Analiza matematyczna 1
lista zadań 7

1. (a) Udowodnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny do c wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest zbieżny do c. (Sprytnie można się powołać na równoważność definicji Heinego i Cauchy'ego zbieżności funkcji w nieskończoności; zrób to jednak wprost z definicji.)
   (b) Udowodnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest zbieżny.
2. (a) Udowodnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny do c wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego jego podciągu (y_n) można wybrać „podpodciąg" (z_n) zbieżny do c.
   (b) Udowodnij, że nieprawdą jest stwierdzenie: ciąg (x_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego jego podciągu (y_n) można wybrać „podpodciąg" (z_n) zbieżny.
3. Udowodnij, że jeśli ciąg nie ma elementu najmniejszego, to zawiera podciąg malejący.
4. Udowodnij, że każdy ciąg zawiera podciąg monotoniczny.
5. Turysta wyruszył w góry z przystanku PKS w sobotę o godzinie 10:00 i dotarł do schroniska o 16:00. Następnego dnia wyruszył ponownie o 10:00, zszedł niespieszno tym samym szlakiem w dół i na przystanku był o 16:00. Udowodnij, że w pewnym miejscu trasy był o tej samej godzinie w sobotę i w niedzielę.
6. Udowodnij, że wielomian $x^5 + x^2 - 3$ ma pierwiastek rzeczywisty i wyznacz go z dokładnością do $\frac{1}{10}$.
7. Udowodnij, że dowolny wielomian nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.
8. Udowodnij, że wielomian $x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x + 1$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste.
9. Udowodnij, że jeśli $f : [a, b] \to [a, b]$, to $f(c) = c$ dla pewnego $c \in [a, b]$. (Taka liczba c nazywa się punktem stałym f.)
10. Uzasadnij w każdej chwili w pewnych dwóch punktach równika leżących dokładnie po przeciwnej stronie Ziemi panuje ta sama temperatura.

Wskazówki: 2. (a) jest najtrudniejsze. W 3. za każdym razem wybieraj najbliższy wyraz mniejszy od ostatnio wybranego. W 4. stosuj wielokrotnie zadanie poprzednie.

Mateusz Kwaśnicki