lambda}$ będzie rodziną kostek wykorzystywaną w tym rozkładzie. Sumę tych kostek oznaczamy $Q_{f,\lambda}$. Skoro $f_\lambda^{\mathrm{good}} \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{t\to 0^+} f_\lambda^{\mathrm{good}} * \tilde{P}_{j,t}(x)$ istnieje dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$. Ponadto na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej dla każdego $Q \in \mathcal{Q}_{f,\lambda}$ granica

$$\lim_{t\to 0^+} \int_Q f_\lambda^{\mathrm{bad}}(y)\tilde{P}_{j,t}(x-y)dy$$

istnieje dla każdego x spoza kostki Q' o tym samym środku, co Q, lecz dwukrotnie większej. Oznacza to, że $\lim_{t\to 0^+} f_\lambda^{\mathrm{bad}} * \tilde{P}_{j,t}(x)$ istnieje dla $x \in \mathbb{R}^d \setminus Q'_{f,\lambda}$, gdzie $Q'_{f,\lambda}$ jest sumą kostek Q' dla wszystkich $Q \in \mathcal{Q}_{f,\lambda}$. Ponieważ miara zbioru $Q'_{f,\lambda}$ nie przekracza $2^d\|f\|_1/\lambda$ i λ może być dowolnie duże, granica $R_j f(x) = \lim_{t\to 0^+} f * \tilde{P}_{j,t}(x)$ istnieje dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$.

W podobny sposób można by oszacować normę $\mathscr{L}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ funkcji $R_j f(x)$, ale dużo łatwiej skorzystać z twierdzenia 14.8: miary zbiorów $\{x \in \mathbb{R}^d : |f * \tilde{P}_{j,t}(x)| > \lambda\}$ są ograniczone przez

$C\|f\|_1/\lambda$ dla $t > 0$, gdzie C jest stałą zależącą tylko od wymiaru d, zatem

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : |R_j f(x)| > \lambda\}| \leqslant \liminf_{t \to 0^+} |\{x \in \mathbb{R}^d : |f * \tilde{P}_{j,t}(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{C\|f\|_1}{\lambda} .$$

Innymi słowy R_j jest operatorem słabego typu 1, 1.

Ostatnia część twierdzenia wynika wprost z twierdzenia Plancherela i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. □

Odwzorowanie podobne do transformaty Hilberta — mnożące współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera przez $-i \operatorname{sign} n$ — można zdefiniować na $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Odwzorowanie to, nazywane *transformatą Hilberta na okręgu*, ma te same własności, co transformata Hilberta na $\mathbb{R}$ i transformaty Riesza na $\mathbb{R}^d$. Ważną motywacją do badania tego odwzorowania jest teoria funkcji harmonicznych i holomorficznych w dysku jednostkowym, zarysowana w kolejnym rozdziale.

16. Funkcje harmoniczne i odwzorowanie sprzężone

Niech D będzie niepustym otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$. Zakładamy, że D jest spójny (tj. D nie jest sumą dwóch niepustych zbiorów o rozłącznych domknięciach) i jednospójny (tj. $D = \mathbb{C}$ albo $\mathbb{C} \setminus D$ jest nieograniczony i spójny). Przypomnijmy, że funkcja h jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy h spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna $\frac{\partial h}{\partial x} = -i\frac{\partial h}{\partial y}$; w tym rozdziale $\frac{\partial}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial}{\partial y}$ oznaczają pochodne cząstkowe funkcji h względem odpowiednio części rzeczywistej i części urojonej argumentu. Zbiór funkcji holomorficznych na D oznaczamy $\operatorname{Hol}(D)$.

Definicja 16.1. Mówimy, że funkcja h jest *antyholomorficzna* w D, jeśli jej sprzężenie $\bar{h}$ jest funkcją holomorficzną w D. Zbiór funkcji antyholomorficznych oznaczamy $\widetilde{\operatorname{Hol}}(D)$. Ponadto oznaczamy $\operatorname{Harm}(D) = \operatorname{Hol}(D) + \widetilde{\operatorname{Hol}}(D)$; zatem $\operatorname{Harm}(D)$ jest przestrzenią sum funkcji holomorficznych i antyholomorficznych.

Z definicji wynika, że h jest antyholomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial h}{\partial x} = i\frac{\partial h}{\partial y}$. Zauważmy, że jeśli h jest jednocześnie holomorficzna i antyholomorficzna, $\frac{\partial h}{\partial x} = i\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$, zatem $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0$. Wobec tego jedyne funkcje holomorficzne i antyholomorficzne to funkcje stałe (wykorzystujemy tu spójność D).

Jeśli $h \in \operatorname{Hol}(D)$, to funkcja $\overline{h(\bar{z})}$ jest holomorficzna w D^*, odbiciu symetrycznym zbioru D względem osi rzeczywistej. Zatem $h \in \widetilde{\operatorname{Hol}}(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(z) = g(\bar{z})$ dla pewnej funkcji $g \in \operatorname{Hol}(D^*)$. W szczególności funkcje antyholomorficzne w otoczeniu z_0 rozwijają się w szeregi potęgowe postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{z} - \bar{z}_0)^n.$$

Niech Δ będzie operatorem Laplace'a, tj. $\delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$.

Twierdzenie 16.2. Funkcja h należy do $\operatorname{Harm}(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy h ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe oraz $\Delta h = 0$ w D.

Dowód. Jeśli $h \in \operatorname{Hol}(D)$, to h jest różniczkowalna dowolnie wiele razy i na mocy równań Cauchy'ego–Riemanna zachodzi $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -i\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} = -i\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$. Wobec tego $\Delta h = 0$. Jeśli $h \in \widetilde{\operatorname{Hol}}(D)$, to $\bar{h}$ jest holomorficzna, więc ponownie h jest różniczkowalna dowolnie wiele razy i $\overline{\Delta h} = \Delta\bar{h} = 0$. To dowodzi implikacji w jedną stronę.

Załóżmy, że h ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe i $\Delta h = 0$ w D. Niech $g = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial h}{\partial y}$. Wówczas

$$\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\right) + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\Delta h = 0,$$

zatem g spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna. Wobec tego $g \in \operatorname{Hol}(D)$. Funkcja g ma więc zespoloną funkcję pierwotną $G \in \operatorname{Hol}(D)$ (oznacza to, że $g = G'$; tu korzystamy z jednospójności D). Twierdzimy, że $\tilde{G} = h - G \in \widetilde{\operatorname{Hol}}(D)$. W istocie, $\frac{\partial G}{\partial x} = G' = g$ oraz $\frac{\partial G}{\partial y} = iG' = ig$, zatem

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} - i\frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial x} - i\frac{\partial G}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) - 2g = 0.$$

Wobec tego $h = G + \tilde{G} \in \operatorname{Harm}(D)$. □

Powyższe twierdzenie tłumaczy oznaczenie $\mathrm{Harm}(D)$: jest to przestrzeń zespolonych funkcji *harmonicznych* w D, tj. spełniających równanie Laplace'a $\Delta h = 0$ w D.

Ćwiczenie 16.3. Niech $\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial h}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial h}{\partial y}$ (są to tzw. *pochodne Wirtingera* albo *operatory Cauchy'ego–Riemanna*). Udowodnij, że h jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$ i wówczas $h' = \frac{\partial h}{\partial z}$. Udowodnij analogiczny wynik dla funkcji antyholomorficznych. Udowodnij ponadto, że $\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}}$.

Ćwiczenie 16.4. Zapisz dowód twierdzenia i wcześniejsze rozważania za pomocą pochodnych Wirtingera.

Ćwiczenie 16.5. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ oraz $h(x+iy) = \ln(x^2+y^2)$. Udowodnij, że $h \in \mathrm{Harm}(D)$ i rozłóż h na część holomorficzną i antyholomorficzną.

Definicja 16.6. Funkcje harmoniczne $h_1, h_2 \in \mathrm{Harm}(D)$ nazywamy *harmonicznie sprzężonymi*, jeśli $h_1 + ih_2 \in \mathrm{Hol}(D)$ oraz $h_1 - ih_2 \in \widetilde{\mathrm{Hol}}(D)$. Przyporządkowanie funkcji h_1 funkcji h_2 nazywamy *odwzorowaniem sprzężonym* i oznaczamy H: $h_2 = Hh_1$.

Zauważmy, że jeśli h_1 i h_2 są harmonicznie sprzężone, to również h_1+c_1 i h_2+c_2 oraz h_2 i $-h_1$ (lecz nie h_2 i h_1) są harmonicznie sprzężone. Wynika stąd, że Hh_1 jest określone jednoznacznie z dokładnością do stałej oraz $H(Hh_1) = -h_1$.

Ponieważ $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ oraz $\ln \bar{z} = \ln|z| + i \arg z$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, funkcje $\ln|z|$ oraz $\arg z$ są harmonicznie sprzężone. Wynika stąd, że funkcja harmonicznie sprzężona do funkcji ograniczonej może być nieograniczona. Naszym celem jest zbadanie związku między regularnością funkcji i funkcji do niej harmonicznie sprzężonej, czyli własności odwzorowania sprzężonego.

Ćwiczenie 16.7. Niech $f \in \mathrm{Hol}(D)$, $g \in \widetilde{\mathrm{Hol}}(D)$ oraz $h \in \mathrm{Harm}(D)$. Niech ponadto $\varphi : \Omega \to D$ będzie holomorficzna, zaś $\psi : \Omega \to D$ antyholomorficzna. Uzasadnij, że $f \circ \varphi, g \circ \psi \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, $f \circ \psi, g \circ \varphi \in \widetilde{\mathrm{Hol}}(\Omega)$ oraz $h \circ \varphi, h \circ \psi \in \mathrm{Harm}(\Omega)$.

Ćwiczenie 16.8. Czy $h \circ \varphi$ jest holomorficzna, antyholomorficzna lub harmoniczna, jeśli h jest holomorficzna, antyholomorficzna lub harmoniczna, a φ jest harmoniczna?

Ważnym uzupełnieniem ćwiczenia 16.7 jest następujący wynik. Występująca w nim funkcja φ nazywana jest odwzorowaniem Riemanna.

Twierdzenie 16.9 (Twierdzenie Riemanna i twierdzenie Carathéodory'ego; bez dowodu). Jeśli Ω jest niepustym, spójnym i jednospójnym właściwym podzbiorem $\mathbb{C}$, to istnieje funkcja holomorficzna φ odwzorowująca Ω wzajemnie jednoznacznie na dysk jednostkowy $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Jeśli ponadto brzeg D jest krzywą Jordana, to φ rozszerza się do ciągłego, wzajemnie jednoznacznego odwzorowania $\overline{\Omega}$ w $\overline{D}$. □

Przykładem niech będzie funkcja

$$\varphi(z) = \frac{z+i}{1+iz}, \qquad \varphi^{-1}(z) = \frac{z-i}{1-iz},$$

wzajemnie jednoznacznie odwzorowująca górną półpłaszczyznę $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ w dysk jednostkowy D.

Odtąd zakładamy, że $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ oraz $D = D_1$, tj. D jest dyskiem jednostkowym. W tym przypadku funkcje holomorficzne i antyholomorficzne w D są dane odpowiednio szeregami

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\bar{z}^n,$$

zbieżnymi w D. Wobec tego funkcje harmoniczne w D są dane szeregiem

$$h(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\bar{z}^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\alpha}, \tag{16.1}$$

zbieżnym, gdy $z = re^{i\alpha} \in D$. Oznaczmy

$$f_r(\alpha) = h(re^{i\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\alpha}.$$

Otrzymujemy zatem $\hat{f_r}(n) = 2\pi a_n r^{|n|}$.

Niech P_r oznacza *jądro Poissona* dysku,

$$\begin{aligned} P_r(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\alpha} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-re^{i\alpha}} + \frac{re^{-i\alpha}}{1-re^{-i\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1+r^2-r(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\alpha} \end{aligned}$$

dla $r \in [0,1)$, $\alpha \in \mathbb{T}$. Niech ponadto

$$P_D\mu(re^{i\alpha}) = \mu * P_r(\alpha), \qquad P_D f(re^{i\alpha}) = f * P_r(\alpha)$$

dla $r \in [0,1)$, $\alpha \in \mathbb{T}$, $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ i $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Funkcje $P_D\mu$ oraz $P_D f$ nazywamy *całkami Poissona.*

Lemat 16.10. Jeśli $h \in \mathrm{Harm}(D)$ oraz współczynniki $2\pi a_n$ w rozwinięciu h w szereg (16.1) są współczynnikami Fouriera pewnej miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to $h = P_D\mu$. Przeciwnie, jeśli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to $P_D\mu \in \mathrm{Harm}(D)$ i $h = P_D\mu$ ma rozwinięcie (16.1), gdzie $2\pi a_n = \hat{\mu}(n)$.

Dowód. Dla dowolnej miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ zachodzi

$$2\pi P_D\mu(z) = \hat{\mu}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{(\mu)}(-n)\bar{z}^n.$$

W szczególności więc $P_D\mu \in \mathrm{Harm}(D)$. Teza wynika z porównania powyższego wzoru z (16.1). □

Lemat 16.11. Jądro Poissona dysku P_r jest regularną jednością aproksymatywną gdy $r \to 1^-$.

Dowód. Oczywiście P_r jest funkcją nieujemną o całce $\hat{P_r}(0) = r^0 = 1$. Ponadto P_r jest funkcją parzystą, malejącą na $[0,\pi]$ oraz

$$P_r(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{(1-r)^2+2r(1-\cos\alpha)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{2-2r}{2r(1-\cos\alpha)} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1-r}{r(\sin\frac{\alpha}{2})^2},$$

czyli P_r dąży do zera jednostajnie na każdym przedziale $[\varepsilon,\pi]$ gdy $r \to 1^-$. □

W szczególności $f * P_r$ dąży do f w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ gdy $r \to 1^-$ dla każdej funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, a także $f * P_r$ dąży do f jednostajnie gdy $r \to 1^-$ dla każdej funkcji $f \in C(\mathbb{T})$.

Lemat 16.12. Jeśli $h \in \mathrm{Harm}(D)$ oraz $f_r(\alpha) = h(re^{i\alpha})$, to $f_{rs} = f_s * P_r$ dla wszystkich $r, s \in [0, 1)$.

Dowód. Przypuśćmy, że h ma reprezentację (16.1) ze współczynnikami a_n. Funkcja $h_s(z) = h(sz)$ jest harmoniczna w D, a w jej reprezentacji postaci (16.1) współczynniki a_n zastąpione są przez $a_n s^{|n|}$. Ponieważ ciąg $a_n s^{|n|}$ jest sumowalny, są to współczynniki Fouriera pewnej funkcji f i wobec tego $h_s = P_D f$. Na mocy uwagi poprzedzającej lemat, $f_{rs}(\alpha) = h_s(re^{i\alpha})$ dąży jednostajnie do f, czyli $f = f_s$. □

Ćwiczenie 16.13. Wskaż przykład $h \in \mathrm{Harm}(D)$ (a nawet $h \in \mathrm{Hol}(D)$), która nie jest postaci $h = P_D\mu$ dla $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$.

Ćwiczenie 16.14. Wykaż, że dla $z = re^{i\alpha}$, $w = e^{i\beta}$ zachodzi

$$P_r(\alpha - \beta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2}\,.$$

Wywnioskuj, że jeśli $h \in \mathrm{Harm}(D)$ ma ciągłe rozszerzenie na $\overline{D}$, to

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2}\, h(w)\sigma(dw),$$

gdzie $\sigma(dw)$ oznacza miarę długości na ∂D.

Ćwiczenie 16.15. Funkcja $h(x_1, \ldots, x_d)$ jest harmoniczna w $D \subseteq \mathbb{R}^d$, jeśli ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe i $\Delta h = 0$ w D. Udowodnij, że jeśli h jest harmoniczna w kuli $B(0, r)$ i ma ciągłe rozszerzenie na $\overline{B}(0, 1)$, to

$$h(z) = \frac{1}{\sigma(\partial B(0, 1))} \int_{\partial B(0,1)} \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^d}\, h(w)\sigma(dw),$$

gdzie $\sigma(dw)$ oznacza miarę powierzchniową na ∂D.

Dla jednoznaczności przyjmujemy, że jeśli $h \in \mathrm{Harm}(D)$, to funkcja Hh harmonicznie sprzężona do h spełnia $Hh(0) = 0$. Wówczas $H(Hh)(z) = -h(z) + h(0)$. W tym przypadku h oraz Hh mają następujące rozwinięcia w szeregi:

$$h(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \bar{z}^n, \qquad \tilde{h}(z) = -i \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + i \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \bar{z}^n.$$

W istocie, wówczas $h + iHh$ jest holomorficzna, a $h - iHh$ jest antyholomorficzna w D. Zauważmy, że współczynniki rozwinięcia (16.1) dla funkcji Hh są dane przez $(-i \operatorname{sign} n)a_n$, gdzie a_n to współczynniki odpowiedniego rozwinięcia h. Zdefiniujmy zatem *sprzężone jądro Poissona* dysku wzorem

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_r(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \left(-i \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\alpha} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-ire^{i\alpha}}{1 - re^{i\alpha}} + \frac{ire^{-i\alpha}}{1 - re^{-i\alpha}} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{ire^{-i\alpha} - ire^{i\alpha}}{1 + r^2 - r(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})} = \frac{1}{2\pi} \frac{2r \sin \alpha}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha}\,,
\end{aligned}$$

a także sprzężoną całkę Poissona

$$\tilde{P}_D\mu(re^{i\alpha}) = \mu * \tilde{P}_r(\alpha), \qquad \tilde{P}_D f(re^{i\alpha}) = f * \tilde{P}_r(\alpha)$$

dla $r \in [0,1)$ oraz $\alpha \in \mathbb{T}$.

Jeśli zatem $h = P_D\mu$, to $Hh = \tilde{P}_D\mu$. Jeśli ponadto $Hh = P_D\tilde{\mu}$, to piszemy $\tilde{\mu} = H\mu$ i nazywamy $\tilde{\mu}$ *transformatą Hilberta* μ. Gdy jedna z miar μ, $\tilde{\mu}$ ma gęstość, stosujemy podobne zapisy, a więc jeśli $h = P_D f$ i $Hh = P_d\tilde{f}$, to piszemy $\tilde{f} = Hf$.

Nasz cel to uzyskanie odpowiedzi na następujące pytania: kiedy $h \in \operatorname{Harm}(D)$ wyraża się jako całka Poissona funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, kiedy Hh jest całką Poissona $g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ oraz jaki jest związek między regularnością f i $g = Hf$. Pierwsze pytanie jest względnie proste. Wpierw podamy wynik nieco innego rodzaju, ale posiadający liczne zastosowania.

> Twierdzenie 16.16 (twierdzenie Herglotza). Jeśli $h \in \operatorname{Harm}(D)$ i $h \geqslant 0$, to $h = P_D\mu$ dla pewnej miary nieujemnej $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$. Ponadto μ jest słabą granicą miar $h(re^{i\alpha})d\alpha$ gdy $r \to 1^-$.

Dowód. Niech $f_r(\alpha) = h(re^{i\alpha})$. Zachodzi

$$\|f_r\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f_r(\alpha)d\alpha = 2\pi h(0).$$

Wobec tego (nieujemne) miary $f_r(\alpha)d\alpha$ mają wahanie całkowite ograniczone przez $2\pi h(0)$. Ponieważ $\mathscr{M}(\mathbb{T})$ jest przestrzenią dualną do $C(\mathbb{T})$, na mocy twierdzenia Banacha–Alaoglu, istnieje ciąg r_n zbieżny do 1, dla którego $f_{r_n}(\alpha)d\alpha$ dąży słabo (ściślej: *-słabo) do pewnej miary $\mu \in M(\mathbb{T})$. Oczywiście μ jest nieujemna. Ponadto gdy $r \in [0,1)$, ciąg funkcji f_{rr_n} dąży jednostajnie z jednej strony do f_r, a z drugiej do

$$\lim_{n\to\infty} f_{rr_n} = \lim_{n\to\infty} f_{r_n} * P_r = \mu * P_r.$$

Wobec tego $f_r = \mu * P_r$, czyli $h = P_D\mu$. Stąd oczywiście wynika, że $f_r(\alpha)d\alpha = \mu * P_r(\alpha)d\alpha$ dąży słabo do μ gdy $r \to 1^-$. □

Odpowiedź na pierwsze pytanie podana jest w następującym klasycznym twierdzeniu.

> Twierdzenie 16.17 (twierdzenie o reprezentacji Poissona). Niech $p \in (1,\infty]$. Jeśli $h \in \operatorname{Harm}(D)$, $f_r(\alpha) = h(re^{i\alpha})$ oraz $\|f_r\|_p$ jest ograniczone dla $r \in [0,1)$, to $h = P_D f$ dla pewnej funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ oraz f jest granicą f_r w sensie $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ gdy $r \to 1^-$. W przypadku $p = 1$ przy tych samych założeniach zachodzi $h = P_D\mu$ dla pewnej miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, która jest słabą granicą miar $f_r(x)dx$ gdy $r \to 1^-$.

Dowód. Dowód drugiej części jest niemal identyczny, jak dowód twierdzenia Herglotza, z tą różnicą, że μ może być miarą zespoloną. Dowód pierwszej części również jest podobny. Niech $f_r(\alpha) = h(re^{i\alpha})$. Na mocy twierdzenia Banacha–Alaoglu, istnieje ciąg r_n zbieżny do 1, dla którego f_{r_n} dąży *-słabo w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ do pewnej funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ (bowiem $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ jest przestrzenią dualną do $\mathscr{L}^q(\mathbb{T})$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Gdy $r \in [0,1)$, ciąg funkcji f_{rr_n} dąży z jednej strony jednostajnie do f_r, a z drugiej punktowo do

$$\lim_{n\to\infty} f_{rr_n} = \lim_{n\to\infty} f_{r_n} * P_r = f * P_r$$

(bo $P_r \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R})$). Stąd $f_r = f * P_r$, czyli $h = P_D f$ i wobec tego f_r dąży do f w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ gdy $r \to 1^-$. □

Zauważmy, że jeśli $p \in [1, \infty)$, $h \in \mathrm{Harm}(D)$ oraz $f_r(\alpha) = h(re^{i\alpha})$, to $\|f_r\|_p \leqslant \|f_s\|_p$ gdy $0 \leqslant r \leqslant s < 1$. W istocie, $f_r = f_s * P_{s/r}$ i rozważana nierówność wynika z nierówności Younga.

Odpowiedzi na pozostałe dwa pytania częściowo zawarte są w kolejnym rozdziale.

17. **Własności odwzorowania sprzężonego**

Niech D oznacza dysk jednostkowy w $\mathbb{C}$, niech $h \in \mathrm{Harm}(D)$ i niech $\tilde{h} \in \mathrm{Harm}(D)$ będzie harmonicznie sprzężona do h. Dla $r \in [0,1)$ i $\alpha \in \mathbb{T}$ oznaczmy $f_r(\alpha) = h(re^{i\alpha})$ oraz $g_r(\alpha) = \tilde{h}(re^{i\alpha})$. Przypomnijmy, że jeśli $h = P_D\mu$, to $f_r = \mu * P_r$ oraz $g_r = \mu * \tilde{P}_r$, gdzie P_r i $\tilde{P}_r$ to zwykłe i sprzężone jądro Poissona dysku. Poniżej rozważamy wyłącznie przypadek miar μ z gęstością $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ dla pewnego $p \in [1,\infty]$ i szukamy funkcji $g = Hf$ takiej, że $\tilde{h} = P_D g$.

Przypuśćmy, że $p \in (1,\infty)$. Na mocy twierdzenia 16.17 jeśli funkcja g istnieje, to jest granicą w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ funkcji $g_r = f * \tilde{P}_r$ gdy $r \to 1^-$. Powtarzając dowód twierdzenia 15.3 otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 17.1. Rozważmy granice

$$Hf(\alpha) = \lim_{r\to 1^-} f * \tilde{P}_r(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi}\int_{(-\pi,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\pi)} \frac{f(\alpha-\beta)}{\tan\frac{\beta}{2}}\, d\beta.$$

Wówczas:

(1) dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ dla $p \in (1,\infty)$ powyższe granice istnieją (i są sobie równe) prawie wszędzie i w $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ oraz określają ograniczony operator H na $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$;

(2) dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ powyższe granice istnieją (i są sobie równe) prawie wszędzie i określają operator H słabego typu $1,1$;

(3) dla $p \in (1,\infty)$ i $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ zachodzi $(Hf)\hat{}(n) = (-i\,\mathrm{sign}\, n)\hat{f}(n)$.

W szczególności oznacza to, że dla $p \in (1,\infty)$ jeśli $h \in \mathrm{Harm}(D)$ jest całką Poissona pewnej funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, to funkcja harmonicznie sprzężona $\tilde{h}$ również jest całką Poissona funkcji z $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$. Ten wynik nie jest jednak prawdziwy dla $p = 1$ oraz $p = \infty$. Poniżej podamy bez dowodu wyniki częściowo opisujące przypadek $p = 1$.

Z jądrem Poissona stowarzyszona jest *radialna funkcja maksymalna*:

$$M_{\mathrm{r}}h(\alpha) = \sup\{|h(re^{i\alpha})| : r \in [0,1)\}.$$

Poniższy wynik stwierdza, że jeśli h jest całką Poissona f, to funkcja $M_{\mathrm{r}}h$ jest porównywalna z operatorem maksymalnym Hardy'ego–Littlewooda na f.

Lemat 17.2. Jeśli h jest nieujemna, $h \in \mathrm{Harm}(D)$ i $h(re^{i\alpha}) = \mu * P_r(\alpha)$, to

$$M_{\mathrm{r}}h(\alpha) \leqslant M\mu(\alpha) \leqslant (1+\pi^2)M_{\mathrm{r}}h(\alpha),$$

gdzie dla $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$,

$$M\mu(\alpha) = \sup\left\{\frac{|\mu|((\alpha-\pi r, \alpha+\pi r))}{2\pi r} : r \in (0,1)\right\}.$$

Dowód. Ponieważ P_r jest parzysta i malejąca na $[0,\pi]$,

$$\tfrac{1}{2\pi r}\mathbb{1}_{(-\pi r,\pi r)}(\alpha) \leqslant \tfrac{1}{2\pi r}\,\tfrac{P_{1-r}(\alpha)}{P_{1-r}(\pi r)}\,.$$

Ponadto

$$\frac{1}{2\pi r P_{1-r}(\pi r)} = \frac{r^2 + 2(1-r)(1-\cos(\pi r))}{r(1-(1-r)^2)} \leqslant \frac{r^2+\pi^2 r^2(1-r)}{r^2(2-r)} \leqslant 1+\pi^2.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2\pi r}\mu((\alpha-\pi r,\alpha+\pi r)) &= \tfrac{1}{2\pi r}\mu * \mathbb{1}_{(-\pi r,\pi r)}(\alpha)\\ &\leqslant (1+\pi^2)\mu * P_{1-r}(\alpha) = (1+\pi^2)h((1-r)e^{i\alpha}).\end{aligned}$$

To dowodzi górnego oszacowania. Oszacowanie dolne zachodzi na mocy lematu 13.11 (w wersji dla $\mathbb{T}$). □

Definicja 17.3. Niech $p \in (0,\infty)$, $h \in \mathrm{Harm}(D)$. Mówimy, że h należy do *rzeczywistej przestrzeni Hardy'ego* na D, co zapisujemy $h \in H^p(D)$, jeśli $M_{\mathrm{r}}h \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ (tzn. $(M_{\mathrm{r}}h)^p$ jest całkowalna). Określamy ponadto $\|h\|_{H^p(D)} = \|M_{\mathrm{r}}h\|_p$.

Wiemy już, że gdy $p \in (1,\infty)$, to $h \in H^p(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h = P_D f$ dla pewnej funkcji $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, a z porównywalności radialnego operatora maksymalnego z operatorem maksymalnym Hardy'ego–Littlewooda i własności tego drugiego otrzymujemy jednostajną porównywalność norm $\|h\|_{H^p(D)}$ oraz $\|f\|_p$. W szczególności wiemy więc, że $h \in H^p(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{h} \in H^p(D)$.

Powyższy wynik jest prawdziwy dla wszystkich $p \in (0,\infty)$. Szczególnie ważny jest przypadek $p = 1$, jeśli bowiem $h \in H^1(D)$, to $h = P_D f$ dla pewnej funkcji $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ i wobec tego również $\tilde{h} = P_D g$ dla pewnej $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

[cdn.]