Lista zadań nr 2

1. Dlaczego powyższy wniosek nie stosuje się do $f(x) = x$ mimo, że funkcja ta jest dowolnie wiele razy różniczkowalna?
2. Znając współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f(x) = x$, wyznacz rozwinięcie funkcji $f(x) = x^2$ (w obu przypadkach $x \in [-\pi, \pi)$).
3. W podobny sposób znajdź rozwinięcie funkcji $f(x) = x^3 - \pi^2 x$, a następnie $g(x) = x^3$ (ponownie $x \in [-\pi, \pi)$).
4. Niech $\alpha \in (-1, 1)$ oraz $f(x) = |x|^\alpha$ dla $x \in [-\pi, \pi)$. Uzasadnij, że $|n|^{1+\alpha}\hat{f}(n)$ ma granicę przy $n \longrightarrow \pm\infty$.
5. Niech $a \in (0, \pi)$, $\vartheta \in (0, \frac{1}{2}]$ i niech I_n będzie ciągiem przybliżeń zbioru Cantora: $I_0 = (-a, a)$, $I_{k+1} = (-(1-\vartheta)a + \vartheta I_k) \cup ((1-\vartheta)a + \vartheta I_k)$ dla $k = 0, 1, \ldots$ Niech ponadto $f_k(x) = (\frac{1}{2\vartheta})^k \mathbb{1}_{I_k}(x)$. Uzasadnij, że
$$f_{k+1}(x) = \frac{f_k(\frac{x+a}{\vartheta} - a) + f_k(\frac{x-a}{\vartheta} + a)}{2\vartheta}\,.$$
Wykorzystaj ten fakt do indukcyjnego dowodu równości
$$\int_{-a}^{a} f_k(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{2\sin(\vartheta^k a\xi)}{\vartheta^k \xi} \prod_{j=0}^{k-1} \cos(\vartheta^j (1-\vartheta) a\xi)$$
dla $\xi \neq 0$ oraz $k = 0, 1, \ldots$
6. Niech μ oznacza *słabą granicę ciągu miar $f_k(x)dx$ z poprzedniego ćwiczenia, czyli *miarę Cantora* (dlaczego granica w istocie istnieje?). Wywnioskuj, że
$$\hat{\mu}(n) = 2a \prod_{j=0}^{\infty} \cos(\vartheta^j (1-\vartheta) na).$$
Rozważ na przykład $\vartheta = \frac{1}{3}$, $a = \frac{\pi}{2}$ oraz $n = 3^k$, aby uzasadnić, że istnieją miary ciągłe, które nie spełniają tezy lematu Riemanna–Lebesgue'a.

   Uwaga: Badanie własności powyższego nieskończonego iloczynu jest subtelnym zagadnieniem. Więcej na ten temat mówi jedno z twierdzeń Wienera–Wintnera z artykułu On singular distributions *(J. Math. Phys. 17, 1939: 233–246).*