imię i nazwisko: __________________________ numer indeksu: ________________

Przykładowy egzamin z analizy matematycznej 1

Rozwiązania należy pisać na poniższym arkuszu. W razie potrzeby należy prosić o dodatkowe kartki egzaminatorów. Podczas egzaminu niedozwolone jest korzystanie z notatek i urządzeń elektronicznych.
Przypadki niesamodzielnej lub nieuczciwej pracy będą zgłaszane Dziekanowi WPPT. Zgodnie z §6 i §19 regulaminu studiów za naruszenie przepisów student może zostać skreślony z listy studentów.

____
(podpis studenta)

1. (a) Sformułuj twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym.$^{(?\text{p})}$

   (b) Uzasadnij zbieżność i oblicz granicę ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie $a_1 = 100$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{9a_n}$.$^{(?\text{p})}$

2. (a) Podaj definicję funkcji pierwotnej.$^{(?\text{p})}$

   (b) Oblicz funkcję pierwotną funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ i sprawdź, że spełnia ona powyższą definicję.$^{(?\text{p})}$

3. Korzystając z prawa składania granic, oblicz $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(e^{-1/x})}{e^{-1/x}}$.$^{(?\text{p})}$

4. (a) Sformułuj definicję całki dolnej Darboux.$^{(?\text{p})}$

(b) Sformułuj definicję całki Riemanna (korzystając z pojęć całki dolnej i całki górnej Darboux — tych już nie definiuj).$^{(?\text{p})}$

(c) Zapisz $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{e^{j/n}}{n}$ jako pewną sumę górną całki Riemanna z funkcji $f(x) = e^x$.$^{(?\text{p})}$

(d) Oblicz granicę powyższego wyrażenia gdy $n \to \infty$ (nie odwołując się do pojęcia całki Riemanna, lecz do wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego).$^{(?\text{p})}$

5. (a) Sformułuj wzór na pochodną funkcji odwrotnej.$^{(?\mathrm{p})}$

(b) Korzystając z powyższego wzoru, wyprowadź wzór na pochodną funkcji $\operatorname{arctg} x$.$^{(?\mathrm{p})}$

(c) Niech $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$. Oblicz całkę oznaczoną funkcji f na przedziale $[0, x]$.$^{(?\mathrm{p})}$

(d) Wyznacz granicę obliczonej całki gdy $x \to \infty$.$^{(?\mathrm{p})}$

(e) Niech $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Oblicz całkę nieoznaczoną funkcji f.$^{(?\mathrm{p})}$

6. (a) Przypomnij wzór Taylora i wzór na n-tą resztę w postaci Lagrange'a.$^{(?\text{p})}$

(b) Zastosuj wzór na całkowanie przez części do całki $\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} g'(t)dt$ tak, aby w otrzymanej całce występowała funkcja $g(t)$, a nie $g'(t)$.$^{(?\text{p})}$

(c) Udowodnij indukcyjnie, że n-ta reszta we wzorze Taylora jest równa $R_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$.$^{(?\text{p})}$

(d) Wywnioskuj, że $R_n(x_0, x) = \frac{(x-x_0)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} f^{(n)}(\xi)$ dla pewnego ξ między x_0 i x.$^{(?\text{p})}$

(e) Wykorzystując tę postać, znajdź dobre oszacowanie na $R_n(x_0, x)$ dla $f(x) = \ln(1+x)$ i $x_0 = 0$. Innymi słowy znajdź maksimum $\frac{x(x-\xi)^{n-1}}{(1+\xi)^{n-1}}$ dla ξ pomiędzy 0 i x, gdzie $x \in (-1, 1)$ jest ustalone.$^{(?\text{p})}$