Analiza matematyczna 1

lista zadań 12

(do samodzielnego wykonania)

1. Wyznacz kresy zbioru $\left\{ \frac{2^k}{3^l} \ : \ k, l \in \mathbf{Z} \right\}$.

2. Uzasadnij, że jeśli $f(x) \le g(x)$ dla wszystkich $x \in A$, to
$$\inf_{x \in A} f(x) \le \inf_{x \in A} g(x) \qquad \text{oraz} \qquad \sup_{x \in A} f(x) \le \sup_{x \in A} g(x).$$

3. Uzasadnij, że jeśli $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in A$, to $\inf_{x \in A} \frac{1}{f(x)} = (\sup_{x \in A} f(x))^{-1}$. Jak interpretować tę równość, gdy f jest nieograniczona? Czy równość ma miejsce dla funkcji f o wartościach ujemnych? A dla dowolnych funkcji f nie przyjmujących wartości 0?

4. Oblicz $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ oraz $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli
$$\text{(a) } a_n = (-1)^n; \quad \text{(b) } a_n = \sin\frac{n\pi}{2}; \quad \text{(c) } a_n = \frac{10^n}{7} - \left\lfloor \frac{10^n}{7} \right\rfloor; \quad \text{(d*) } a_n = n\sqrt{2} - \left\lfloor n\sqrt{2} \right\rfloor.$$
Wskazówka: W punkcie (c) ciąg (a_n) to kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego $\frac{1}{7}$.

5. Uzasadnij, że $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$. Jaka nierówność zachodzi dla granic dolnych? Wskaż na przykładzie, że nie zawsze zachodzi równość.

6. Funkcję $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ nazywamy *kawałkami liniową*, jeśli istnieje podział $(x_0, x_1, ..., x_n)$ odcinka $[a, b]$ taki, że f jest funkcją liniową na każdym przedziale $[x_{j-1}, x_j]$. Innymi słowy, wykres f jest linią łamaną. Uzasadnij, że dla dowolnej funkcji ciągłej f istnieje ciąg (f_n) funkcji kawałkami liniowych, który jest jednostajnie zbieżny do f.
Wskazówka: Rozważaj coraz drobniejsze podziały $[a, b]$.

7. (a) Dany jest odcinek $[a, b]$ oraz liczby rzeczywiste p, P, q, Q. Uzasadnij, że istnieje wielomian W stopnia co najwyżej 3 taki, że $W(a) = p$, $W'(a) = P$, $W(b) = q$, $W'(b) = Q$.
   (b) Dany jest odcinek $[a, b]$, jego podział $(x_0, x_1, ..., x_n)$ i liczby $p_0, p_1, ..., p_n$ oraz $P_0, P_1, ..., P_n$. Uzasadnij, że istnieje funkcja różniczkowalna f o ciągłej pochodnej, która spełnia warunkji $f(x_j) = p_j$, $f'(x_j) = P_j$ dla $j = 0, 1, ..., n$.
   Wskazówka: „sklej” kilka funkcji z podpunktu (a).
   (c) Odwiedź stronę internetową:
   `http://www.sunsite.ubc.ca/LivingMathematics/V001N01/UBCExamples/Bezier/bezier.html`
   i pomyśl nad relacją między podpunktem (a) i (sześciennymi) krzywymi Béziera. Podpunkt (b) wiąże się ze sklejanymi (sześciennymi) krzywymi Béziera. Gdzie i kiedy zostały wymyślone krzywe Béziera?

8. Zbadaj jednostajną zbieżność ciągu funkcji $f_n(x) = x^n$ na przedziale: (a) $(-1, 1)$; (b) $[-1, 1]$.

Mateusz Kwaśnicki