

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

LISTA ZADAŃ 8

1. Oblicz z definicji pochodne $f'(x_0)$ funkcji:

$$(a) f(x) = x^2, \quad (b) f(x) = \frac{1}{x}, \quad (c) f(x) = \sqrt{x}, \quad (d) f(x) = \operatorname{tg} x.$$

2. Oblicz (raczej nie z definicji) pochodne funkcji:

$$(a) f(x) = e^x \operatorname{arctg} x, \quad (c) f(x) = \sqrt[3]{\ln(1+x^2)}, \quad (e) f(x) = \frac{2^{\sin x}}{3^{\cos x}}, \quad (g) f(x) = \sqrt[3]{x},$$
$$(b) f(x) = e^{x \operatorname{arctg} x}, \quad (d) f(x) = e^{e^x}, \quad (f) f(x) = \sqrt[n]{1+x^x}, \quad (h) f(x) = (\sin x)^{\cos x}.$$

3. Oblicz pochodne jednostronne w odpowiednich punktach i sprawdź, czy poniższe funkcje są różniczkowalne:

$$(a) f(x) = |x|^3, \quad (b) f(x) = |x^2 - 1|, \quad (c) f(x) = |x^2 - 1|^3,$$
$$(d) f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \leq 0, \\ \sin x + \cos x & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

4. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, oblicz pochodną funkcji f^{-1} w punkcie y_0 , jeśli

$$(a) f(x) = \frac{1-x}{1+x}, y_0 = 0 \text{ (znajdź też jawny wzór na } f^{-1}, \text{ oblicz pochodną uzyskanej funkcji i porównaj wyniki);}$$
$$(b) f(x) = x e^x, y_0 = e \text{ (} f^{-1} \text{ to tzw. funkcja } W \text{ Lamberta);}$$
$$(c) f(x) = x^x, y_0 = 4.$$

5. Znajdź styczne do wykresu funkcji z zadania 1. w punkcie $(\pi, f(\pi))$.

6. Niech $f(x) = 3x^6 - 25x^4 + 60x^2$. Wyznacz wszystkie styczne do wykresu funkcji f przechodzące przez punkt $(0, 0)$. (To nie to samo, co wyznaczyć styczną do wykresu w punkcie $(0, 0)$!)

7.* Znajdź wielomian W możliwie najniższego stopnia, ale różny od funkcji liniowej, o następującej własności: styczne do $y = W(x)$ w punktach $(0, W(0))$, $(1, W(1))$, $(2, W(2))$ i $(3, W(3))$ mają punkt wspólny.

Mateusz Kwaśnicki