Lista zadań nr 5

1. Udowodnij, że jeśli ciąg a_n jest zbieżny do a, to ciąg *średnich Cesàro*

$$b_k = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} a_n$$

również jest zbieżny do a. Uzasadnij, że twierdzenie przeciwne nie jest prawdziwe.

2. Dowiedz się o sumowaniu metodą Abela.

3. Udowodnij, że gdy $k \geqslant 0$, to

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_k(x)dx = 1.$$

4. Udowodnij, że $0 \leqslant F_k(x) \leqslant \min(k+1, \frac{1}{k+1}\pi^2/x^2)$ dla każdego $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

5. Udowodnij, że $F_k(x) \longrightarrow 0$ gdy $k \longrightarrow \infty$ dla każdego $x \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$.

6. Udowodnij, że gdy $0 \leqslant k \leqslant l$, to

$$S_k F_l(x) = \frac{k+1}{l+1} F_k(x) + \frac{l-k}{l+1} D_k(x).$$

7. Uzasadnij, że ciąg $\frac{1}{2\pi}F_k$ spełnia warunek (A) z $\varepsilon_k = 0$, warunek (B) z $\varepsilon_k = \sqrt{\pi/(k+1)}$ oraz warunek (C) z $\varepsilon_k = \sqrt[3]{\pi/(2k+2)}$.

8. Udowodnij, że jeśli funkcje $\varphi_k \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ przyjmują wartości rzeczywiste oraz

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\right)\varphi_k(x)dx = 0$$

dla każdego $\varepsilon > 0$, to spełniony jest warunek (B). Sformułuj analogiczne twierdzenie dla warunku (C).

9. Uzupełnij dowód części (c) i (d) twierdzenia 6.12.

10. Niech φ_k będzie jednością aproksymatywną oraz $\tilde{\varphi}_k(x) = \varphi_k(-x)$. Udowodnij, że dla $f \in C(\mathbb{T})$ i $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ zachodzi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mu * \varphi_k(x) f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f * \tilde{\varphi}_k(x)\mu(dx).$$

Wywnioskuj, że jeśli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to $\mu * \varphi_k(x)dx$ dąży *słabo do μ.

11. Wywnioskuj z poprzedniego ćwiczenia, że jeśli $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, to $\sigma_k\mu(x)dx$ dąży *słabo do μ. W szczególności jeśli $\hat{\mu}(n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$, to $\mu = 0$.