Analiza matematyczna 1

lista zadań 5

1. Wyznacz granice:

$$\text{(a)} \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x + \log_x 2}{\log_3 x + \log_x 3}\,; \quad \text{(b)} \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right); \quad \text{(c)} \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}\right).$$

2. Wykorzystaj twierdzenie o 3 funkcjach do wyznaczenia granic:

$$\text{(a)} \lim_{x\to\infty} (2^x + 3^x + 5^x)^{\frac{1}{x}}; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to\infty} (2^x - 3^x + 5^x)^{\frac{1}{x}}; \qquad \text{(c)} \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x+\sin x}\right)^x.$$

3. *Silnia* liczby n to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n, tj. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$. Udowodnij, że $n! \ge 2^{n-1}$, $n! \ge 3^{n-2}$ i ogólnie $n! \ge k^{n-k}$.

4. Wyznacz granice $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ gdy $a > 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

5. Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

6. Udowodnij, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = c$.

   Wskazówka: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} - c = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k-kc}{n} + \frac{(a_{k+1}-c)+(a_{k+2}-c)+\ldots+(a_n-c)}{n}$.

7. Udowodnij, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} = c$.

   Wskazówka: wykorzystaj poprzednie zadanie dla $a_n = \log_2 b_n$.

8. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

   Wskazówka: wykorzystaj poprzednie zadanie dla odpowiednio dobranego ciągu (b_n).

9. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n\, n!}{n^n} = 0$ gdy $1 < a < e$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n\, n!}{n^n} = \infty$ gdy $a > e$.

   Wskazówka: wykorzystaj poprzednie zadanie.

10.* Wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n\, n!}{n^n}$.

   Wskazówki: Udowodnij (badając iloraz kolejnych wyrazów), że ciąg o wyrazach $\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i wobec tego jego wyrazy są mniejsze od e. Zbadaj iloraz dwóch kolejnych wyrazów ciągu $\frac{e^n n!}{n^n}$ i udowodnij indukcyjnie, że $\frac{e^n n!}{n^n} \ge \sqrt{n+1}$.

Mateusz Kwaśnicki