Lista zadań nr 4

1. Udowodnij, że jeśli $f \in C^1(\mathbb{T})$ oraz f' spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$ (co jest często zapisywane w postaci $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$), to szereg Fouriera f jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny do f.

2. Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są sumowalne, to klasyczny szereg Fouriera

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

jest bezwzględnie jednostajnie zbieżny. Udowodnij wynikanie przeciwne. Udowodnij ponadto, że wystarcza w istocie punktowa (niekoniecznie jednostajna) bezwzględna zbieżność.

3. Badając rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(x) = |x|$, wyznacz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

4. Badając rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(x) = x$, wyznacz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} + \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} \right).$$

5. Znajdź informacje na temat tzw. *efektu Gibbsa.*

6. Udowodnij, że szeregi Fouriera funkcji całkowalnych można całkować wyraz po wyrazie nawet wtedy, gdy nie są zbieżne.

   Ściślej: udowodnij, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\hat{f}(0)(b-a)}{2\pi} + \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \{-k,\ldots,k\} \setminus \{0\}} \hat{f}(n) \, \frac{e^{inb} - e^{ina}}{in},$$

przy czym szereg po prawej stronie jest zbieżny nawet wtedy, gdy szereg Fouriera funkcji f nie jest zbieżny.

   Wywnioskuj, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ odpowiada klasycznemu szeregowi Fouriera

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

to nawet jeśli powyższy szereg nie jest zbieżny, zachodzi

$$\int_a^b f(x)dx = a_0(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \, \frac{\sin(nb) - \sin(na)}{n} - b_n \, \frac{\cos(nb) - \cos(na)}{n} \right)$$

i szereg po prawej stronie jest zbieżny.

7. Zapisz analogiczny wzór na $\mu([a,b])$ dla $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ spełniających warunek $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$. Co wyraża ten wzór, gdy μ ma atom w a lub b?

8. Zauważ, że dla każdej miary $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ o własności $\mu(\mathbb{T}) = 0$ istnieje dokładnie jedna dystrybuanta f miary μ, która spełnia warunek $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, tj. $\hat{f}(0) = 0$. Ponadto udowodniliśmy już, że $\hat{f}(n) = \hat{\mu}(n)/(in)$ dla $n \neq 0$. Wprowadźmy oznaczenie $f = I(\mu)$; gdy $\mu(dx) = g(x)dx$, piszemy $f = I(g)$.

(a) Niech $\mu(dx) = \delta_0(dx) - \frac{1}{2\pi}dx$, tj. $\mu(E) = \mathbb{1}_E(0) - \frac{1}{2\pi}|E|$. Udowodnij, że dla $k \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^k \pi\, I^{2k}(\mu)(0), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \pi\, I^{2k}(\mu)(\pi),$$

gdzie I^{2k} oznacza $2k$-krotne złożenie operacji I, tj. $I^{2k}(\mu) = I(I(\ldots I(\mu)\ldots))$.

(b) Wyznacz wartości powyższych sum dla $k = 1$ i $k = 2$.

(c) Przy pomocy komputera wyznacz wartości powyższych sum dla kilku większych wartości k.

(d) Podaj analogiczny sposób wyznaczania sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2k}}.$$

9. Przypuśćmy, że f, g są funkcjami borelowskimi na przedziale (a, b), g jest nieujemna,

$$F(s) = \int_s^b f(t)dt, \qquad G(s) = \int_s^b g(t)dt$$

są skończone dla $s \in (a, b)$, $G(s) \to \infty$ gdy $s \to a^+$ oraz $|f(s)|/g(s) \to 0$ gdy $s \to a^+$. Udowodnij, że $|F(s)|/G(s) \to 0$ gdy $s \to a^+$.

10. Wywnioskuj, że jeśli h jest rosnąca na $(0, \pi]$ oraz $h(s) \to 0$ gdy $s \to 0^+$, to

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\varepsilon \int_\varepsilon^\pi \frac{h(s)}{s^2}\, ds \right) = 0.$$