Analiza matematyczna 1

lista zadań 6

1. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji oraz ciągłości funkcji, udowodnij, że:

   (a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ nie jest ciągła w -1;

   (b) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ nie ma granicy w $\frac{\pi}{2}$;

   (c) $f(x) = \sin(\log_2 x)$ nie ma granicy w 0 i w ∞.

2. Ustalmy $p \in (0,1)$ i niech $a_0 = 0$, $a_{n+1} = (1-p)a_n + 1$. Jaka może być granica ciągu (a_n), jeśli jest on zbieżny? Udowodnij, że jest zbieżny.

3. Dla jakich jeszcze $p \in \mathbf{R}$ ciąg z powyższego zadania jest zbieżny?

4. Ustalmy $p > 0$ i określmy $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{p}{2a_n}$. Jaka jest granica ciągu (a_n), jeśli jest on zbieżny? Udowodnij, że jest zbieżny.

   Wskazówka: Sam ciąg (a_n) nie jest monotoniczny. Monotoniczny staje się po opuszczeniu pierwszego wyrazu.

5. Czy ciąg określony wzorami $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ jest zbieżny? A ciąg dany wzorami $b_0 = 1$, $b_{n+1} = b_n + 2^{-b_n}$?

6. Załóżmy, że f jest funkcją rosnącą, $f(x) > x$ dla $x \le c$ oraz $f(c) = c$. Niech $a_0 < c$ oraz $a_{n+1} = f(a_n)$. Udowodnij, że ciąg (a_n) jest zbieżny do c.

7. Udowodnij, że ciąg $(1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący, a ciąg $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ jest malejący. Uzasadnij, że oba są ograniczone. Jaka jest granica tych ciągów?

   Wskazówka: nierówność Bernoulliego.

8. Ciąg Fibonacciego (F_n) spełnia równanie rekurencyjne $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Znajdź jawny wzór na wyrazy F_n (tzw. *wzór Bineta*).

9. Wyznacz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

10.* Udowodnij następujące własności ciągu Fibonacciego:

   - $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$;
   - $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n\, F_{n+1}$;
   - $F_{n+1}\, F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$;
   - $F_{k+l} = F_k\, F_{l+1} + F_{k+1}\, F_l$;
   - $\mathrm{NWD}(F_k, F_l) = F_{\mathrm{NWD}(k,l)}$.

Mateusz Kwaśnicki