Analiza matematyczna 1

lista zadań 4

1. Wykorzystaj twierdzenia granicach i równość $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, aby udowodnić kolejno, że

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$; (wskazówka: $\sin x = \frac{\sin x}{x} \cdot x$)

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \sin(cx) = 0$; (wskazówka: ciągłość złożenia)

   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$; (wskazówka: $\cos x = 1 - 2(\sin \frac{x}{2})^2$)

   (d) $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$; (wskazówka: $\sin x = \sin a \cos(x-a) + \cos a \sin(x-a)$)

   (e) $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$.

   Uwaga: w tym zadaniu nie wolno korzystać z ciągłości funkcji trygonometrycznych, wszak właśnie się ją uzasadnia!

2. Twierdzenie o granicy ilorazu nic nie mówi o istnienu lub wartości granicy ilorazu jeśli licznik i mianownik dążą do zera. Czasem jednak można iloraz przekształcić do postaci, w której twierdzenie o arytmetyce granic ma zastosowanie. Na przykład

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{2x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 2}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \to 0}(x+2)}{\lim_{x \to 0}(2x+1)} = \frac{2}{1} = 2.$$

   Oblicz w podobny sposób granice

$$\text{(a)} \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2 + x}, \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x - 2}, \qquad \text{(c)} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \sin x \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}.$$

3. Wyznacz granice metodami podobnymi do tych z poprzedniego zadania:

$$\text{(a)} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \quad \text{(b)} \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, \quad \text{(c)} \lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{(d)} \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{(\frac{1}{2})^x - 1}.$$

4. Wykorzystując równość $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$ (gdzie $e = 2,71828183...$), oblicz:

$$\text{(a)} \lim_{x \to 0} \frac{5^x - 3^x}{2^x - 1}, \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}, \qquad \text{(c)} \lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}.$$

   Wskazówka do (c): $p^q = e^{q \log_e p}$.

5. Załóżmy, że f jest funkcją rosnącą na pewnym przedziale otwartym zawierającym 0, spełniającą $f(0) = 0$ i $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = a$. Niech f^{-1} będzie funkcją odwrotną do f. Oblicz $\lim_{x \to 0} \frac{f^{-1}(x)}{x}$.
   Wskazówka: podstaw $x = f^{-1}(y)$.

Mateusz Kwaśnicki