imię i nazwisko: ____________________________ numer indeksu: ________________

Egzamin z analizy matematycznej 1

Rozwiązania należy pisać na poniższym arkuszu. W razie potrzeby należy prosić o dodatkowe kartki egzaminatorów. Podczas egzaminu niedozwolone jest korzystanie z notatek i urządzeń elektronicznych.
Przypadki niesamodzielnej lub nieuczciwej pracy będą zgłaszane Dziekanowi WPPT. Zgodnie z §6 i §19 regulaminu studiów za naruszenie przepisów student może zostać skreślony z listy studentów.

____
(podpis studenta)

1. (a) Sformułuj twierdzenie o trzech ciągach (albo o trzech funkcjach).(1p)

   (b) Oblicz granicę ciągu (a_n) danego wzorem $a_n = \sqrt[n]{2^n + 1}$.(2p)

2. (a) Podaj definicję (sam wzór) pochodnej funkcji f w punkcie a.(1p)

   (b) Oblicz z definicji (i nie korzystając z reguły de l'Hospitala) pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie -1.(2p)

3. Korzystając z reguły de l'Hospitala, oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.(3p)

4. (a) Sformułuj wzór na całkowanie przez podstawienie.$^{(1p)}$

(b) Sformułuj wzór na całkowanie przez części.$^{(1p)}$

(c) Oblicz całkę $\int x^3 \sin(x^2)\mathrm{d}x.^{(3p)}$

(d) Oblicz całkę $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1-\cos x}{\sin x}\, dx.^{(3p)}$

5. (a) Sformułuj wzór na pochodną złożenia $g \circ f$.$^{(1p)}$

(b) Oblicz pochodną funkcji $h(x) = \cos(\operatorname{arctg} x)$.$^{(2p)}$

(c) Wylicz, że $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Wykorzystaj w tym celu wzór $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.$^{(2p)}$

(d) Oblicz jeszcze raz pochodną funkcji $h(x)$, tym razem wykorzystując wzór z poprzedniego podpunktu.$^{(2p)}$

(e) Znajdź wartość najmniejszą i największą (o ile istnieją) funkcji h oraz $\sup_{x\in\mathbf{R}} h(x)$ i $\inf_{x\in\mathbf{R}} h(x)$.$^{(3p)}$

6. (a) Podaj dwie definicje ciągłości funkcji f w punkcie a.$^{(2p)}$

(b) Sformułuj twierdzenie Darboux (o wartości pośredniej).$^{(1p)}$

(c) Udowodnij, że jeśli $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą nieograniczoną z góry i z dołu, to dla dowolnego $c \in \mathbf{R}$ równanie $f(x) = c$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.$^{(6p)}$

(d) Podaj przykład funkcji f spełniającej założenia poprzedniego podpunktu.$^{(1p)}$

(e) Udowodnij, że twierdzenie z podpunktu (c) nie zachodzi, gdy przedział $[0, \infty)$ zastąpić przedziałem $(0, \infty)$.$^{(2p)}$