Analiza matematyczna 1

lista zadań 3

Dzisiejszą listę sponsorują literki **epsilon** (ϵ, ε, E) i **delta** (δ, Δ) oraz liczba $e = 2,718281828459045...$

1. Uzasadnij, że funkcja $f(x) = |x|$ jest jednostajnie ciągła.

2. Zbadaj, w jakich punktach ciągła jest funkcja sign (czyt. *signum*, łac. znak):[1]

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 0, \\ 0 & \text{gdy } x = 0, \\ -1 & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

3. Udowodnij, że funkcja f dana wzorem $f(x) = x^2 - 2$ dla $x < 2$, $f(x) = \sqrt{2x}$ dla $x > 2$ oraz $f(2) = 3$ jest nieciągła. Co zrobić, by f była ciągła?

4. Podaj przykład funkcji nieciągłej, której kwadrat jest funkcją ciągłą.

5. Uzasadnij, że jeśli istnieją granice $p = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ oraz $q = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, to $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = p - q$ oraz $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = p \cdot q$.

6. Udowodnij, że jeśli $f(x) \leq g(x)$ dla wszystkich x, to $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

7. Korzystając z tożsamości $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ i praw arytmetyki granic, oblicz:

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$,

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$,

   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{tg}(x^2)}{\sin(x^3)}$,

   (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$,

   (e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cos(3x)}$,

   (f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

8. Udowodnij, że funkcja Dirichleta D (dana wzorem $D(x) = 1$ dla x wymiernych, $D(x) = 0$ dla x niewymiernych) nie jest ciągła w żadnym punkcie.

9.* Udowodnij, że funkcja Riemanna R (dana wzorem $R(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ dla wymiernych liczb $\frac{p}{q}$ w postaci nieskracalnej, $R(x) = 0$ dla x niewymiernych) jest ciągła w a wtedy i tylko wtedy, gdy a jest niewymierne.

10.* Niech $a > 0$. Określmy $L(a) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$. Uzasadnienie, że L jest poprawnie określone (tj. że powyższa granica istnieje), jest w tej chwili za trudne. Udowodnij, że przy założeniu, że L jest dobrze określone, L jest funkcją rosnącą, spełniającą warunek $L(ab) = L(a) + L(b)$. Okazuje się, że $L(a)$ jest logarytmem z a o podstawie równej $e = 2,718281828459045...$

Mateusz Kwaśnicki

[1] Dla wygody możesz oznaczyć sign przez f