Lista zadań nr 9

1. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dla $x \in \mathbb{Q}$ niech $|x|_p = p^{-n}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$ ma następującą własność: licznik i mianownik liczby $p^{-n}x$ (zapisanej w postaci nieskracalnej) nie dzielą się przez p. Przyjmujemy ponadto $|0|_p = 0$. Udowodnij, że $d_p(x,y) = |x-y|_p$ jest metryką na $\mathbb{Q}$, w której działania dodawania i mnożenia są ciągłe.

2. Zbiór *liczb p-adycznych* $\mathbb{Q}_p$ to uzupełnienie przestrzeni metrycznej $\mathbb{Q}$ z metryką d_p. Udowodnij, że elementy $\mathbb{Q}_p$ można w naturalny sposób utożsamić z *formalnymi* szeregami $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p^n$, w których $a_n \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ oraz $a_n = 0$ dla dostatecznie *małych* n. Wykaż ponadto, że działania dodawania i mnożenia są zgodne z naturalnymi definicjami, tj. dodawanie odbywa się z przeniesieniem po współrzędnych, zaś mnożenie jest iloczynem Cauchy'ego szeregów z przeniesieniem. Wywnioskuj, że $\mathbb{Q}_p$ jest grupą lokalnie zwartą, a także ciałem liczbowym (z wyżej opisanymi definicjami dodawania i mnożenia).

3. Zbiór *całkowitych liczb p-adycznych* $\mathbb{Q}_p^*$ (zwany często *odometrem*) to analogiczne uzupełnienie zbioru $\mathbb{Z}$ w metryce d_p, czyli równoważnie — domknięcie zbioru $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}_p$. Wykaż, że $\mathbb{Q}_p^*$ jest zwartą grupą topologiczną.

4. Niech D będzie dowolnym symetrycznym otoczeniem 0 o zwartym domknięciu, zaś G' najmniejszą domkniętą podgrupą G zawierającą D. Udowodnij, że jeśli $D_1 = D$, $D_{n+1} = D+D_n = \{x+y : x \in D, y \in D_n\}$, to $G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, wobec czego G' jest zbiorem otwarto-domkniętym, σ-zwartym (tj. będącym sumą przeliczalnie wielu zbiorów zwartych).

5. Wskaż miary Haara na $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}^d$, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ i $\mathbb{Q}_p^*$.

6. Udowodnij, że miara Haara jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy G jest zwarta.

7. Udowodnij, że miara Haara jest σ-skończona (tj. jest sumą przeliczalnie wielu miar skończonych) wtedy i tylko wtedy, gdy G jest σ-zwarta (tj. jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów zwartych).

8. Udowodnij, że miara Haara jest symetryczna, tj. $\mu(E) = \mu(-E)$ dla wszystkich borelowskich E.

9. Udowodnij, że $\hat{G}$ jest grupą topologiczną.

10. Niech $D \subseteq G$ będzie otoczeniem 0 i $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, oraz niech

    $$\hat{K} = \{\varphi \in \hat{G} : \varphi(x) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \text{ dla } x \in D\}$$

    (utożsamiamy $\mathbb{T}$ z przedziałem $[-\pi, \pi)$). Uzasadnij, że dla $n \geqslant 1$ istnieje otoczenie zera D_n o zwartym domknięciu i takie, że $D_n + D_n + \ldots + D_n \subseteq D$ (n składników po lewej stronie). Dowiedź, że $|\varphi(x)| \in [-\frac{\varepsilon}{n}, \frac{\varepsilon}{n}]$ dla $x \in D_n$ oraz $\varphi \in \hat{K}$. Wywnioskuj, że funkcje z $\hat{K}$ są jednakowo ciągłe i wobec tego $\hat{K}$ jest zwarty na mocy twierdzenia Arzeli–Ascoliego. Wywnioskuj, że grupa $\hat{G}$ jest lokalnie zwarta.

11. Niech $x \in G$ oraz $\psi_x : \hat{G} \to \mathbb{T}$, $\psi_x(\varphi) = \varphi(x)$. Udowodnij, ψ_x jest charakterem na $\hat{G}$.

12. Udowodnij, że jeśli G jest zwarta, to funkcje $e^{i\psi(x)}$, gdzie $\psi \in \hat{G}$, są wzajemnie ortogonalne względem miary Haara. Wywnioskuj, że w tej sytuacji $\hat{G}$ jest grupą dyskretną.

13. Udowodnij, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ jest ciągła, to istnieje ciągła funkcja $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x)$ przystaje do $\tilde{f}(x)$ modulo 2π (tzn. $f(x) = \tilde{f}(x) + 2\pi\mathbb{Z}$). Wykaż, że funkcja $\tilde{f}$ jest wyznaczona jednoznacznie, jeśli zażądamy, by $f(0) \in [0, 2\pi)$. Przy tym założeniu

udowodnij (rozważając funkcję $\tilde{f}(x+y)-\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)$), że jeśli f jest homomorfizmem, to również $\tilde{f}$ jest homomorfizmem.

14. Udowodnij, że wszystkie charaktery na $\mathbb{R}$ są postaci $\varphi_\xi(x) = \xi x \pmod{2\pi}$ (tzn. $\varphi_\xi(x) = \xi x + 2\pi\mathbb{Z}$) dla pewnego $\xi \in \mathbb{R}$. Wywnioskuj, że $\hat{\mathbb{R}}$ jest izomorficzna z $\mathbb{R}$.
15. Udowodnij, że wszystkie charaktery na $\mathbb{T}$ są postaci $\varphi_n(x) = nx \pmod{2\pi}$ (tzn. $\varphi_\xi(x+2\pi\mathbb{Z}) = nx + 2\pi\mathbb{Z}$) dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$. Wywnioskuj, że $\hat{\mathbb{T}}$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$.
16. Zauważ, że wszystkie charaktery na $\mathbb{Z}$ są postaci $\varphi_\xi(k) = \xi k \pmod{2\pi}$ (tzn. $\varphi_\xi(k) = \xi k + 2\pi\mathbb{Z}$) dla pewnego $\xi \in [0, 2\pi)$. Wywnioskuj, że $\hat{\mathbb{Z}}$ jest izomorficzna z $\mathbb{T}$.
17. Zauważ, że wszystkie charaktery na $\mathbb{Z}_p$ są postaci $\varphi_n(k) = nk \pmod{p}$ (tzn. $\varphi_n(k) = nk + p\mathbb{Z}$) dla pewnego $n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Wywnioskuj, że $\hat{\mathbb{Z}}_p$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_p$.
18. Udowodnij, że grupa dualna do G^d jest kanonicznie izomorficzna z $\hat{G}^d$.
19. Opisz grupy dualne do $\mathbb{Q}_p$ i $\mathbb{Q}_p^*$.
20. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathscr{L}^1(G)$, to $\hat{f} \in C(\hat{G})$.
21. Niech $f \in \mathscr{L}^1(G)$ i niech $\tau_x(f)(y) = f(x+y)$. Udowodnij (wykorzystując gęstość $C_c(G)$ w $\mathscr{L}^1(G)$), że $\|\tau_x f - f\|_1 \to 0$ gdy $x \to 0$ w G.
22. Udowodnij *lemat Riemanna–Lebesgue'a*: jeśli $f \in \mathscr{L}^1(G)$, to $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$ (tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $\hat{K} \subseteq \hat{G}$ taki, że $|\hat{f}(\varphi)| < \varepsilon$ gdy $\varphi \in \hat{G} \setminus \hat{K}$). W tym celu rozważ otoczenie zera $D_\varepsilon \subseteq G$ dla którego $\|\tau_x f - f\|_1 < \varepsilon$.
23. Udowodnij, że jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(G)$, to splot $f * g(x)$ jest poprawnie określony dla prawie wszystkich $x \in G$ i wówczas $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.
24. Zauważ, że jeśli $f, g \in \mathscr{L}^2(G)$ lub $f \in \mathscr{L}^1(G)$ i $g \in \mathscr{L}^\infty(G)$, to splot $f * g(x)$ jest poprawnie określony dla wszystkich $x \in G$ i $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$ albo $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty$.
25. Zauważ, że splot jest przemienny i łączny.
26. Udowodnij, że jeśli $f, g \in \mathscr{L}^1(G)$, to transformatą Fouriera $f * g$ jest $\hat{f}(\varphi)\hat{g}(\varphi)$.