

imię i nazwisko: _____

numer indeksu: _____

EGZAMIN POPRAWKOWY Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ 1

Rozwiązania należy pisać na poniższym arkuszu. W razie potrzeby należy prosić o dodatkowe kartki egzaminatorów. Podczas egzaminu niedozwolone jest korzystanie z notatek i urządzeń elektronicznych.

Przypadki niesamodzielnej lub nieuczciwej pracy będą zgłaszane Dziekanowi WPPT. Zgodnie z §6 i §19 regulaminu studiów za naruszenie przepisów student może zostać skreślony z listy studentów.

(podpis studenta)

1. Oblicz (dowolną metodą) granicę $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s+1)^3 - (s-1)^3}{s^2}$. (2p)

2. (a) Korzystając z reguły de l'Hospitala, oblicz granicę $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right)$. (3p)

(b) Sformułuj wykorzystaną wyżej wersję reguły de l'Hospitala (wraz z niezbędnymi założeniami). (2p)

3. (a) Sformułuj wzór na całkowanie przez podstawienie.^(1p)

(b) Sformułuj wzór na całkowanie przez części.^(1p)

(c) Oblicz całkę $\int \frac{x^2 + 8x + 4}{x^4 + 4x^2} dx$.^(3p)

(d) Oblicz całkę $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$.^(3p)

4. Znajdź wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $g(x) = x^2e^{-x}$ na przedziale $[-1, 3]$.^(4p)

5. (a) Rozwiń z definicji granicy ciągu zdanie $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1$.^(1p)

(b) Korzystając z definicji, uzasadnij, że granicą ciągu (z_n) danego wzorem $z_n = \frac{1-n}{1+n}$ jest -1 .^(2p)

6. Oblicz całkę górną Darboux $\overline{\int_{-1}^1 f(x)dx}$, jeśli $f(x) = 0$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 1$.^(2p)

7. (a) Sformułuj wzór Maclaurina (tj. wzór Taylora wokół zera) dla funkcji h ; podaj sam wzór, bez założeń, ale ze wzorem na resztę (np. w postaci Lagrange'a).^(2p)

(b) Niech $h(x) = \operatorname{arctg} x$.

- Udowodnij, że $h'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k (-1)^j x^{2j}$ gdy $|x| < 1$.^(2p)
- Udowodnij, że $h(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{2j+1}$ gdy $|x| < 1$.^(3p)
- Napisz wzór Maclaurina dla funkcji h i uzasadnij, że gdy $|x| < 1$, to reszta $R_n(0, x)$ dąży do zera.^(4p)