

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

LISTA ZADAŃ 2

Dzisiejszą listę sponsorują literki **fi** (φ , Φ) i **psi** (ψ , Ψ) oraz liczba $\pi = 3,141592653589793\dots$

1. Uzasadnij, że $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (dla $x \in [-1, 1]$) oraz $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ (dla $x \in \mathbf{R}$).
2. Uzasadnij, że $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ (dla $x \in [-1, 1]$)
3. Korzystając z tożsamości $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, udowodnij kolejno, że

| | |
|--|---|
| (a) $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$; | (d) $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$; |
| (b) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$; | (e) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$; |
| (c) $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$; | (f) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$. |

Wskazówka: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $\sin(-x) = -\sin x$ itp.

4. Znajdź funkcje odwrotne do $f : [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \operatorname{tg} x$ oraz $g : [3\pi, 4\pi] \rightarrow [-1, 1]$ danej wzorem $g(x) = \cos x$.
5. Czy suma funkcji okresowych zawsze jest funkcją okresową?
6. Czy złożenie funkcji okresowych zawsze jest funkcją okresową?
7. Co można powiedzieć o złożeniu: dwóch funkcji nieparzystych; dwóch parzystych; parzystej z nieparzystą; nieparzystej z parzystą?
8. Co można powiedzieć o złożeniu: dwóch funkcji rosnących; dwóch malejących; malejącej z rosnącą; rosnącej z malejącą?
9. Znajdź funkcje odwrotne do $f(x) = x \cdot |x|$ oraz $g(x) = 2 \lfloor x \rfloor - x$.
- 10.* *Wielomianem trygonometrycznym*¹ nazywamy dowolną funkcję postaci

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x)) + \dots + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Udowodnij, że suma, różnica oraz iloczyn wielomianów trygonometrycznych jest wielomianem trygonometrycznym. Wprowadź pojęcie stopnia wielomianu trygonometrycznego i udowodnij twierdzenia o stopniu sumy, różnicy i iloczynu wielomianów trygonometrycznych.

Przypomnienie: Jeśli wielomiany (zwyczajnie, nie trygonometryczne) P i Q mają odpowiednio stopień k i l , to: (a) jeśli $k \neq l$, to $P + Q$ oraz $P - Q$ są wielomianami stopnia $\max(k, l)$; (b) jeśli $k = l$, to $P + Q$ oraz $P - Q$ są wielomianami stopnia co najwyżej k ; (c) $P \cdot Q$ jest wielomianem stopnia $k + l$.

Mateusz Kwaśnicki

¹Wielomiany trygonometryczne powrócą w drugim semestrze