Analiza matematyczna 1

lista zadań 11

1. Przypomnij definicję całki oznaczonej (tę wykorzystującą funkcję pierwotną) oraz definicję całki Riemanna (tę oryginalną, z sumami częściowymi). Oblicz całkę $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ za pomocą pierwszej definicji, a następnie użyj drugiej, by obliczyć, że[1]:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{n+1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{n+2} + \ldots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n+n} \right) = \frac{\pi}{4}$,

   (c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin\frac{\pi}{4n} \cdot (\cos\frac{j\pi}{4n})^2}{\cos\frac{(j-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{j\pi}{4n}} = \frac{\pi}{4}$.

   Wskazówka: są to sumy częściowe obliczonej całki dla pewnych podziałów i punktów pośrednich.

2. Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right).$$

   Wskazówka: są to sumy częściowe pewnej funkcji.

3. Stosując wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych[2], oblicz całki

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+(\sin x)^3}\,dx$, (b) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$, (c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+(\operatorname{tg} x)^2}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\,dx$.

4. Stosując wzór na całkowanie przez części dla całek oznaczonych[3], oblicz całki

   (a) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$, (b) $\int_0^1 x\ln x\,dx$, (c) $\int_0^1 \ln x\,dx$, (d) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.

   Wskazówka: w (c) i (d) napotkasz *nieoczekiwane trudności* — jak z nich wybrnąć?

5. Oblicz pole i obwód obszaru zawartego pomiędzy wykresem funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ i prostą $y = x$.

6.* Oblicz pole obszaru zawartego między wykresami funkcji $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ oraz $g(x) = 1 + \sqrt{|x| - x^2}$. Koniecznie zilustruj ten obszar na wykresie. Pole wynosi troszkę ponad 2.

   Wskazówka: Skorzystaj z symetrii i oblicz pole prawej połowy obszaru. Zwróć uwagę na to, że wykres g to dwa półokręgi. Przyda się następujący wzór (uzasadnij go lub sprawdź, jak go uzasadnia Wolfram|Alpha):

$$\int f(x)dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2} - 2\right)\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Mateusz Kwaśnicki

[1] „Obliczyć” znaczy tu tyle, co „udowodnić”.

[3] Wzór z ostatniego wykładu w ubiegłym roku.