Lista zadań nr 3

1. Udowodnij, że splot jest przemienny, łączny i dwuliniowy.
2. Zauważ, że $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$ dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ i $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$. Podobnie zauważ, że $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$ dla $f, g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$. Udowodnij, że $\|\mu * f\| \leqslant \|\mu\| \|f\|_1$ oraz $\|\mu * \nu\| \leqslant \|\mu\| \|\nu\|$ dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$. Wywnioskuj, że splot jest ciągłym przekształceniem z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T}) \times \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$, z $\mathscr{L}^2(\mathbb{T}) \times \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ itd.
3. Niech $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Dla $f \in C(\mathbb{T})$ określmy $\Lambda f = f * g(0)$. Zauważ, że Λ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na $C(\mathbb{T})$. Przybliżając funkcję $\operatorname{sign} \overline{g(-x)}$ przy pomocy funkcji ciągłych, wyznacz normę Λ.
4. Niech $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. Dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ określmy $Tf(x) = f * g$. Wiemy już, że T jest ciągłym operatorem liniowym na $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ i $C(\mathbb{T})$. Wyznacz normę tego operatora na każdej z tych przestrzeni w przypadku, gdy $g \in C(\mathbb{T})$. Możesz wrócić do tego zadania w pełnej ogólności po rozdziale 6.
5. Niech $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$. Dla $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ określmy $Tf(x) = f * g$. Sprawdź, że T jest ciągłym operatorem liniowym z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ i wyznacz jego normę w przypadku, gdy $g \in C(\mathbb{T})$. Możesz wrócić do tego zadania w pełnej ogólności po rozdziale 6.
6. Udowodnij, że $S_k f(x) \to a$ gdy $k \to \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{S}_k f(x) \to a$ gdy $k \to \infty$.
7. Wykaż, że dla $e_n(x) = e^{inx}$ ($n \in \mathbb{Z}$) zachodzi $S_k e_n = e_n$ gdy $k \geqslant |n|$ oraz $S_k e_n = 0$ gdy $0 \leqslant k < |n|$. Wyznacz analogicznie $S_k f$ dla $f(x) = \cos(nx)$ oraz $f(x) = \sin(nx)$.
8. Uzasadnij, że jeśli $g = S_k f$, to $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ gdy $|n| \leqslant k$, $\hat{g}(n) = 0$ w przeciwnym przypadku.
9. Zauważ, że S_k (zawężone do $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$) jest rzutem ortogonalnym na przestrzeń wielomianów trygonometrycznych stopnia co najwyżej k (przy naturalnej definicji *stopnia* wielomianu trygonometrycznego — jakiej?).
10. Sporządź wykresy kilku pierwszych funkcji D_k i $\tilde{D}_k$.
11. Udowodnij, że dla $k \geqslant 1$ zachodzi
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{D}_k(x) dx = 1.$$
12. Udowodnij, że $|D_k(x)| \leqslant \min(2k+1, \frac{\pi}{|x|})$ dla $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ i $k \geqslant 0$.
13. Wyznacz normy operatorów S_k i $\tilde{S}_k$, działających z $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ w $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$.
14. Udowodnij, że istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$, takie że
$$C_1 \ln(1+n) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\tan \frac{x}{2}} \right| dx \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right| dx \leqslant C_2 \ln(1+n)$$
dla wszystkich $n \geqslant 0$. Wykorzystaj to do oszacowania norm operatorów S_k oraz $\tilde{S}_k$, działających na $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ oraz na $C(\mathbb{T})$, a także funkcjonałów $\Lambda_k f = S_k f(0)$ oraz $\tilde{\Lambda}_k f = \tilde{S}_k f(0)$ na przestrzeni $C(\mathbb{T})$.
15. Z poprzedniego ćwiczenia i zasady Banacha–Steinhausa wywnioskuj, że istnieje funkcja $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, dla której ciąg $S_k f$ nie jest zbieżny w $\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. W podobny sposób wykaż, że istnieje funkcja $f \in C(\mathbb{T})$, dla której ciąg $S_k f(0)$ nie jest zbieżny.
16. Udowodnij, że ciąg
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right| dx - \frac{4}{\pi^2} \ln(1+n)$$
jest zbieżny. (Nie jest to bardzo trudne, ale raczej nieprzydatne).