Lista zadań nr 1

1. Dlaczego $\mathscr{P}$ nie jest gęstym podzbiorem $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$?
2. Wywnioskuj, że funkcje $f_n(x) = \cos(nx)$ $(n \geqslant 0)$ oraz $g_n(x) = \sin(nx)$ $(n \geqslant 1)$ tworzą (łącznie) układ ortogonalny zupełny na $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$.
3. Wywnioskuj, że funkcje $f_n(x) = \cos(nx)$ $(n \geqslant 0)$ tworzą układ ortogonalny zupełny na $\mathscr{L}^2([0,\pi])$.
4. Wywnioskuj, że funkcje $f_n(x) = \sin(nx)$ $(n \geqslant 1)$ tworzą układ ortogonalny zupełny na $\mathscr{L}^2([0,\pi])$.
5. Podaj analogiczne cztery zupełne układy ortogonalne funkcji w $\mathscr{L}^2([a,b])$ dla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
6. Znajdź rozwinięcia w (zespolony) szereg Fouriera funkcji

   $$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = x, \qquad f_3(x) = |x|,$$
   $$f_4(x) = \mathbb{1}_{(0,\pi)}(x) - \mathbb{1}_{(-\pi,0)}(x), \qquad f_5(x) = |\sin x|, \qquad f_6(x) = \sin\tfrac{x}{2}$$

   (wszystkie funkcje określone na przedziale $[-\pi,\pi)$).
7. Znajdź rozwinięcia w (zespolony) szereg Fouriera miary δ_0 i ogólniej δ_a (gdzie $\delta_a(E) = \mathbb{1}_E(a)$ jest miarą Diraca skupioną w a).
8. Sprawdź, że jeśli $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$, to $\hat{f} = a_1 \hat{f_1} + a_2 \hat{f_2}$ $(f_1, f_2 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T}),\ a_1, a_2 \in \mathbb{C})$.
9. Wywnioskuj z twierdzenia 2.10, że jeśli $f \in \mathscr{L}^2([0,\pi])$, to

   $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

   (*szereg cosinusów* bezwzględnie zbieżny w $\mathscr{L}^2([0,\pi])$), gdzie dla $n \geqslant 1$,

   $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx.$$
10. Udowodnij analogicznie, że jeśli $f \in \mathscr{L}^2([0,\pi])$, to

    $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

    (*szereg sinusów* bezwzględnie zbieżny w $\mathscr{L}^2([0,\pi])$), gdzie dla $n \geqslant 1$,

    $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx.$$
11. Wykorzystując poprzednie ćwiczenia i związek pomiędzy różnymi rodzajami szeregów Fouriera (zespolony, cosinusów, sinusów), znajdź rozwinięcia w szereg sinusów i szereg cosinusów funkcji

    $$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = x, \qquad f_3(x) = \sin x$$

    (wszystkie funkcje określone na przedziale $[0,\pi]$).